SUITES

SUITES

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des suites, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes.

I GÉNÉRALITÉS

▸ 1. Définition, vocabulaire et notation

Déf. 1 Soit X un ensemble non vide. On appelle **suite d'éléments de X** toute application d'une partie non vide I de $\mathbb{N}$ dans X.

Déf. 2 Soit X un ensemble non vide et u une suite d'éléments de X. u est alors une application d'une partie non vide I de $\mathbb{N}$ dans X

- Si n est un élément de I, l'image $u(n)$ de n par u se note encore u_n. On parle de **notation indicielle**.
- La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in I}$ ou $(u_k)_{k\in I}$ ou $(u_i)_{i\in I}$....
- Si n est dans I, u_n est **le terme d'indice n** de la suite. I est **l'ensemble d'indexation** de la suite.
- $\{u_n ; n \in I\}$ est **l'ensemble des valeurs** de la suite.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ d'éléments de X est finie (resp. infinie) si I est fini (resp. infini).

Remarque Dans ce qui suit les suites étudiées seront le plus souvent infinies et auront pour ensemble d'indexation un intervalle infini de $\mathbb{N}$.

Si u est une suite d'éléments de X indexée par l'intervalle infini $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\}$ nous la noterons $(u_n)_{n\in [\![n_0,+\infty [\![}$ ou plus simplement$(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Déf. 3 Nous appellerons **suite réelle** (resp. **complexe**) toute suite d'éléments de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

★ Sauf mention du contraire les suites que nous étudierons seront réelles ou complexes.

★★ Le programme propose simplement l'étude des suites réelles... sauf au niveau des suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ! Mais qui peut le plus peut le moins...

Dans la suite $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

▸ 2. Opérations sur les suites

Déf. 4 I est un intervalle non vide de $\mathbb{N}$. $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I ; autrement dit $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$.

Soient $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ deux éléments de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$.

$(u_n)_{n\in I} + (v_n)_{n\in I}$ est la suite $(u_n + v_n)_{n\in I}$. $\lambda \cdot (u_n)_{n\in I}$ est la suite $(\lambda u_n)_{n\in I}$.

$(u_n)_{n\in I} \times (v_n)_{n\in I}$ est la suite $(u_n v_n)_{n\in I}$.

Th. 1 I est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

1. $\Big(\mathcal{A}(I,\mathbb{K}),+,\cdot\Big)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2. $\times$ est une opération interne sur $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$, associative, commutative et distributive par rapport à $+$.

Prop. 1 I est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ deux éléments de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$.

• $(|u_n|)_{n\in I}$ et $(u_n^p)_{n\in I}$ ($p\in\mathbb{N}$) sont encore des éléments de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$.

• Si pour tout n dans I, $v_n\neq 0$ alors $(u_n/v_n)_{n\in I}$ et $(v_n^p)_{n\in I}$ ($p\in\mathbb{Z}$) sont également des éléments de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$.

Prop. 2 I est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ deux suites de réels indexées par I.

• $\big(\mathrm{Max}(v_n,v_n)\big)_{n\in I}$ et $\big(\mathrm{Min}(v_n,v_n)\big)_{n\in I}$ sont encore deux suites de réels indexées par I.

Prop. 3 I est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

• q est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n\in I}$ est une suite de réels positifs ou nuls indexée par I.

Alors $(u_n^{\frac{1}{q}})_{n\in I}=\big(\sqrt[q]{u_n}\big)_{n\in I}$ est encore une suite de réels positifs indexée par I.

• Soient α un réel et $(u_n)_{n\in I}$ une suite de réels strictement positifs indexée par I.

Alors $(u_n^\alpha)_{n\in I}$ est encore une suite de réels strictement positifs indexée par I.

▶ 3. Quelques propriétés

Déf. 5 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **croissante** si pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$, $u_n\leqslant u_{n+1}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **décroissante** si pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$, $u_{n+1}\leqslant u_n$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque On définit de même les notions de suite réelle **strictement croissante** ou **strictement décroissante** ou **strictement montone**.

Prop. 4 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante si et seulement si : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ n_0\leqslant p\leqslant q\Rightarrow u_p\leqslant u_q$.

Th. 2 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels **strictement positifs** (★).

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante si et seulement si pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$.

Remarque On peut de la même manière caractériser les suites de réels strictement positifs, décroissantes ou strictement croissantes ou strictement décroissantes.

