INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

VII COMPLÉMENTS

1. Comparaison avec des fonctions qui définissent des intégrales de Riemann ("Pilotage Riemannien")

2. Les intégrales de Bertrand

3. Dérivation

4. L'intégrale de Dirichlet

VIII ENCORE QUELQUES CONSEILS

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des intégrales généralisées, souvent oubliés...

★ et (★) mentionnent des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans la suite les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle.

L'écriture $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ signifie que a est un réel et que b est soit un réel strictement plus grand que a soit $+\infty$. Le lecteur n'aura alors pas de mal pour comprendre les écritures $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

I PREMIERS ÉLÉMENTS

▶ 1. Définitions

Déf. 1 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

On dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** ou est **convergente** si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie L (à gauche) en b. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut alors L.

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

Déf. 2 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et f est une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]a, b]$.

On dit que l'intégrale **généralisée** (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** ou est **convergente** si la fonction $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie L (à droite) en a. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut alors L.

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

Déf. 3 $-\infty \leqslant a < b \leqslant -\infty$. f est une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$.

On dit que l'intégrale **généralisée** (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** ou est **convergente** s'il existe un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut alors : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (et elle ne dépend pas de c...).

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

★ **P** Notons bien que, dans la situation précédente, **si l'une** des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

★★ $0 < a \leqslant +\infty$. Si f est continue sur $]-a, a[$, $x \to \displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ peut avoir une limite finie quand x tend vers a (à gauche) sans que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente (penser aux fonctions impaires).

Déf. 4 Plus généralement encore.

$-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \leqslant +\infty$. f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le cas contraire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

★ **P** Ici encore la divergence de l'une des intégrales $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ entraine la divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Une convention Dans l'une des situations précédentes, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par convention nous dirons que $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$; de même nous dirons que $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_b^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

▶ 2. Les faux problèmes. Une condition suffisante.

Th. 1 Ici a et b sont **deux réels.** f est une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie à gauche en b (autrement dit si f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$) :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t$ où $\overline{f}$ est le prolongement par continuité de f à $[a, b]$.

Th. 2 Ici a et b sont **deux réels.** f est une application continue de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie à droite en a (autrement dit si f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$) :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t$ où $\overline{f}$ est le prolongement par continuité de f à $[a, b]$.

▶ 3. Pour chasser les fausses idées

Remarque ★★★ a et b sont **deux réels.** f est une application continue de $]a, b]$ (resp. $[a, b[$) dans $\mathbb{R}$.

L'existence d'une limite finie à droite en a (resp. à gauche en b) pour f n'est pas une condition nécessaire à l'existence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge sans que $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ n'ait de limite finie en 0.

Remarque ★★★ Si f est continue sur $[a, +\infty[$ l'existence d'une limite finie (même nulle) en $+\infty$ n'est ni nécessaire ni suffisante pour la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge et $t \to \dfrac{1}{t}$ admet pour limite 0 en $+\infty$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos t^2\,\mathrm{d}t$ converge et $t \to \cos t^2$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

En clair il convient de faire très attention dans ce type de problème où les erreurs sont fréquentes et grossières.

II LES PROPRIÉTÉS USUELLES

▶ 1. Relation de Chasles

Th. 3 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$.

c un élément de $[a,b[$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (en clair ces deux intégrales sont de même nature).

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Même type de résultat dans le cas $]a,b]$.

Th. 4 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. f est est une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]a,b[$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

ii) Il existe un réel c_0 appartenant à $]a,b[$ tel que : $\displaystyle\int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

iii) Pour tout élément c de $]a,b[$: $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

En cas de convergence, pour tout élément c de $]a,b[$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 2. De la "linéarité"

Th. 5 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont des applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

α et β sont deux réels.

($\bigstar$) SI $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **ET** $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ALORS $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t$ aussi et :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a un résultat analogue sur $]a,b]$ et sur $]a,b[$.

