APPLICATIONS LINÉAIRES

APPLICATIONS LINEAIRES

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des applications linéaires, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E et E' (et même E'') sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I GÉNÉRALITÉS

► 1. Définition et vocabulaire

Déf. 1 Une application f de E dans E' est **linéaire** si

$$\forall (u,v)\in E^2,\ f(u+v)=f(u)+f(v) \text{ et } \forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall u\in E,\ f(\lambda u)=\lambda f(u).$$

On note $\mathcal{L}(E,E')$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E' et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Déf. 2 Une application linéaire de E dans E s'appelle **un endomorphisme de E**.

Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ s'appelle **une forme linéaire sur E**.

Une application linéaire bijective de E sur E' s'appelle **un isomorphisme de E sur E'**.

Une application linéaire bijective de E sur E s'appelle **un automorphisme de E**.

► 2. Conséquences de la définition

Prop. 1 Soit f une application linéaire de E dans E'.

1. $f(0_E)=0_{E'}$.
2. Pour tout u dans E, $f(-u)=-f(u)$.
3. **P** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \forall(u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n,$ $\boxed{f\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,f(u_k)}$.

► 3. Caractérisation

Th. 1 **PP** Une application f de E dans E' est linéaire si et seulement si :

$$\forall (u,v)\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v).$$

4. L'identité

Th. 2 et **déf. 3** L'application de E dans E qui a tout élément u de E associe u est un automorphisme de E.

On la note Id_E et on l'appelle **l'application identique de E ou l'identité de E**.

II OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

▸ 1. Somme, multiplication externe et composition

Th. 3 Soit α un élément de $\mathbb{K}$. Soient f et g deux applications linéaires de E dans E'.

On pose $\forall u \in E,\ (f+g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\alpha\cdot f)(u) = \alpha\, f(u)$.

$f+g$ et $\alpha\cdot f$ sont des applications linéaires de E dans E'.

Th. 4 $(\mathcal{L}(E,E'),+,\cdot\,)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $\boxed{\dim E \times \dim E'}$.

$(\mathcal{L}(E),+,\cdot\,)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $(\dim E)^2$.

Cela va sans dire que nous noterons $0_{\mathcal{L}(E,E')}$ le vecteur nul de $\mathcal{L}(E,E')$. $\forall u \in E,\ 0_{\mathcal{L}(E,E')}(u) = 0_{E'}$.

De même nous noterons $0_{\mathcal{L}(E)}$ le vecteur nul de $\mathcal{L}(E)$. $\forall u \in E,\ 0_{\mathcal{L}(E)}(u) = 0_E$.

Prop. 2 Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E.

Déf. 4 Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est **l'homothétie vectorielle de rapport λ de E.**

Th. 5 La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Plus précisément si f est une application linéaire de E dans E' et g est une application linéaire de E' dans E'' alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans E''.

▸ 2. Puissances d'un endomorphisme

Th. 6 et **déf. 5** Soit f un endomorphisme de E.

On considère la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :

$f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, f^k est un endomorphisme de E, appelé puissance $k^{\text{ème}}$ de f.

▸ 3. Propriétés et formules usuelles

Prop. 3 1. α est un élément de $\mathbb{K}$, f est dans $\mathcal{L}(E',E'')$ et g dans $\mathcal{L}(E,E')$.

$$\alpha\,(f\circ g) = (\alpha f)\circ g = f \circ (\alpha\, g).$$

2. f est un élément de $\mathcal{L}(E,E')$, g et h deux éléments de $\mathcal{L}(E',E'')$. α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$.

$$(g+h)\circ f = g\circ f + h \circ f \quad \text{et} \quad \boxed{(\alpha\, g + \beta\, h)\circ f = \alpha\, g \circ f + \beta\, h \circ f}.$$

3. f est un élément de $\mathcal{L}(E',E'')$, g et h deux éléments de $\mathcal{L}(E,E')$.

$$f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h \quad \text{et} \quad \boxed{f\circ(\alpha\, g + \beta\, h) = \alpha\, f\circ g + \beta\, f \circ h}.$$

Cor. **P** $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une famille d'applications linéaires de E dans E' et $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ une famille d'applications linéaires de E' dans E''. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, g_i\Big) \circ \Big(\sum_{j=1}^{p} \beta_j\, f_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_i \beta_j\, g_i \circ f_j.$$

Prop. 4 Soit f un endomorphisme de E. Soient r et s deux éléments de $\mathbb{N}$.

