APPLICATIONS LINÉAIRES

I GÉNÉRALITÉS

1. Définition et vocabulaire
2. Conséquences de la définition
3. Caractérisation

II OPÉRATIONS SUR LES APPLICATION LINÉAIRES

1. Somme, multiplication externe et composition
2. Notation usuelle
3. Propriétés et formules usuelles
4. Polynômes d'endomorphismes Deuxième année
5. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme Deuxième année

III NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1. Image d'un sous-espace vectoriel. Image d'une application linéaire
2. Rang d'une application linéaire
3. Sous-espace stable par un endomorphisme
4. Image réciproque d'un sous-espace vectoriel. Noyau d'une application linéaire
5. Caractérisation des applications linéaires injectives (resp. surjectives)

IV APPLICATIONS LINEAIRES BIJECTIVES. ISOMORPHISMES

1. Réciproque d' une application linéaire bijective
2. Ensemble des automorphismes de E
3. Caractérisation des applications linéaires bijectives
4. Caractérisation des applications linéaires bijectives en dimension finie
5. Espaces vectoriels isomorphes

V THÉORÈME DU RANG

VI DETERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

APPLICATIONS LINEAIRES

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des applications linéaires, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E et E' (et même E'') sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définition et vocabulaire

Déf. 1 Une application f de E dans E' est **linéaire** si

$$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

On note $\mathcal{L}(E,E')$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E' et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Déf. 2 Une application linéaire de E dans E s'appelle **un endomorphisme de E**.

Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ s'appelle **une forme linéaire sur E**.

Une application linéaire bijective de E sur E' s'appelle **un isomorphisme de E sur E′**.

Une application linéaire bijective de E sur E s'appelle **un automorphisme de E**.

▶ 2. Conséquences de la définition

Prop. 1 Soit f une application linéaire de E dans E'.

1. $f(0_E) = 0_{E'}$.
2. Pour tout u dans E, $f(-u) = -f(u)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n,\ \boxed{f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f(u_k)}$.

▶ 3. Caractérisation

Th. 1 **PP** Une application f de E dans E' est linéaire si et seulement si :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

II OPÉRATIONS SUR LES APPLICATION LINÉAIRES

▶ 1. Somme, multiplication externe et composition

Th. 2 Soit α un élément de $\mathbb{K}$, f et g deux éléments applications linéaires de E dans E'.

On pose $\forall u \in E,\ (f+g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\alpha \cdot f)(u) = \alpha\, f(u)$.

$f + g$ et $\alpha \cdot f$ sont des applications linéaires de E dans E'.

Th. 3 $(\mathcal{L}(E,E'),+,\cdot\,)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $\boxed{\dim E \times \dim E'}$.

$(\mathcal{L}(E),+,\cdot\,)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $(\dim E)^2$.

Th. 4 La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Plus précisément si f est une application linéaire de E dans E' et g est une application linéaire de E' dans E'' alors $g\circ f$ est une application linéaire de E dans E''.

▶ 2. Notation usuelle

Soit f un endomorphisme de E. La suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la récurrence suivante.

$f^0=\mathrm{Id}_E$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{n+1}=f^n\circ f$.

▶ 3. Propriétés et formules usuelles

Prop. 2 1. α est un élément de $\mathbb{K}$, f est dans $\mathcal{L}(E',E'')$ et g dans $\mathcal{L}(E,E')$.

$$\alpha(f\circ g)=(\alpha f)\circ g=f\circ(\alpha g).$$

2. f est un élément de $\mathcal{L}(E,E')$, g et h deux éléments de $\mathcal{L}(E',E'')$. α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$.

$$(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f \quad \text{et} \quad \boxed{(\alpha\, g+\beta\, h)\circ f=\alpha\, g\circ f+\beta\, h\circ f}.$$

3. f est un élément de $\mathcal{L}(E',E'')$, g et h deux éléments de $\mathcal{L}(E,E')$.

$$f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h \quad \text{et} \quad \boxed{f\circ(\alpha\, g+\beta\, h)=\alpha\, f\circ g+\beta\, f\circ h}.$$

4. $(f_1,f_2,\dots,f_p)$ est une famille d'applications linéaires de E dans E' et $(g_1,g_2,\dots,g_n)$ une famille d'applications linéaires de E' dans E''. $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ et $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p)$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, g_i\Big)\circ\Big(\sum_{j=1}^{p}\beta_j\, f_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\alpha_i\beta_j\, g_i\circ f_j.$$

Prop. 3 f et g sont deux endomorphismes de E **qui commutent**. n est dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{(f+g)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\, f^k\circ g^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\ f^k\circ g^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\, f^{n-k}\circ g^k=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\ f^{n-k}\circ g^k}$$

Prop. 4 f et g sont deux endomorphismes de E **qui commutent**. n est dans $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{f^n-g^n=(f-g)\circ\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\circ g^{n-1-k}\Big)=(f-g)\circ\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f^{n-k-1}\circ g^k\Big)}$$

$$\boxed{f^n-g^n=\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\circ g^{n-1-k}\Big)\circ(f-g)=\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f^{n-k-1}\circ g^k\Big)\circ(f-g)}$$

▶ 4. Polynômes d'endomorphismes **Deuxième année**

Prop. 5 f est un endomorphisme de E et $P=\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

$\sum_{k=0}^{r} a_k\, f^k$ est un endomorphisme de E que l'on note $P(f)$.