Remarques • $\bigstar\bigstar$ On est prié d'être extrêmement prudent dans l'utilisation de ce résultat. Il faut absolument noter que l'égalité contenue dans le théorème est nourrie par la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. L'intégrale généralisée n'est pas aussi "linéaire" que l'on veut bien le dire...

• Ce résultat s'étend à une combinaison linéaire de fonctions.

Prop. 1 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont des applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

Considérons les trois intégrales $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si deux sont convergentes la troisième aussi.
- Si l'une est convergente les deux autres sont de même nature.
- Si deux sont divergentes on ne peut rien dire à priori de la troisième.

★ **P** En résumé on ne s'autorisera à scinder une intégrale généralisée en deux qu'après avoir dit (et vérifié) qu'au moins deux intégrales sur trois convergent.

▶ 3. La croissance

Th. 6 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont des applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues.

1. Si f est positive sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2. ★ Si pour tout t dans $[a,b[$, $f(t) \leqslant g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ET $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a des résultats analogues sur $]a,b]$ et sur $]a,b[$.

Remarque ★★ Ici encore la prudence s'impose. Le passage de $\forall t \in [a,b[,\ f(t) \leqslant g(t)$ à $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ne peut se faire qu'après avoir vérifié la convergence des DEUX intégrales.

Or le plus souvent le point de départ est l'inégalité sur les fonctions et la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. C'est alors ici qu'il faut se poser la question de la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ AVANT d'écrire l'inégalité entre les intégrales.

Il ne suffit donc pas pour majorer (resp. minorer) une intégrale généralisée de majorer (resp. minorer) la fonction que l'on intègre.

PP Pour faire des majorations successives d'une intégrale généralisée, il est fortement conseillé de revenir à une intégrale non généralisée, de faire les majorations sur cette intégrale et de passer à la limite en vérifiant la convergence de la dernière intégrale majorante.

▶ 4. Fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle

Th. 7 **SD** $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continue et de signe constant sur $[a,b[$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0, f est nulle sur $[a,b[$.

On a un résultat analogues sur $]a,b]$ et sur $]a,b[$.

▶ 5. Le reste

Th. 8 et **déf. 5** $\boxed{\textbf{SD}}$ $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est le **reste** de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle admet donc 0 pour limite à gauche en b.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

★ $\boxed{\textbf{P}}$ On est prié de savoir démontrer ce résultat. Pour cela écrire $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

▶ 6. Intégrales de Riemann

Th. 9

1. a et α sont deux réels. On suppose que a est strictement positif.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

2. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement négatif.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Th. 10

1. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement positif.

$$\boxed{\int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

2. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement négatif.

$$\boxed{\int_b^{0} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

Th. 11 a, h et α sont trois réels. On suppose que h est strictement positif.

$$\boxed{\int_a^{a+h} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

$$\boxed{\int_{a-h}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

▶ 7. Pratique de l'intégration par parties

★★ Le programme dit même : “on effectuera une intégration par parties sur un segment et on fera un passage à la limite” ; ou peut donc s'arrêter la ! Pour mémoire :

Th. 12 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. u et v sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.

($\bigstar$) On suppose que $\boxed{uv \text{ admet une limite finie à gauche en } b}$.

Alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}[u(x)v(x)] - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t}$$

On a des résultats analogues sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

Remarque $\bigstar\bigstar$ Il est impératif avant de faire une intégration par parties sur une intégrale généralisée convergente de vérifier les hypothèses du théorème d'intégration par parties ; en particulier l'hypothèse de limite.

Sans cette hypothèse, $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ peut être convergente sans que $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ le soit (et réciproquement).

PP Ainsi, comme le programme nous y invite, **nous reviendrons à des des intégrales non généralisées pour faire une intégration par parties plutôt que d'utiliser le résultat précédent.**

PP Il faut savoir utiliser l'intégration par parties pour montrer que deux intégrales sont de même nature.