Déf. 6 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **majorée** si la partie $\{u_n\mid n\in[\![n_0,+\infty[\![\}$ de $\mathbb{R}$ est majorée ; autrement dit s'il existe un réel M tel que :

$$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ u_n\leqslant M.$$

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **minorée** si la partie $\{u_n\mid n\in[\![n_0,+\infty[\![\}$ de $\mathbb{R}$ est minorée ; autrement dit s'il existe un réel m tel que :

$$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ u_n\geqslant m.$$

Déf. 7 Une suite de réels est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Th. 3 **P** Une suite de réels $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\geqslant n_0}$ est majorée.

Déf. 8 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **stationnaire** s'il existe un élément p de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ u_n = u_p$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **périodique** s'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ u_{n+p} = u_n$.

II DE LA CONVERGENCE

▶ 1. Suites convergentes

Déf. 9 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **convergente** s'il existe un élément ℓ de $\mathbb{K}$ tel que :

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon} \qquad \boxed{(1)}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (1) signifie que tout intervalle ouvert centré en ℓ contient les u_n sauf éventuellement un nombre fini ; c'est encore équivalent à dire que tout intervalle ouvert (ou tout ouvert) contenant ℓ contient les u_n sauf éventuellement un nombre fini.

Prop. 5 Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ diverge si **pour tout élément** ℓ de $\mathbb{K}$:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p\ \boxed{\text{et}}\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Th. 4 et **déf. 10** Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente d'éléments de $\mathbb{K}$.

Il existe un élément ℓ de $\mathbb{K}$ et un seul vérifiant (1).

ℓ s'appelle la **limite de la suite** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et se note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On dit alors que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ **converge vers** ℓ ou admet pour limite ℓ ou encore tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.

Th. 5 **P** Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

▶ 2. Suite réelle admettant une limite infinie

Déf. 11 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels.

On dit que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini ou qu'elle admet pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow u_n > A.$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini ou qu'elle admet pour limite $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow u_n < -A.$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers l'infini, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite divergente. Dans ce cas on parle de divergence de première espèce. La divergence de seconde espèce caractérise donc les suites qui n'ont pas de limite.

▸ 3. Convergence des suites géométriques

Th. 6 Soit x un élément de $\mathbb{C}$.

- Si $|x|<1$ la suite $(x^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
- Si $x=1$ la suite $(x^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.
- Si $|x|=1$ et $x\neq 1$ la suite $(x^n)_{n\geqslant 0}$ diverge.
- Si $|x|>1$ la suite $(x^n)_{n\geqslant 0}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty}|x|^n=+\infty$.
- Si x est un réel strictement supérieur à 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n=+\infty$.

III DES POSSIBILITÉS D'OBTENIR DE LA CONVERGENCE OU DES LIMITES

▸ 1. Opérations sur les suites ayant une limite

Th. 7 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

- $(|u_n|)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $|\ell|$.
- $(u_n+v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\ell+\ell'$.
- $(\lambda u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\lambda\ell$ (λ est un élément de $\mathbb{K}$).
- $(u_n\,v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\ell\,\ell'$.
- $(u_n^p)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ℓ^p (p est dans $\mathbb{N}^*$).

★ La réciproque du premier point est fausse.

Mais notons que : **PP** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers zéro si et seulement si $(|u_n|)_{n\geqslant n_0}$ converge vers zéro.

Th. 8 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

On suppose que $\boxed{\ell'\neq 0}$.

$\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{\ell'}\cdot$ $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}\cdot$ (v_n^p) converge vers ℓ'^p (p est dans $\mathbb{Z}$).

Remarque Nous pouvons étendre une partie de ces résultats à des suites réelles ayant des limites quelconques.

Dans les tableaux qui suivent $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\lim_{n\to+\infty} (u_nv_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\ell'$
$+\infty$	$\ell'>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$\ell'=0$		F.I.
	$\ell'<0$		$-\infty$
$-\infty$	$\ell'>0$	$-\infty$	$-\infty$
	$\ell'=0$		F.I.
	$\ell'<0$		$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n}$
$\ell'\neq 0$	$\frac{1}{\ell'}$
$+\infty$	0^+
$-\infty$	0^-
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

Remarque F.I. signifie (improprement ?) forme indéterminée. Dans ces cas la conclusion n'est pas immédiate. Un étude plus poussée s'impose alors. Les formes indéterminées principales sont :

$$\boxed{+\infty-\infty}\quad \boxed{0\times\infty}\quad \boxed{\frac{0}{0}}\quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}\quad \boxed{\boxed{\mathbf{1}^\infty}}$$

★★ A propos de $\boxed{\boxed{\mathbf{1}^\infty}}$. Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite qui converge vers 1 et si $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite qui tend vers l'infini on est prié de ne pas écrire que $(u_n^{v_n})$ converge vers 1.