$\boxed{f^r \circ f^s = f^s \circ f^r = f^{r+s}}$ et $\boxed{(f^r)^s = (f^s)^r = f^{rs}}$.

Prop. 5 **SD** f et g sont deux endomorphismes de E **qui commutent** ($f \circ g = g \circ f$).

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ (f \circ g)^k = f^k \circ g^k}.$$

Pour démontrer cela on peut faire deux récurrences. La première consiste à montrer que g commute avec les puissances de f.

Prop. 6 f et g sont deux endomorphismes de E **qui commutent**. n est dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f^{n-k} \circ g^k}.$$

Prop. 7 **SD** f et g sont deux endomorphismes de E **qui commutent**. n est dans $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right) = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k-1} \circ g^k \right)}.$$

$$\boxed{f^n - g^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right) \circ (f-g) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k-1} \circ g^k \right) \circ (f-g)}.$$

▶ 4. Polynômes d'endomorphismes

Prop. 8 f est un endomorphisme de E et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k f^k$ est un endomorphisme de E que l'on note $P(f)$.

Th. 7 f est un endomorphisme de E, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et α est un élément de $\mathbb{K}$.

$\boxed{(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)}$ $\boxed{(\alpha P)(f) = \alpha P(f)}$ $\boxed{(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)}$

P On retiendra que $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.

★★ On évitera d'écrire que $(PQ)(f) = P(f)\,Q(f) = Q(f)\,P(f)$.

Cor. f est un endomorphisme de E. $\{P(f)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par $\circ$.

Prop. 9 λ est un élément de $\mathbb{K}$ et P est le polynôme constant égal à λ.

Si f est un endomorphisme de E, $P(f) = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

★ Dans le résultat précédent on évitra d'écrire $P(f) = \lambda$.

▸ 5. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme

Déf. 6 Soit f un endomorphisme de E.

On appelle **polynôme annulateur** de f tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Prop. 10 f est un endomorphisme de E.

1. L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Si P est un polynôme annulateur de f et Q un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$, PQ est encore un polynôme annulateur f.

Prop. 11 Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$, $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie vectorielle $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

Deuxième année

Th. 8 Tout endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie** possède un polynôme annulateur **non nul**.

III NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

▸ 1. Image d'un sous-espace vectoriel. Image d'une application linéaire

Th. 9 f est une application linéaire de E dans E'.

L'image par f d'un sous-espace espace vectoriel de E est un sous espace vectoriel de E'.

Prop. 12 **P** f est une application linéaire de E dans E'. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille d'éléments de E.

$$\boxed{f\big(\,\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)\big) = \mathrm{Vect}\,\big(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\big)}.$$

Prop. 13 f est une application linéaire de E dans E'. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\boxed{f(F+G) = f(F) + F(G)}.$$

Déf. 7 **L'image** d'une application linéaire f de E dans E' est $f(E)$. Nous la noterons $\mathrm{Im}\, f$.

$\boxed{\mathrm{Im}\, f = \{f(x); x \in E\}}$ ou $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \{y \in E' \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\}}$.

★ Ces deux formules sont importantes. On n'hésitera pas à choisir la formule la mieux adaptée pour traiter le problème posé. Notons que la première est moins lourde que la seconde.

Th. 10 f est une application linéaire de E dans E'.