▶ 8. Changements de variable

Th. 13 **Le résultat du programme** $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

f est une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. φ est une bijection strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Énoncé analogue lorsque φ est décroissante.

Remarque Ce théorème n'a que peu d'intérêt dans la mesure où il ne recouvre pas directement toutes les situations usuelles.

PP **Ne pas faire de changement de variable sur une intégrale généralisée. Toujours revenir à des intégrales non généralisées.**

PP Non seulement il faut être capable d'utiliser un changement de variable pour calculer une intégrale généralisée mais il faut être capable de justifier la convergence d'une intégrale en utilisant un changement de variable.

III LE CAS DES FONCTIONS POSITIVES

★ Les résultats qui suivent concernent certes les fonctions positives mais ils permettent également de traiter le cas de fonctions négatives ; si une fonction est négative son opposée est positive !

★ On ne traitera le plus souvent que la "situation $[a,b[$".

1. Le théorème fondamental

Th. 14 **SD** $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ **positive** (★★) et continue sur $[a,b[$.

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\displaystyle x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\displaystyle\forall x \in [a,b[,\ 0 \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Th. 15 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soit f une application de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ **positive** (★★) et continue sur $]a,b]$.

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\displaystyle x \to \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a,b]$
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\displaystyle\forall x \in]a,b],\ 0 \leqslant \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$

★★ Ces résultats sont capitaux

2. Critère de comparaison 1 : majoration ou minoration

Th. 16 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

On suppose qu'il existe un élément c de $[a,b[$ tel que : $\forall t \in [c,b[,\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ (★★)

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Th. 17 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f et g sont deux applications de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues.

On suppose qu'il existe un réel c tel que : $\forall t \in]a,c],\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ (★★)

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

★★ Le principe des deux théorèmes précédents est **la comparaison des fonctions** pas des intégrales. Il ne faut donc pas les confondre avec le théorème fondamental.

▶ 3. Critère de comparaison 2 : les équivalents

Th. 18 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. Il existe un réel c tel que $\boxed{\text{l'une des deux fonctions soit positive sur } [c, b[}$ ★★
2. $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

▶ 4. Critère de comparaison 3 : la négligeabilité

Th. 19 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ f(t) \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}}\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

▶ 5. Un avertissement

★★★ Il est absolument indispensable de mentionner clairement l'hypothèse de posivité en utilisant ces critères de comparaison. Toute omission à ce niveau rendra nulle votre solution.

▶ 6. La convergence absolue

Déf. 6 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Th. 20 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

ALORS : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (★)

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

Remarque ★★ La réciproque est fausse ; une intégrale peut être convergente sans être absolument convergente ; elle est alors semi-convergente.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et il convient de savoir le démontrer.

Remarque ★★ $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$.

Il importe de se convaincre que l'inégalité $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ne peut être écrite que si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Qu'on se le dise et que l'on se le vérifie.

Remarque **PP** $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f est une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$.

Si f garde un signe constant sur $[a,b[$ ou sur un voisinage de b, $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

▶ 7. Des pratiques plus qu'usuelles

Th. 21 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c,b[,\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc converge.

On a un résultat analogue sur $]a,b]$.

★ On pourra se rappeler qu'au voisinage d'un point $f = \mathrm{o}(g)$ donne $|f| = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{o}(|g|)$ et $|f| = \mathrm{o}(|g|)$...

Th. 22 **PP** a et α sont deux réels et f est une application de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,+\infty[$.

1. On suppose que $\alpha > 1$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$. Alors :

$|f(t)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. On suppose que $\alpha \leqslant 1$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$. Alors :

$\exists c \in [a,+\infty[,\ \forall t \in [c,+\infty[,\ f(t) \geqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant 0$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On a des résultats analogue en $-\infty$.

Th. 23 **PP** b et α sont deux réels et f est une application de $]0,b]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]0,b]$.