Pour s'en convaincre on retiendra, par exemple que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}\qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}}\qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^\lambda}$$

Prop. 6 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels positifs (au moins à partir d'un certain rang) qui converge vers ℓ.

Alors pour tout q dans $\mathbb{N}^*$, $\left(\sqrt[q]{u_n}\right)$ converge vers $\left(\sqrt[q]{\ell}\right)$.

Prop. 7 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels qui converge vers un réel ℓ strictement positif.

Alors pour tout α dans $\mathbb{R}$, (u_n^α) converge vers (ℓ^α).

▶ 2. Théorème d'encadrement

Th. 9 **PP** **SD** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ sont trois suites de réels telles que :

- $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ convergent et ont même limite ℓ.
- Il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

Alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge et a pour limite ℓ (★).

★★ Ce théorème ne consiste pas en un simple passage à la limite sur des inégalités. Il donne deux choses : la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et sa limite.

Il faut éviter les séquences : “les hypothèses donnent $\lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ...”

Cor. **PP** ℓ est un élément de $\mathbb{K}$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels tels que :

- $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.
- Il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ |u_n-\ell| \leqslant v_n$.

Alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ℓ.

Th. 10 **PP** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

On suppose qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

▸ 3. Suite et ordre

Th. 11 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. A est un réel.

S'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n \geqslant A$, alors $\ell \geqslant A$.

S'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n \leqslant A$, alors $\ell \leqslant A$.

S'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

★★ Ce théorème ne vaut plus si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

On retiendra que les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Th. 12 **P** **SD** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. A est un réel.

Si $\ell > A$, il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n > A$.

Si $\ell < A$, il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n < A$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ u_n < v_n$.

★ Ce théorème ne vaut plus si l'on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.

Cor. **P** **SD** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels qui converge vers ℓ.

• Si $\ell \neq 0$, à partir d'un certain rang $u_n \neq 0$; mieux à partir d'un certain rang $|u_n|$ est minoré(e) par une constante strictement positive ($|\ell|/2$ par exemple).

Autrement dit : $\exists m \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists q \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ m \leqslant |u_n|$.

• Si $\ell > 0$, à partir d'un certain rang $u_n > 0$; mieux à partir d'un certain rang u_n est minoré(e) par une constante strictement positive ($\ell/2$ par exemple).

• Si $\ell < 0$, à partir d'un certain rang $u_n < 0$; mieux à partir d'un certain rang u_n est majoré(e) par une constante strictement négative ($-\ell/2$ par exemple).

PP Les définitions de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ sont essentielles pour obtenir une majoration, une minoration ou un encadrement de la suite concernée. Qu'on se le dise.

▶ 4. Suites adjacentes (pour être conforme au programme nous mettrons ce résultat avant le théorème de la limite monotone, mais...)

Déf. 12 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels. $\Big((u_n)_{n\geqslant n_0},(v_n)_{n\geqslant n_0}\Big)$ est un **couple de suites adjacentes** si :

- $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante ;
- $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante ;
- $(u_n-v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Th. 13 $\Big((u_n)_{n\geqslant n_0},(v_n)_{n\geqslant n_0}\Big)$ est un couple de suites réelles adjacentes.

- $\boxed{(u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant n_0} \text{ convergent et ont même limite}}$.
- Si ℓ est cette limite, pour tout couple (p,q) d'éléments de $[\![n_0,+\infty[\![$ on a : $u_p\leqslant \ell\leqslant v_q$.
- $\boxed{\textbf{P}}$ En particulier : $0\leqslant \ell-u_n\leqslant v_n-u_n$ et $0\leqslant v_n-\ell\leqslant v_n-u_n$.

★ Le troisième point fournit un bon test d'arrêt dans le calcul d'une valeur approchée de ℓ.

▶ 5. Théorème de la limite monotone

Th. 14 $\boxed{\textbf{PP}}$ Toute suite de réels, $\boxed{\textbf{croissante et majorée}}$ est convergente donc admet une limite finie.

★ Une suite de réels, croissante et majorée, converge vers la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs.

Th. 15 $\boxed{\textbf{PP}}$ Toute suite de réels, $\boxed{\textbf{décroissante et minorée}}$ est convergente donc admet une limite finie.

★ Une suite de réels, décroissante et minorée, converge vers la borne inférieure de l'ensemble de ses valeurs.

Th. 16 $\boxed{\textbf{PP}}$ Toute suite de réels, $\boxed{\textbf{croissante et non majorée}}$ admet pour limite $+\infty$.