1. $\mathrm{Im}\, f$ est un sous espace vectoriel de E'.
2. **P** Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E alors $\big(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)\big)$ engendre $\mathrm{Im}\, f$.
3. **P** $\boxed{\text{Si } (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ est une base de } E : \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big)}$.

▸ 2. Rang d'une application linéaire

Déf. 8 Le **rang d'une application linéaire** de E dans E' est la dimension de l'image de f. On le note $\mathrm{rg}(f)$.

Prop. 14 Soit f une application linéaire de E dans E'.

$$\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{Min}(\dim E, \dim E')}.$$

▶ 3. Image réciproque d'un sous-espace vectoriel. Noyau d'une application linéaire

Prop. 15 f est une application linéaire de E dans E'.

L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de E' est un sous-espace vectoriel de E.

Déf. 9 f est une application linéaire de E dans E'.

L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image $0_{E'}$ par f est le **noyau** de f. On le note $\operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker} f = \{u \in E |\ f(u) = 0_{E'}\} = f^{-1}\big(\{0_{E'}\}\big)$.

Th. 11 Si f est une application linéaire de E dans E', $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

▶ 4. Caractérisation des applications linéaires injectives (resp. surjectives)

Th. 12 f est une application linéaire de E dans E'.

1. f est injective si et seulement si : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si : $\operatorname{Im} f = E'$.

▶ 5. Sous-espace stable par un endomorphisme

Déf. 10 F est un sous-espace vectoriel E et f un endomorphisme de E.

F est **stable par f** si $f(F) \subset F$, c'est à dire si $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

IV APPLICATIONS LINEAIRES BIJECTIVES. ISOMORPHISMES

▶ 1. Réciproque d'une application linéaire bijective

Th. 13 Soit f un isomorphisme de E sur E'.

f^{-1} est un isomorphisme de E' et sur E et $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$.

Th. 14 Soit f un isomorphisme de E sur E' et g un isomorphisme de E' sur E''.

1. $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur E''.
2. $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.

Prop. 16 Soit f un automorphisme de E.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, f^k est un automorphisme de E et $\boxed{(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k}$.

Soit f un automorphisme de E. Ce qui précède permet d'envisager la définition des puissances négatives de f en posant : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N},\ f^k = (f^{-1})^{-k} = (f^{-k})^{-1}}$.

Si r et s sont dans $\mathbb{Z}$ on a encore :

$$\boxed{f^r \circ f^s = f^s \circ f^r = f^{r+s}} \quad \boxed{(f^r)^s = (f^s)^r = f^{rs}} \quad \boxed{(f^r)^{-1} = (f^{-1})^r}.$$

▸ 2. Ensemble des automorphismes de E

Déf. 11 On note $GL_{\mathbb{K}}(E)$ ou $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

$GL(E)$ est appelé **groupe linéaire de** E.

Th. 15 1. Si f et g sont deux éléments de $GL(E)$ alors $g \circ f$ est un élément de $GL(E)$ et $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.

2. Si f est un élément de $GL(E)$ alors f^{-1} est un élément de $GL(E)$ et $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$.

Prop. 17 Soit λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\lambda\ \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E si et seulement si λ n'est pas nul.

2. Si λ n'est pas nul : $\boxed{(\lambda\ \mathrm{Id}_E)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\ \mathrm{Id}_E}$.

▸ 3. Caractérisations des applications linéaires bijectives

Th. 16 f est une application linéaire de E dans E'.

f est bijective si et seulement si : $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f = E'$.

Th. 17 **P** Soit f une application linéaire de E dans E'. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une application (linéaire) g de E' dans E telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_{E'}$.

Th. 18 f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que E n'est pas nul.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de E'.

iii) Toute base de E a pour image par f une base de E'.

★ Notons que les implications intéresantes sont $ii) \Rightarrow i)$ et $i) \Rightarrow iii)$.