1. On suppose que $\alpha < 1$ et que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$. Alors :

$|f(t)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de 0 et $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. On suppose que $\alpha \geqslant 1$ et que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = +\infty$. Alors :

$\exists c \in]0,b],\ \forall t \in]0,c],\ f(t) \geqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant 0$ et $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On a des résultats analogues “sur” $[a,0[$, $]a,b]$ et $[a,b[$.

IV ET ENCORE

▶ 1. Séries et intégrales généralisées

Th. 24 a est un entier et f est une application de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a,+\infty[$.

La série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

P Ce résultat est par exemple utile pour étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$.

▶ 2. La fonction gamma

Th. 25 1. $\Gamma : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ admet pour domaine de définition $]0,+\infty[$.

2. Pour tout réel x strictement positif : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Cor. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!}$

Remarque **PP** Les résultats précédents permettent encore, pour p et q dans $\mathbb{N}$ et α dans $\mathbb{R}^{+*}$, de montrer l'existence et de trouver la valeur de $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t}$ (poser $u = \alpha t$) et $\boxed{\displaystyle\int_0^{1} t^p (\ln t)^q\,\mathrm{d}t}$ (poser $u = -\ln t$).

▶ 3. L'intégrale de Gauss

Th. 26 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{2}$

Cor. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

V SAVOIR FAIRE

- Montrer la convergence d'une intégrale généralisée.
- Calculer des intégrales généralisées simples.
- Majorer, minorer, encadrer une intégrale généralisée.
- Utiliser l'intégration par parties pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée.
- Utiliser un changement de variable pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée.
- Utiliser les intégrales du programme pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée.
- Etudier une fonction définie par une intégrale généralisée.
- Dériver sous le signe somme.

- Permuter une somme infinie et une intégrale généralisée.
- Faire du pilotage riemannien.
- Utiliser des intégrales généralisées pour encadrer (ou trouver un équivalent) des sommes partielles d'une série.
- Utiliser des intégrales généralisées pour encadrer (ou trouver un équivalent) du reste d'une série.
- Pour a non nul et $\alpha > 0$ savoir établir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at+b)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at+b)}{t}\,\mathrm{d}t$.

VI RÉSUMÉ DES FAUTES À NE PAS FAIRE

★ Travailler sur une intégrale généralisée sans avoir parlé de son existence.

★ Utiliser la linéarité sans précaution.

★ Majorer sans précaution ; en particulier oublier de parler de la convergence de l'intégrale majorante.

★ Utiliser les critères de comparaison sans faire aucune mention de signe.

★ Confondre la comparaison des intégrales avec la comparaison des fonctions.

★ Utiliser le théorème d'intégration par parties sans faire la vérification de limite.

★ Faire un changement de variable sur une intégrale dont on n'a pas montré la convergence ou dont on veut montrer la convergence.

★ Parler de (ou étudier) la convergence d'une intégrale non généralisée.

★ Dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou le contraire).

★ Dire que la suite $\left(\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (ici le contraire ets vrai).

★ Dire que $x \to \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

VII COMPLÉMENTS

► 1. Comparaison avec des fonctions qui définissent des intégrales de Riemann ("Pilotage Riemannien")

Th. 27 a et α sont deux réels. f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

1. Si $\alpha > 1$ et si $t \to t^\alpha f(t)$ admet une limite finie en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. Si $\alpha \leqslant 1$ et si $t \to t^\alpha f(t)$ admet une limite non nulle (finie ou infinie) en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On a un résultat analogue sur $]-\infty, b]$.

Remarques Ceci permet par exemple d'obtenir la convergence des intégrales suivantes :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} |t|^\alpha\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\, e^{-at}\,\mathrm{d}t$ $(a>0)$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\, e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ $(a>0)$...

Cela permet encore d'étudier la convergence des intégrales de Bertrand ($\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$)

Th. 28 b est un réel strictement positif. f est une application de $]0,b]$ $(b>0)$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]0,b]$. α est un réel.