Th. 17 $\boxed{\textbf{PP}}$ Toute suite de réels, $\boxed{\textbf{décroissante et non minorée}}$ admet pour limite $-\infty$.

Th. 18 $\boxed{\textbf{P}}$ Toute suite monotone de réels admet une limite (finie ou infinie).

▶ 6. Limite de suites et limite de fonctions

Th. 19 f est une fonction numérique de la variable réelle admettant pour limite ℓ ($\ell\in\overline{\mathbb{R}}$) en a ($a\in\overline{\mathbb{R}}$).

Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments du domaine de définition de f qui admet pour limite a, $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant n_0}$ est une suite qui admet pour limite ℓ.

$\boxed{\textbf{PP}}$ Pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite en a $(-\infty\leqslant a\leqslant+\infty)$, il suffit de trouver deux suites $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$, d'éléments du domaine de f, qui tendent vers a et telles que les suites $\big(f(b_n)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(f(c_n)\big)_{n\geqslant 0}$ n'aient pas la même limite.

Exemple 1 $a=+\infty$, $f:x\to\cos x$, $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=2\,n\,\pi$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\dfrac{\pi}{2}+2\,n\,\pi$.

Exemple 2 $a=0$, $f:x\to\sin\dfrac{1}{x}$, $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\dfrac{2}{(4n+1)\,\pi}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\dfrac{1}{(n+1)\,\pi}$.

Cor. 1 f est une fonction numérique de la variable réelle continue en a.

Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments du domaine de définition de f qui converge vers a, $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant n_0}$ est une suite qui converge vers $f(a)$.

Ces deux résultats admettent des réciproques.

Cor. 2 I est un intervalle de $\mathbb{R}$, f est une application de I dans I et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels telle que $u_{n_0} \in I$ et $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un élément ℓ de I et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ donc ℓ est un **point fixe** de f.

▶ 7. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Th. 20 et **déf. 13** **SD** Tout réel est limite d'une suite de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Par exemple si x est un réel, $\left(\dfrac{\mathrm{Ent}(2^n\,x)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels qui converge vers x.

Cor. **SD** Tout intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, contient au moins un rationnel (et même une infinité).

IV SUITE NÉGLIGEABLE DEVANT UNE AUTRE

▶ 1. Définition

Déf. 14 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ s'il existe un élément p de $\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant p}$ de réels tels que :

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ u_n = \varepsilon_n\, v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}$$

Nous écrirons : $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

★ Il faut absolument savoir cette définition en l'état.

▶ 2. Une caractérisation importante

Th. 21 **PP** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

On suppose qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que : $\boxed{\forall n \in [\![q, +\infty[\![,\ v_n \neq 0}$.

$\boxed{\text{Alors } u_n = \mathrm{o}(v_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0}$.

▶ 3. Quelques opérations

Th. 22 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$, $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ sont des suites de réels.

- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et si $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors : $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $u_n = \boxed{\mathrm{o}(w_n)}$ et si $v_n = \boxed{\mathrm{o}(w_n)}$ alors : $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors : $\lambda u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (λ est un réel).
- Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et si $v_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors : $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n t_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors $u_n\, w_n = \mathrm{o}(v_n\, w_n)$.

★★ $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(t_n)$ ne donne pas nécessairement $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n + t_n)$.

Prop. 8 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

$u_n = \mathrm{o}(v_n)$, $u_n = \mathrm{o}(|v_n|)$, $|u_n| = \mathrm{o}(v_n)$ et $|u_n| = \mathrm{o}(|v_n|)$ sont quatre propriétés équivalentes.

▶ 4. Quelques références

Th. 23 **PP** **Négligeabilité et "croissance comparée"** α, β et a son trois réels.

Si $\alpha > 0$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} = +\infty}$ $\boxed{(\ln n)^\beta = \mathrm{o}\left(n^\alpha\right)}$.

Si $|a| > 1$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|a|^n}{n^\alpha} = +\infty}$ $\boxed{n^\alpha = \mathrm{o}\left(a^n\right)}$.

Si $|a| < 1$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\, a^n = 0}$ $\boxed{a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$.

Pour a quelconque : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$ $\boxed{a^n = \mathrm{o}(n!)}$.

Prop. 9

- $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$ si α et β sont deux réels tels que $\alpha < \beta$.
- $\frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ si α et β sont deux réels tels que $\alpha > \beta$.
- $a^n = \mathrm{o}(b^n)$ si a et b sont deux réels tels que $|a| < |b|$.

▶ 5. Du négligeable !