▸ 4. Caractérisations des applications linéaires bijectives en dimension finie

Th. 19 **PP** f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que $\boxed{\boxed{\dim E = \dim E' < +\infty}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) f est injective. iii) f est surjective.

Cor. 1 **PP** f est un endomorphisme de E. $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) f est injective. iii) f est surjective.

★★ Il suffit de dire que l'on est en dimension finie pour appliquer ce dernier résultat car f est un endomorphisme de E. Ce n'est évidemment pas le cas dans le résultat qui le précède où l'égalité des dimensions est essentielle.

Cor. 2 **PP** f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que $\boxed{\boxed{\dim E = \dim E' < +\infty}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. iii) $\mathrm{rg}\, f = \dim E = \dim E'$.

Cor. 3 **PP** f est un endomorphisme de E. $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. iii) $\operatorname{rg} f = \dim E$.

★★ Il suffit de dire que l'on est en dimension finie pour appliquer ce dernier résultat car f est un endomorphisme de E. Ce n'est évidemment pas le cas dans le résultat qui le précède où l'égalité des dimensions est essentielle.

Th. 20 **PP** f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que $\boxed{\boxed{\dim E = \dim E' < +\infty}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une application (linéaire) g_1 de E' dans E telle que : $g_1 \circ f = Id_E$.

iii) Il existe une application (linéaire) g_2 de E' dans E telle que : $f \circ g_2 = Id_{E'}$.

★ Notons que si l'on a ii) (resp. iii)) f est bijective et $f^{-1} = g_1$ (resp. $f^{-1} = g_2$)).

★ Notons que que ce résultat est grossièrement faux sans l'hypothèse $\dim E = \dim E' < +\infty$.

Cor. **PP** f est un endomorphisme de E. $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une application (linéaire) g_1 de E dans E telle que : $g_1 \circ f = Id_E$.

iii) Il existe une application (linéaire) g_2 de E dans E telle que : $f \circ g_2 = Id_E$.

★ Notons que si l'on a ii) (resp. iii)) f est bijective et $f^{-1} = g_1$ (resp. $f^{-1} = g_2$)).

★ Notons que que ce résultat est grossièrement faux sans l'hypothèse $\dim E < +\infty$.

► 5. Espaces vectoriels isomorphes

Déf. 12 Deux espaces vectoriels sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme (d'espace vectoriel) de l'un vers l'autre.

Th. 21 **P** Deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

Th. 22 Deux espaces vectoriels qui ont même dimension sont isomorphes.

Prop. 18 **P** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

► 6. Polynôme annulateur et inversion

Prop. 19 P **Polynôme annulateur et inversibilité.**

f est un endomorphisme de E et $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de f.

Ainsi $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si $P(0) = a_0$ n'est pas nul, f est un automorphisme de E et $f^{-1} = -\sum_{k=1}^{r} \left(\dfrac{a_k}{a_0}\right) f^{k-1}$.

V THÉORÈME DU RANG

Th. 23 **SD** Soit f une application linéaire de E dans E'.

Tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.

Th. 24 Soit f une application linéaire de E dans E'.

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E} \quad \text{ou} \quad \boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = \dim E}.$$

VI DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Th. 25 On suppose E non nul. Une application linéaire de E dans E' est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

Plus précisément si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille quelconque d'éléments de E', il existe une application linéaire f de E dans E' et une seule telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = v_i.$$

Prop. 20 **P** On suppose E non nulle. Deux applications linéaires de E dans E' sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.

VII PROJECTIONS ET PROJECTEURS

▶ 1. Définition

Déf. 13 F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La **projection sur F parallèlement à G** est l'application p de E dans E qui a tout élément w de E s'écrivant (de manière unique) $w = u + v$ avec u dans F et v dans G, associe le vecteur u.

On parle encore de projection de base F et de direction G.

▶ 2. Propriétés

Th. 26 F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. p est la projection sur F parallèlement à G.

1. p est un endomorphisme de E.
2. $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$.
3. $F = \{u \in E |\ p(u) = u\} = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$.
4. $p \circ p = p$.
5. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p.