Th. 5 **SD** f est un endomorphisme de E, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et α est un élément de $\mathbb{K}$.

$\boxed{(P+Q)(f)=P(f)+Q(f)}$ $\boxed{(\alpha\, P)(f)=\alpha\, P(f)}$ $\boxed{(PQ)(f)=P(f)\circ Q(f)=Q(f)\circ P(f)}$

▶ 5. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme **Deuxième année**

Déf. 3 Soit f un endomorphisme de E.

On appelle **polynôme annulateur** de f tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Th. 6 Tout endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie** possède un polynôme annulateur **non nul**.

Th. 7
- Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$, $X-\lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie vectorielle $\lambda\ \mathrm{Id}_E$.
- X^2-X est un polynôme annulateur de toute projection de E.
- X^2-1 est un polynôme annulateur de toute symétrie de E.

III NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

▶ 1. Image d'un sous-espace vectoriel. Image d'une application linéaire

Th. 8 f est une application linéaire de E dans E'.

1. L'image par f d'un sous-espace espace vectoriel de E est un sous espace vectoriel de E'.
2. **P** Si $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une famille d'éléments de E :

$$\boxed{f\big(\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_p)\big)=\mathrm{Vect}\,\big(f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_p)\big)}$$

Déf. 4 **L'image** d'une application linéaire f de E dans E' est $f(E)$. Nous la noterons $\mathrm{Im}\, f$.

$\boxed{\mathrm{Im}\, f=\{f(x); x\in E\}}$ ou $\boxed{\mathrm{Im}\, f=\{y\in E' \mid \exists x\in E,\ f(x)=y\}}$

Th. 9 f est une application linéaire de E dans E'.

1. $\mathrm{Im}\, f$ est un sous espace vectoriel de E'.
2. **P** $\boxed{\text{Si } (e_1,e_2,\dots,e_n) \text{ est une base de } E : \mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}\,\big(f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n)\big)}$

▶ 2. Rang d'une application linéaire

Déf. 5 Le **rang d'une application linéaire** de E dans E' est la dimension de l'image de f. On le note $\mathrm{rg}(f)$.

Prop. 6 Soit f une application linéaire de E dans E'.

$$\boxed{\mathrm{rg}\, f\leqslant \mathrm{Min}(\dim E,\dim E')}$$

▶ 3. Sous-espace stable par un endomorphisme

Déf. 6 F est un sous-espace vectoriel E et f un endomorphisme de E.

F est **stable par f** si $f(F) \subset F$, c'est à dire si $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

▶ 4. Image réciproque d'un sous-espace vectoriel. Noyau d'une application linéaire

Prop. 7 f est une application linéaire de E dans E'.

L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de E' est un sous-espace vectoriel de E.

Déf. 7 f est une application linéaire de E dans E'.

L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image $0_{E'}$ par f est le **noyau** de f. On le note $\operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker} f = \{u \in E|\ f(u) = 0_{E'}\} = f^{-1}\big(\{0_{E'}\}\big)$.

Th. 10 Si f est une application linéaire de E dans E', $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

▶ 5. Caractérisation des applications linéaires injectives (resp. surjectives)

Th. 11 f est une application linéaire de E dans E'.

1. f est injective si et seulement si : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si : $\operatorname{Im} f = E'$.

IV APPLICATIONS LINEAIRES BIJECTIVES. ISOMORPHISMES

▶ 1. Réciproque d' une application linéaire bijective

Th. 12 La réciproque d'une application linéaire bijective de E sur E' est une application linéaire bijective de E' sur E. Soit encore la réciproque d'un isomorphisme de E sur E' est un isomorphisme de E' sur E.
En particulier le réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E

▶ 2. Ensemble des automorphismes de E

Déf. 8 On note $GL_{\mathbb{K}}(E)$ ou $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

$GL(E)$ est appelé **groupe linéaire de** E.

Prop. 8 1. Si f et g sont deux éléments de $GL(E)$ alors $g \circ f$ est un élément de $GL(E)$ et $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.

2. Si f est un élément de $GL(E)$ alors f^{-1} est un élément de $GL(E)$.

▶ 3. Caractérisation des applications linéaires bijectives

Th. 13 f est une application linéaire de E dans E'.

f est bijective si et seulement si : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E'$.