$u_n = \mathrm{o}(1)$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n = \ell + \mathrm{o}(1)$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

▶ 6. Une dernière remarque

P ★ En cas de doute sur une négligeabilité ou sur une opération sur les suites négligeables il est conseillé de revenir à la définition ou à la caratérisation fondamentale.

V SUITES ÉQUIVALENTES

▶ 1. Définition

Déf. 15 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ s'il existe un élément p de $\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant p}$ de réels tels que :

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}.$$

Nous écrirons : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

★ Il faut absolument savoir cette définition en l'état.

▶ 2. Une caractérisation importante

Th. 24 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels. On suppose qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \in [\![q, +\infty[\![,\ v_n \neq 0 \quad (\bigstar)$.

$$\boxed{\text{Alors } u_n \sim v_n \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

▶ 3. Une morale essentielle

Th. 25 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels telles que $u_n \sim v_n$ et ℓ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

PP Ainsi pour trouver la limite d'une suite on peut commencer par chercher une suite plus "simple" qui lui est équivalente et se contenter de trouver la limite de cette dernière suite.

Cor. Deux suites équivalentes sont de même nature.

▸ 4. Une réciproque

Th. 26 **P** Une suite qui admet une limite **finie et non nulle** (★) est équivalente à sa limite.

Cor. Deux suites qui admettent **la même** limite **finie non nulle** sont équivalentes.

▸ 5. Quelques opérations

Th. 27 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ sont des suites de réels.

$u_n \sim u_n$ $\quad$ $u_n \sim v_n$ donne $v_n \sim u_n$ $\quad$ $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ donnent $u_n \sim w_n$.

Remarques • $\sim$ définit une relation d'équivalence sur les suites réelles indexées par $[\![n_0, +\infty[\![$.

• Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels telles que $u_n \sim v_n$ nous dirons désormais que ces deux suites sont équivalentes.

Th. 28 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$, $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ sont des suites de réels.

1. Si $u_n \sim w_n$ et si $v_n \sim t_n$ alors : $u_n\, v_n \sim w_n\, t_n$.
2. Sous de bonnes hypothèses :

   Si $u_n \sim w_n$ et si $v_n \sim t_n$ alors : $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}$. $\quad$ Si $u_n \sim v_n$ alors : $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (α est un réel).
3. Si $u_n \sim v_n$ alors : $|u_n| \sim |v_n|$.
4. **P** Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$.

★★ On ne peut pas, à priori, additionner des équivalents. Par conséquent si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$ rien ne permet de dire que $u_n + w_n \sim v_n + t_n$. Mais rien ne permet de dire le contraire ! Pour trancher on reviendra le plus souvent à la définition.

De même on ne peut pas en général "composer" les équivalents. $u_n \sim v_n$ ne donne pas nécessairement $f(u_n) \sim f(v_n)$ (f étant une fonction numérique...). Ici encore on reviendra le plus souvent à la définition pour confirmer ou infirmer ce que l'on pressent.

▸ 6. Quelques références

Th. 29 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels qui converge vers zéro. α est un réel.

$\ln(1+u_n) \sim u_n$ $\quad$ $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ $\quad$ $\sin u_n \sim u_n$ $\quad$ $1 - \cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ $\quad$ $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Th. 30 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels qui converge vers 1. α est un réel.

$\ln(u_n) \sim u_n - 1$ $\quad$ $(u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\,(u_n - 1)$.

Th. 31 P est un polynôme de terme de plus haut degré $a_p X^p$.

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels qui tend vers l'infini alors $\boxed{P(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p u_n^p}$

Th. 32 Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $\boxed{\mathrm{C}_n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^p}{p!}}$ ou $\boxed{\dbinom{n}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^p}{p!}}$.

Prop. 10 $\boxed{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} \sim \ln n}$

Prop. 11 α est un réel strictement positif et β est un réel. $\boxed{\ln(\alpha n+\beta) \sim \ln n}$

▸ 7. Une dernière remarque

P ★ En cas de doute sur une équivalence ou sur une opération sur les suites équivalentes il est conseillé de revenir à la définition ou à la caratérisation fondamentale.

VI SUITES PARTICULIÈRES

▸ 1. Suites arithmétiques

Déf. 16 r est un élément de $\mathbb{K}$. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **arithmétique de raison r** si :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Prop. 12 Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite arithmétique d'éléments de $\mathbb{K}$ il existe un unique élément r de $\mathbb{K}$ tel que $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_{n+1} = u_n + r$; r est alors LA raison de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Prop. 13 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique d'éléments de $\mathbb{K}$ de raison r.