Prop. 21 F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. p est la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

$$\boxed{p + q = Id_E} \quad \text{et} \quad \boxed{p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$$

▶ 3. Caractérisation

Th. 27 Soit p une application de E dans E.

p est une projection si et seulement si p est linéaire et $p \circ p = p$.

Déf. 14 On appelle **projecteur de E** tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Th. 28 1. Une projection est un projecteur.

2. **P** Réciproquement si p est un projecteur de E, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Th. 29 et **déf. 15** F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Les projecteurs de E associés aux deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G sont la projection p sur F parallèlement à G et la projection q sur G parallèlement à F.

Rappelons que : $\boxed{p + q = \mathrm{Id}_E}$ et $\boxed{p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

Résultat donné uniquement pour faire plaisir au programme.

VIII SYMÉTRIES

★ Si je ne m'abuse le programme 2013 de première année ne mentionne pas la notion de symétrie vectorielle. Et pourtant dans le programme de seconde année on parle de symétrie au niveau du I 2- b)...

▶ 1. Définition

Déf. 16 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. La **symétrie par rapport à F parallèlement à G** est l'application s de E dans E qui a tout élément w de E s'écrivant (de manière unique) $w = u + v$ avec u dans F et v dans G, associe le vecteur $u - v$.

On parle encore de symétrie de base F et de direction G.

▶ 2. Propriétés

Th. 30 F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E. s est la symétrie sur F parallèlement à G.

1. s est un automorphisme involutif de E ; autrement dit s est une application linéaire bijective de E dans E telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

2. $s^{-1} = s$.

3. $F = \{u \in E |\ s(u) = u\} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \{u \in E |\ s(u) = -u\} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

4. $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

5. $s = 2\,p - \mathrm{Id}_E$ où p est la projection sur F parallèlement à G.

▶ 3. Caractérisation

Th. 31 1. Toute symétrie s de E est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

2. Réciproquement si s est un **endomorphisme** de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ alors s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

IX SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une application est un endomorphisme.
- Utiliser les propriétés des opérations sur les applications linéaires.
- Travailler sur des polynômes d'endomorphismes.
- Trouver l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Trouver le rang d'une application linéaire.
- Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.
- Déterminer la réciproque d'une application linéaire bijective.
- Montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes.
- Construire un isomorphisme pour trouver la dimension d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une application linéaire est une projection (resp. symétrie) et trouver ses éléments.
- Définir analytiquement une projection ou une symétrie.

X COMPLÉMENTS

▶ 1. L'application linéaire nulle

Prop. 22 **P** f est une application (linéaire) de E dans E'.

f n'est pas l'application linéaire nulle si et seulement si il existe un élément x dans E tel que $f(x) \neq 0_{E'}$.

Prop. 23 f est une application linéaire de E dans E'.

f est l'application linéaire nulle si et seulement si $\text{Im}\, f = \{0_{E'}\}$.

f est l'application linéaire nulle si et seulement si $\text{Ker}\, f = E$.

▶ 2. Composée

Prop. 24 f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{Min}(\text{rg}\, f, \text{rg}\, g).$$

Prop. 25 **P** **SD** f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\boxed{\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}(g \circ f)} \text{ et } \boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}\, g}.$$

Prop. 26 **P** **SD** f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,E'')} \text{ équivaut à } \text{Im}\, f \subset \text{Ker}\, g}.$$

▶ 3. Encore une caractérisation des applications linéaires injectives (resp. surjectives)

Prop. 27 **SD** Soit f une application linéaire de E dans E'.

Si f est injective, f transforme tout sous-espace vectoriel de E en un sous-espace vectoriel de E' de même dimension (et réciproquement...).

Si f est injective, f transforme toute famille libre de E en une famille libre de E' (et réciproquement...).