Th. 14 **P** Soit f une application linéaire de E dans E'. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une application (linéaire) g de E' dans E telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_{E'}$.

Th. 15 f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que E n'est pas nul.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de E'.

iii) Toute base de E a pour image par f une base de E'.

▸ 4. Caractérisation des applications linéaires bijectives en dimension finie

Th. 16 **PP** f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que $\boxed{\boxed{\dim E = \dim E' < +\infty}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) f est injective. iii) f est surjective.

Th. 17 **P** f est un endomorphisme de E. Si $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$ alors les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) f est injective. iii) f est surjective.

★★ Il suffit de dire que l'on est en dimension finie pour appliquer ce dernier résultat car f est un endomorphisme de E. Ce n'est évidemment pas le cas dans le résultat qui le précède où l'égalité des dimensions est essentielle.

▸ 5. Espaces vectoriels isomorphes

Déf. 9 Deux espaces vectoriels sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme (d'espace vectoriel) de l'un vers l'autre.

Th. 18 **P** Deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

Th. 19 Deux espaces vectoriels qui ont même dimension sont isomorphes.

Prop. 9 **P** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

V THÉORÈME DU RANG

Th. 20 **SD** Soit f une application linéaire de E dans E'.
Tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f$; par conséquent :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E} \quad \text{ou} \quad \boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = \dim E}$$

VI DETERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Th. 21 Une application linéaire de E dans E' est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

Plus précisément si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille quelconque d'éléments de E', il existe une application linéaire f de E dans E' et une seule telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = v_i.$$

Prop. 10 **P** On suppose E non nulle. Deux applications linéaires de E dans E' sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.

VII PROJECTIONS

▸ 1. Définition

Déf. 10 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. La **projection** sur F parallèlement à G est l'application p de E dans E qui a tout élément w de E s'écrivant (de manière unique) $w = u + v$ avec u dans F et v dans G, associe le vecteur u.

On parle encore de projection de base F et de direction G.

▸ 2. Propriétés

Th. 22 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. p est la projection sur F parallèlement à G.

1. p est un endomorphisme de E.
2. $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$.
3. $F = \{u \in E |\ p(u) = u\} = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$.
4. $p \circ p = p$.
5. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p (deuxième année).

Prop. 11 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. p est la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

$$p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad p + q = Id_E.$$

▸ 3. Caractérisation **Deuxième année**

Th. 23 Soit p une application de E dans E.

p est une projection si et seulement si p est linéaire et $p \circ p = p$.

Déf. 11 On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Th. 24 1. Une projection est un projecteur.

2. **SD** **P** Réciproquement si p est un projecteur de E, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

VIII SYMÉTRIES

▸ 1. Définition

Déf. 12 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. La **symétrie** par rapport à F parallèlement à G est l'application s de E dans E qui a tout élément w de E s'écrivant (de manière unique) $w = u + v$ avec u dans F et v dans G, associe le vecteur $u - v$.

On parle encore de symétrie de base F et de direction G.

▶ 2. Propriétés

Th. 25 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. s est la symétrie sur F parallèlement à G.

1. s est un automorphisme involutif de E ; autrement dit s est une application linéaire bijective de E dans E telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
2. $s^{-1} = s$
3. $F = \{u \in E |\ s(u) = u\} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \{u \in E |\ s(u) = -u\} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$
4. $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s (deuxième année).
5. $s = 2\,p - \mathrm{Id}_E$ où p est la projection sur F parallèlement à G.

▶ 3. Caractérisation

Th. 26 1. Toute symétrie s de E est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

2. Réciproquement si s est un **endomorphisme** de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ alors s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id_E)$.

IX SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une application est un endomorphisme.
- Utiliser les propriétés des opérations sur les applications linéaires.
- Trouver l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Trouver le rang d'une application linéaire.
- Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.
- Déterminer la réciproque d'une application linéaire bijective.
- Montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes.
- Construire un isomorphisme pour trouver la dimension d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une application linéaire est une projection (resp. symétrie) et trouver ses éléments.
- Définir analytiquement une projection ou une symétrie.

X COMPLÉMENTS

▶ 1. L'application linéaire nulle.

Prop. 12 f est une application (linéaire) de E dans E'.

f n'est pas l'application linéaire nulle si et seulement si $\boxed{\text{il existe un élément}}$ x dans E tel que $f(x) \neq 0_{E'}$.

Prop. 13 f est une application linéaire de E dans E'.

f est l'application linéaire nulle si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = \{0_{E'}\}$.

f est l'application linéaire nulle si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = E$.

▶ 2. Composée.