1. Pour tout élément n dans $[\![n_0, +\infty [\![: u_n = u_{n_0} + (n-n_0)\, r$.
2. Si p et q sont deux éléments de $[\![n_0, +\infty [\![: u_p = u_q + (p-q)\, r$.
3. Si n est un élément de $\mathbb{N}$ strictement supérieur à $n_0 : u_n = \dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$.

Th. 33 Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est arithmétique si et seulement si il existe deux réels a et b tel que :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_n = a\,n + b.$$

★ Une suite arithmétique est entièrement déterminée par son premier terme et sa raison.

Th. 34 **PP** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite arithmétique d'éléments de $\mathbb{K}$ de raison r.

La somme de n termes consécutifs de cette suite, le premier étant α et le dernier β est : $n\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

PP La structure de cette formule est : $\boxed{\textbf{nombre de termes} \times \dfrac{\textbf{premier terme} + \textbf{dernier terme}}{2}}$.

Th. 35 PP $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ $\forall (p,q) \in \mathbb{N},\ p \leqslant q \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=p}^{q} k = (q-p+1)\,\frac{p+q}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$

Prop. 14 $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite arithmétique d'éléments de $\mathbb{K}$ de raison r.

La somme de n termes consécutifs de cette suite, le premier étant α est : $n\alpha + r\,\dfrac{n(n-1)}{2}$.

▶ 2. Suites géométriques

Déf. 17 q est un élément de $\mathbb{K}$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **géométrique de raison q** si :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_{n+1} = q\,u_n$$

Prop. 15 Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite géométrique d'éléments de $\mathbb{K}$ et de premier terme non nul, il existe un unique élément q de $\mathbb{K}$ tel que $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_{n+1} = q\,u_n$; q est alors LA raison de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Prop. 16 Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique d'éléments de $\mathbb{K}$ de raison q non nulle.

1. Pour tout élément n dans $[\![n_0, +\infty [\![: u_n = q^{n-n_0}\,u_{n_0}$.
2. Si p et r sont deux éléments de $[\![n_0, +\infty [\![: u_p = q^{p-r}\,u_r$.
3. Si n est un élément de $\mathbb{N}$ strictement supérieur à $n_0 : u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}$.

★ Une suite géométrique différente de la suite nulle est entièrement déterminée par son premier terme et sa raison.

Th. 36 PP Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique d'éléments de $\mathbb{K}$ de raison q non nulle.

La somme de n termes consécutifs de cette suite, le premier étant α est : $\begin{cases} \alpha\,\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n\,\alpha & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

★★ On est prié de vérifier et d'écrire que q est différent de 1 pour écrire la première formule.

PP Dans le cas où la raison n'est pas 1 la structure de cette formule est

$$\textbf{premier terme} \times \frac{1 - \textbf{raison}^{\textbf{nombre de termes}}}{1 - \textbf{raison}}.$$

▶ 3. Suites arithmético-géométriques

Déf. 18 Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est arithmético-géométrique s'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{K}$ tels que, pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty [\![: u_{n+1} = a\,u_n + b$.

Si $a = 1$ il s'agit d'une suite arithmétique de raison b et si $b = 0$, c'est une suite géométrique de raison a.

Th. 37 a et b sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On suppose $\boxed{a \neq 1}$.

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que, pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty [\![: u_{n+1} = au_n + b$.

Il existe un unique élément de α de $\mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\,\alpha + b$.

La suite $(u_n - \alpha)_{n \geqslant n_0}$ est la suite géométrique de raison a et de premier terme $u_{n_0} - \alpha$.

PP Le résultat précédent donne un moyen très simple de calculer les termes d'une suite arithmético-géométri-que (non arithmétique). On commence par déterminer α tel que $\alpha = a\,\alpha + b$. On soustrait les égalités $u_{n+1} = a\,u_n + b$ et $\alpha = a\,\alpha + b$ pour montrer que $u_n - \alpha$ est géométrique de raison a et c'est fini ou presque.

▶ 4. Suite définie par une récurrence linéaire d'ordre 2

Th. 38 **SD** a et b sont deux éléments de $\mathbb{K}$.

$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$.

1. $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$.

2. Pour tout élément $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ on pose $\varphi((u_n)_{n\geqslant 0}) = (u_0, u_1)$. φ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}^2$.

3. $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.

Th. 39 a et b sont deux éléments de $\mathbb{C}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de complexes telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Δ est le discriminant de l'équation : $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - az - b = 0$.

1. Si Δ n'est pas nul l'équation admet deux solutions z_1 et z_2. $\Big((z_1^n), (z_2^n)\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

2. Si Δ est nul l'équation admet une solution et une seule z_0. $\Big((z_0^n)_{n\geqslant 0}, (nz_0^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

PP Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

Dans le premier cas : $\exists\,!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, z_1^n + \mu\, z_2^n$.