Prop. 28 Soit f une application linéaire de E dans E'.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est surjective.

ii) Il existe une famille génératrice de E dont l'image par f est une famille génératrice de E'.

iii) Toute famille génératrice de E a pour image par f une famille génératrice de E'.

▶ 4. Homothéties vectorielles again

Déf. 17 Une application (linéaire) h de E dans E est **une homothétie vectorielle de E** s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $h = \lambda\, \text{Id}_E$.

Prop. 29 L'ensemble des homothéties vectorielles de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 1.

Prop. 30 Si E est de dimension 1, les applications linéaires de E dans E sont les homothéties vectorielles de E.

Prop. 31 Soit f une application linéaire de E dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est une homothétie vectorielle.

ii) f laisse stable toutes les droites vectorielles de E.

iii) Pour tout élément u de E, la famille $(u, f(u))$ est liée.

Prop. 32 L'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E est l'ensemble des homothéties vectorielles de E.

Autrement dit le centre de $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E

Prop. 33 L'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les automorphismes de E est l'ensemble des homothéties vectorielles de E.

Autrement dit le centre de $GL(E)$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E

▶ 5. Forme linéaire non nulle et hyperplan

Prop. 34 f est une forme linéaire sur E (autrement dit une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Si f n'est pas la forme linéaire nulle alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$, $\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est un hyperplan et } \operatorname{rg} f = 1}$.

Prop. 35 Soit H un sous-espace vectoriel de E.

H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Prop. 36 f et g sont deux formes linéaires non nulles sur E.

(f, g) est une famille liée de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

▶ 6. Détermination d'une application linéaire again

Th. 32 F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Une application linéaire de E dans E' est entièrement déterminée par sa donnée sur F et sur G.

Plus précisément si f est une application linéaire de F dans E' et g est une application linéaire de G dans E', il existe une application linéaire h de E dans E' et une seule telle que :

$$\forall x \in F,\ h(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ h(x) = g(x).$$

Prop. 37 **P** F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Deux applications linéaires de E dans E' sont égales si et seulement si elles coïncident sur F et G.

Une application linéaire de E dans E' est nulle si et seulement si elle est nulle sur F et sur G.

▶ 7. Endomorphisme nilpotent

Déf. 18 Soit f un endomorphisme de E.

1. f est **nilpotent** s'il existe un élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Si f est nilpotent, **l'indice de nilpotence** de f est le plus petit élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Prop. 38 Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose la dimension de E non nulle et on note p l'indice de nilpotence de f.

1. $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ f^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. X^p est un polynôme annulateur non nul de f (c'est même son polynôme minimal...).

3. $\boxed{\textbf{SD}}$ Si a est un élément de E tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$, $\big(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\big)$ est une famille libre de E.

4. $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Prop. 39 Soient f et g deux endomorphismes nilpotents de E $\boxed{\textbf{qui commutent}}$.

$f+g$ et $f \circ g$ sont des endomorphismes nilpotents de E.

Prop. 40 Soit f un endomorphisme nilpotent de E et r un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme de E et $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} f^k$.

▸ 8. Polynôme d'endomorphisme et stabilité

Prop. 41 $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme f de E.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$, F est encore stable par l'endomorphisme $Q(f)$.

Prop. 42 $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ f est un endomorphisme de E. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

$\mathrm{Ker}\, P(f)$ et $\mathrm{Im}\, P(f)$ sont stables par f et par $Q(f)$.

▸ 9. Polynôme minimal

Th. 33 et **déf. 19** f est un endomorphisme de E possédant un polynôme annulateur non nul.

1. Si P est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de f est l'ensemble des multiples de P.
2. Il existe un polynôme unitaire S et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de f soit l'ensemble des multiples de S. S est **le polynôme minimal de f**.

▸ 10. Lemme des noyaux

Th. 34 r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. P_1, P_2, ..., P_r sont r éléments non constants de $\mathbb{K}[X]$.