Prop. 14 f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g).$$

Prop. 15 $\boxed{\text{SD}}$ f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g}$$

Prop. 16 $\boxed{\text{SD}}$ f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,E'')} \text{ équivaut à } \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g}.$$

▶ 3. Application linéaire injective.

Prop. 17 $\boxed{\text{SD}}$ Soit f est une application linéaire de E dans E'.

Si f est injective, f transforme tout sous-espace vectoriel de E en un sous-espace vectoriel de E' de même dimension (et réciproquement...).

Si f est injective, f transforme toute famille libre de E en une famille libre de E' (et réciproquement...).

▶ 4. Homothétie vectorielle.

Déf. 13 Une application (linéaire) h de E dans E est **une homothétie vectorielle de E** s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $h = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.

Prop. 18 L'ensemble des homothéties vectorielles de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 1.

Prop. 19 Si E est de dimension 1, toute application linéaire de E dans E est une homothétie vectorielle de E.

Prop. 20 Soit f une application linéaire de E dans E. f est une homothétie vectorielle si et seulement si elle laisse stable toutes les droites de E.

Th. 27 Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$, $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie vectorielle $\lambda\, \mathrm{Id}_E$.

▶ 5. Rang d'une forme linéaire.

Prop. 21 f est une forme linéaire sur E (autrement dit une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Si f n'est pas la forme linéaire nulle alors $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{K}$, $\boxed{\mathrm{Ker}\, f \text{ est un hyperplan et } \mathrm{rg}\, f = 1}$.

▶ 6. Endomorphisme symétrisable à droite (resp. à gauche) en dimension finie.

Th. 28 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de $\boxed{\text{dimension finie}}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est un automorphisme de E.

ii) Il exite une application (linéaire) g de E dans E telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

iii) Il exite une application (linéaire) h de E dans E telle que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.

▶ 7. Détermination d'une application linéaire.

Th. 29 On suppose que $E = F \oplus G$. Une application linéaire est entièrement déterminée par sa donnée sur F et sur G.
Plus précisément si f est une application linéaire de F dans E' et g est une application linéaire de G dans E', il existe une application linéaire h de E dans E' et une seule telle que :

$$\forall x \in F,\ h(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ h(x) = g(x).$$

Prop. 22 On suppose que $E = F \oplus G$.

Deux applications linéaires de E dans E' sont égales si et seulement si elles coïncident sur F et G.

Une application linéaire de E dans E' est nulle si et seulement si elle nulle sur F et sur G.

▶ 8. Endomorphisme nilpotent.

Déf. 14 Un endomorphisme f de E est **nilpotent** s'il existe un élément k de $\mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans ce cas, le plus petit élément p de $\mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est l'indice de nilpotence.

Prop. 23 SD f est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence p ($f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Si x et un élément de E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ alors $\big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\big)$ est une famille libre de E.

Prop. 24 f et g sont deux endomorphismes nilpotents de E qui commutent. Alors $f + g$ et $f \circ g$ sont deux endomorphismes nilpotents de E.

▶ 9. Polynôme d'endomorphisme et stabilité.

Prop. 25 SD Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme f de E.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, F est encore stable par l'endomorphisme $P(f)$.

▶ 10. Polynôme annulateur et inversibilité.

Th. 30 P **Polynôme annulateur et inversibilité.**

f est un endomorphisme de E et $P = \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un polynôme annulateur de f.

Ainsi $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si $P(0) = a_0$ n'est pas nul, f est un automorphisme de E et $f^{-1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{a_0}\right) f^{k-1}$.

Th. 31 **Polynôme minimal.** f est un enomorphisme de E.
1. Si P est un polynome annulateur de f, pour tout élément Q de $\mathbb{K}[X]$, PQ est encore un polynôme annulateur de f.
2. Si f possède au moins un polynôme annulateur non nul, il existe un polynôme unitaire S, et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de f soit l'ensemble des multiples de S.

XI DES ERREURS À NE PAS FAIRE.

★ f est une application de E dans E donc f est un endomorphisme de E (oubli de la linéarité).

★ f est une application linéaire donc $f(x) = 0$ donne $x = 0$.

★ f et g sont deux endomorphismes de E.

• Ecrire fg à la place de $f \circ g$.

• Si $P = X - a$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P(f) = f - a$.

• Si $P = \prod_{k=1}^{r}(X - a_k)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P(f) = \prod_{k=1}^{r}(f - a_k Id_E)$.

• Si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$: $(PQ(f) = P(f)Q(f)$ (à la place de $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$).

★ f est une application linéaire injective donc bijective car on est en dimension finie (ok ? ?).

★ Si f et g sont applications linéaires de E dans E', $(f + g)(E) = f(E) + g(E)$.

On a $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ mais pas nécessairement l'égalité.

★ $P = a\,X^2 + b\,X + c$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et f est un endomorphisme de E. $P(f) = a\,f^2 + b\,f + c$.