1. Si $\alpha<1$ et si $t\to t^\alpha f(t)$ admet une limite finie en 0^+, alors $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. Si $\alpha\geqslant 1$ et si $t\to t^\alpha f(t)$ admet une limite non nulle (finie ou infinie) en 0^+, alors $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Remarque Ceci permet par exemple d'étudier la convergence des intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{1}{t^\alpha(|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

On a des résultats analogues sur $[a,0[$, $]a,b]$ et $[a,b[$ (avec a et b réels).

▸ 2. Les intégrales de Bertrand

Prop. 2 **SD** α et β sont deux réels. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha>1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$)

Prop. 3 **SD** α et β sont deux réels. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha(|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha<1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$)

▸ 3. Dérivation

Th. 29 **SD** 1. f est une application <u>continue</u> de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\varphi : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a,+\infty[$ et, pour tout élément x de $[a,+\infty[: \varphi'(x) = -f(x)$.

2. Plus généralement $-\infty<a<b\leqslant+\infty$. f est une application <u>continue</u> de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\varphi : x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a,b[$ et, pour tout élément x de $[a,b[: \varphi'(x) = -f(x)$.

Remarque **P** Ce résultat s'obtient sans difficulté en écrivant : $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a un résultat analogue sur $]a,b]$ $(-\infty\leqslant a<b<+\infty)$.

▸ 4. L'intégrale de Dirichlet

Prop. 4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$

▸ 5. La fonction Γ

Prop. 5 $\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$

Remarque **P** Ce résultat s'obtient sans difficulté en utilisant $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}$ et le changement de variable $u = \sqrt{2}\,t$.

Prop. 6 La fonction Γ est l'unique application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :

- $\Gamma(1) = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
- $x \to \ln\Gamma(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Prop. 7 La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma^{(r)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^r\, t^{x-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Prop. 8 Pour tout réel strictement positif x on a :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = e^{-\gamma x}\,\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{x/n}}{1+x/n}$$

γ est la constante d'Euler.

Prop. 9 Si x et y sont deux réels strictement positifs :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

► 6. Séries et intégrales généralisées again

Th. 30 a est un élément de $\mathbb{N}$ et f une fonction **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

Pour tout n dans $[\![a, +\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (si la série converge).

1. La suite de terme général $S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Si l'intégrale (ou la série) est divergente : $S_n \sim \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Si l'intégrale (ou la série) est convergente : $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

VIII ENCORE QUELQUES CONSEILS

► La seule manière d'avoir les idées claires sur le sujet est de très bien savoir son cours.

► Etre croyant c'est bien, être pratiquant c'est mieux ! Il faut donc faire beaucoup d'exercices.

► La première étape de l'étude d'une intégrale généralisée est la localisation de tous les problèmes.

► Pour l'étude de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (le problème étant uniquement en b).

▷ Commencer par dire que f est continue sur $[a, b[$.

- Essayer de trouver une fonction g simple et équivalente à f en b, ne serait-ce que pour connaître le "poids" de f en b et pour commencer à se faire une idée de la nature de l'intégrale. Si g garde un signe constant au voisinage de b il ne reste plus qu'à obtenir la nature de $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

  Dans le cas contraire on peut penser à montrer la convergence absolue de $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donnera la convergence absolue donc la convergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Si ce n'est pas le cas il faudra jouer plus fin.

- Si la fonction est positive au voisinage de b on pourra penser à la majorer (resp. minorer) par une fonction d'intégrale convergente (resp. divergente).
- Si la fonction est positive au voisinage de b, penser encore à voir si $x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée ou non (ne pas confondre cette démarche avec la précédente).
- Dans les cas plus difficiles ne pas oublier que l'intégration par parties peut renforcer certaines puissances du dénominateur... (penser à $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$)
- Ces remarques se transposent sans difficulté dans les autres cas.