Dans le second cas : $\exists\,!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, z_0^n + \mu\,(n\, z_0^n)$.

Th. 40 a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Δ est le discriminant de l'équation : $\boxed{z \in \mathbb{C}}$ et $z^2 - az - b = 0$.

1. Si Δ est strictement l'équation admet deux solutions réelles r_1 et r_2. $\Big((r_1^n)_{n\geqslant 0}, (r_2^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

2. Si Δ est nul l'équation admet une solution et une seule r. $\Big((r^n)_{n\geqslant 0}, (nr^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

2. Si Δ est strictement négatif l'équation admet deux solutions complexes et conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ $\Big((\rho^n \sin(n\theta))_{n\geqslant 0}, (\rho^n \cos(n\theta))_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

PP Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

Dans le premier cas : $\exists\,!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$.

Dans le second cas : $\exists\,!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r^n + \mu\,(n\, r^n)$.

Dans le troisième cas : $\exists\,!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, \rho^n\, \sin(n\,\theta) + \mu\, \rho^n\, \cos(n\,\theta)$.

VII SAVOIR FAIRE

• Montrer en utilisant la définition et les indications du texte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Utiliser la définition des limites pour obtenir des majorations, des minorations et des encadrements.

• Utiliser correctement le théorème d'encadrement.

• Exploiter toutes les propriétés d'un couple de suites adjacentes.

• Construire une suite en utilisant la dichotomie.

• Trouver une suite simple équivalente à une suite donnée.

• Trouver une suite simple négligeable devant une suite donnée ou l'inverse.

• Travailler avec aisance sur les suites équivalentes (ou négligeables).

• Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en utilisant des suites.

• Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

• Étudier une suite arithmético-géométrique.

• Étudier une suite définie par une récurrence linéaire d'ordre 2.

• Étudier une suite définie par une relation d'équivalence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Calculer u_n à partir de $u_{k+1} - u_k$.

• Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

VIII RÉSUMÉ DE FAUTES À NE PAS FAIRE

★ Confondre la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ avec son terme général u_n. Ecrire u_n est croissante, bornée, convergente, ...

★ Si φ est une application de l'ensemble $\mathcal{A}([\![n_0,+\infty[\![,\mathbb{R})$ des suites réelles indexées par $[\![n_0,+\infty[\![$ dans un ensemble F, écrire $\varphi(u_n)$.

★ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant a$ donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$ donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ ou ...

★★ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1$!! ($1^\infty$ est une forme indéterminée).

★★ $u_n \sim v_n$ donne $u_n^n \sim v_n^n$ ou $u_n \sim \ell$ donne $u_n^n \sim \ell^n$

★ $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ u_n \leqslant v_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée.

★★ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ donne $u_n \sim v_n$.

★★ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ donc $u_n \sim v_n$.

★★ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

★★ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.

★★ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente.

★ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ car $q < 1$.

★ $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est croissante (il faut sans doute signaler qu'elle est à termes strictement positifs).

★ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\, u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n u_0$.

★ $\dfrac{a}{n^{\frac{1}{3}}} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$. En gros retirer les constantes par équivalences.

★ $\forall n \in\ u_{n+1} = 2\, u_n + \dfrac{1}{n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ arithmético-géométrique.

★★ Confondre le théorème d'encadrement avec le théorème “de conservation des inégalités par passage à la limite”.

La mauvaise séquence :

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, la suite (u_n) converge ver ℓ.

La “bonne” séquence :

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$; le théorème d'encadrement montre alors que la suite (u_n) converge ver ℓ.

★ Remplacer une suite par un équivalent ou par sa limite dans une combinaison linéaire de suites.

★★ Faire des sommes d'équivalents.

★★ $u_n \sim v_n$ donne $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

★★ Faire des composées d'équivalents.

★ Ecrire qu'une suite est équivalente à sa limite sans dire ou vérifier que cette limite est finie et non nulle.

IX COMPLÉMENTS

▶ 1. "Du télescopage"

Prop. 17 **PP** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. $\boxed{\forall n \in [\![n_0+1,+\infty[\![,\ u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k).}$

SD **PP** Ceci est le moyen de calculer u_n connaisant $u_{n+1}-u_n$. Il faut également savoir calculer u_n à partir de $u_{n+1}+u_n$ (multiplier par $(-1)^{n+1}$) ou de $u_{n+1}-a\,u_n$ (diviser par a^{n+1}) ou de $(n+1)\,u_{n+1}-u_n$ (diviser par $(n+1)!$) ou de...