On suppose que si i et j sont deux élément distincts de $[\![1, p]\!]$, P_i et P_j n'ont pas de zéro commun. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_r)(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_r(f)}.$$

2. r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. λ_1, λ_2, ..., λ_r sont r éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\big((X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)\big)(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_r\, Id_E)}.$$

▸ 11. Noyaux et images itérés

Prop. 43 E est de dimension finie non nulle n et f est un endomorphisme de E.

1. La suite $(\operatorname{Ker} f^k)_{k\geqslant 0}$ est croissante au sens de l'inclusion et la suite $(\operatorname{Im} f^k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante (toujours au sens de l'inclusion).

2. $S = \{k \in \mathbb{N} |\ N_{k+1} = N_k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui possède un plus petit élément p. $p \leqslant n$.

3. $(Kerf^k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement croissante et la suite $(Kerf^k)_{k\geqslant p}$ est constante.

$(\operatorname{Im} f^k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement décroissante et la suite $(\operatorname{Im} f^k)_{k\geqslant p}$ est constante.

4. $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

XI DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ f est une application de E dans E donc f est un endomorphisme de E (oubli de la linéarité).

★ f est une application linéaire de E dans E'. Écrire $\operatorname{Ker} f = 0_E$.

★ f est une application linéaire donc $f(x) = 0$ donne $x = 0$.

★ f et g sont deux endomorphismes de E.

• Écrire fg à la place de $f \circ g$.

• Si P est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et u un élément de E écrire $P\big(f(u)\big)$ (à la place de $P(f)(u)$).

• Si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ écrire $(PQ)(f) = P(f)\,Q(f)$ (à la place de $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$).

• Si $P = X - a$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ écrire $P(f) = f - a$ (à la place de $P(f) = f - a\ \mathrm{Id}_E$).

• Si $P = a\,X^2 + b\,X + c$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ écrire $P(f) = a\,f^2 + b\,f + c$.

Même chose lorsque P est un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

• $f^3 - 4\,f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donne $f(f^2 - 4\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou $f(f^2 - 4) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

• Si $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - a_k)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ écrire $P(f) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(f - a_k Id_E)$.

• Si $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - a_k)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et si u appartient à E écrire $P(f)(u) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}\big(f(u) - a_k\,u\big)$.

• u est dans E, p est dans $\mathbb{N}$ et α dans $\mathbb{K}$. Écrire des $(f - \alpha\ \mathrm{Id}_E)^p(u) = (f(u) - \alpha u)^p$.

• p est dans $\mathbb{N}$ et α dans $\mathbb{K}$. Écrire des $(f - \alpha\ \mathrm{Id}_E)^p \circ f = (f^2 - \alpha\,f)^p$.

★ f est une application linéaire injective donc bijective car on est en dimension finie (ok ? ?).

★ $f \in \mathcal{L}(E)$ et f injective (resp. f surjective) donne f bijective sans dire que $\dim E < +\infty$.

★ Si f et g sont applications linéaires de E dans E', $(f + g)(E) = f(E) + g(E)$.

On a $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ mais pas nécessairement l'égalité.

★ f, g et h sont trois endomorphismes de E. u est dans E et λ dans $\mathbb{K}$.

$(f \circ g)(u) = \lambda\,u$ donc en composant pas h on obtient $(f \circ g \circ h)(u) = \lambda\,h(u)$! !

★ Utiliser la formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$ sans vérifier l'hypothèse de commutativité.

★ $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\forall u \in E,\ f(u) \neq 0_E$! ! (au lieu de $\exists u \in E,\ f(u) \neq 0_E$)

★ f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

Écrire $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donne $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donne $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. $u \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, écrire $\Phi\big(f(u)\big)$ à la place de $\Phi(f)(u)$.

★ f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

$f \circ g = \mathrm{Id}_E$ (resp. $g \circ f = \mathrm{Id}_E$) donne f bijective et $f^{-1} = g$ sans dire que $\dim E < +\infty$.