P Ce résultat établit un lien fort entre la suite de terme général u_n et la série de terme général $u_{n+1}-u_n$.

▶ 2. Suites extraites

Déf. 19 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une sous-suite (ou une suite exraite) de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite du type $(u_{\varphi(n)})$ ou φ est une application strictement croissante de $[\![n_0,+\infty[\![$ dans $\mathbb{N}$.

Prop. 18 Toute sous-suite d'une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui converge vers ℓ, converge vers ℓ.

Toute sous-suite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ admet pour limite ℓ.

Th. 41 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ℓ, les sous-suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) aussi.

Si les sous-suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent et ont **même limite** ℓ alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ℓ.

★★ (u_{2p}) et (u_{2p+1}) peuvent converger sans avoir la même limite. Dans ce cas $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ diverge.

▶ 3. Formule de stirling

Th. 42 $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n.}$

▶ 4. Convergence d'une suite complexe

Prop. 19 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de complexes.

Pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$, a_n est la partie réelle de u_n et b_n sa partie imaginaire.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge si et seulement si $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ convergent.

En cas de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

▶ 5. Suites d'éléments de $\mathbb{Z}$

Prop. 20 **SD** Toute suite convergente d'éléments de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

▶ 6. Césaro

Prop. 21 **SD** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui converge vers ℓ.

La suite de terme général $\dfrac{u_1+u_2\cdots+u_n}{n}$ converge encore vers ℓ.

Remarques 1. Pour une suite réelle le résultat précédent vaut encore pour des limites infinies.

2. On peut facilement adapter ce résultat pour des suites indexées par $[\![n_0,+\infty[\![$

3. Ce résultat admet quelques raffinements classiques.

▶ 8. Quelques remarques sur les suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$

1. Pour débuter l'étude.
   - ▷ On commence par étudier la fonction f.
   - ▷ On cherche un intervalle I (le plus petit possible et le plus fermé possible...) stable par f, contenant le premier terme u_0 (ou u_{n_0}...) de la suite et sur lequel f est monotone. On montre alors par récurrence que la suite est définie et que ses éléments sont dans I.
   - ▷ On s'intéresse à l'équation $f(x)=x$ (si possible...).

2. Quelques résultats classiques.

On suppose que I est stable par f qu'il contient le premier terme u_0 de la suite.

- ▶ Si f est croissante sur I, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone. Croissante si $u_0\leqslant u_1$ et décroissante dans le cas contraire.
- ▶ Soit a un élément de I tel que : $f(a)=a$. Si $a\geqslant u_0$, a est un majorant de la suite ; dans le cas contraire a est un minorant de la suite.
- ▶ Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors : $f(\ell)=\ell$.
- ▶ On suppose f décroissante sur I. $f\circ f$ est alors croissante sur I.

  Les suites $(u_{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ sont monotones de sens contraire.

  Si $u_0\leqslant u_2$, $(u_{2p})_{p\geqslant 0}$ est croissante et $(u_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ décroissante. Si $u_0\geqslant u_2$, c'est le contraire.

  Si $(u_{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors : $(f\circ f)(\ell)=\ell$, $(f\circ f)(\ell')=\ell'$, $f(\ell)=\ell'$ et $f(\ell')=\ell$.

  Si $\ell=\ell'$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell=\ell'$.
- ▶ Si pour tout x dans I $f(x)\geqslant x$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

  Si pour tout x dans I $f(x)\leqslant x$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

  Il pourra donc être intéressant d'étudier le signe de $f(x)-x$.
- ▶ On suppose qu'il existe un réel M strictement positif tel que : $\forall(x,y)\in I^2$ $|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|$. Alors :
  - Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+2}-u_{n+1}|\leqslant M|u_{n+1}-u_n|$.
  - Si a est un élément de I tel que $f(a)=a$:
    - · Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-a|\leqslant M|u_n-a|$.
    - · Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $|u_n-a|\leqslant M^n|u_0-a|$.
    - · Si $M<1$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge ver a.

  L'existence du M est assurée si f est dérivable sur I à dérivée bornée sur I (inégalité des accroissements finis).

  Notons encore que la valeur de f' en a joue un rôle très important. Si $|f'(a)|<1$ tout va bien ; si $|f'(a)|>1$ peu d'espoir ; si $|f'(a)|=1$... il faut voir.

3. Pour conclure souvenons-nous que les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ sont (le plus souvent) au service de l'équation $f(x) = x$ (elle même au service d'une équation $g(x) = 0$) et non le contraire.
