CALCUL DIFFERENTIEL

CALCUL DIFFÉRENTIEL

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique du calcul différentiel, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

Dans la suite les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle. I et J sont le plus souvent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

Conformément au programme nous donnerons des énoncés pour des “fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$”. Clairement beaucoup de résultats s'étendent à des fonctions dont le domaine de définition est une réunion finie (ou infinie et non pathologique) d'intervalles.

I GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définition

Déf. 1 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I.

f est dérivable en a si $x \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite $\boxed{\text{finie}}$ en a ou si $h \to \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Si f est dérivable en a, on note $\mathbf{f'(a)}$ cette limite finie et on l'appelle **le nombre dérivé de f en a.**

Déf. 2 f est un application de I dans $\mathbb{R}$. La **fonction dérivée** de f est la fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui à un élément x de I, où f est dérivable, associe $f'(x)$. On la note f'.

▶ 2. Développement limité d'ordre 1 et dérivation

Th. 1 et **déf. 3** f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est dérivable en a.

ii) Il existe un réel ℓ tel que : $f(x) = f(a) + \ell\,(x-a) + o(x-a)$ au voisinage de a.

Si l'une des assertions est vérifiée, ℓ est unique et vaut $f'(a)$.

• L'assertion ii) signifie que **f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a**

• Si f est dérivable en a, la fonction $x \to f'(a)\,(x-a) + f(a)$ est **la fonction affine tangente à f en a**.

▶ 3. Fonction dérivable à droite (resp. à gauche)

Déf. 4 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I qui n'en est pas le plus grand élément.

f est dérivable à droite en a si la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ est dérivable en a. Le nombre dérivé en a de cette restriction est alors **le nombre dérivé à droite de f en a** ; on le note $f'_{\mathrm{d}}(a)$.

Th. 2 Sous les hypothèses de la définition précédente, f est dérivable à droite en a si et seulement si $x \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite en a. Dans ce cas $f'_{\mathrm{d}}(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Déf. 5 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I qui n'en est pas le plus petit élément.

f est dérivable à gauche en a si la restriction de f à $I\cap]-\infty, a]$ est dérivable en a. Le nombre dérivé en a de cette restriction est alors **le nombre dérivé à gauche de f en a** ; on le note $f'_{\mathrm{g}}(a)$.

Th. 3 Sous les hypothèses de la définition précédente, f est dérivable à gauche en a si et seulement si $x \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche en a. Dans ce cas $f'_{\mathrm{d}}(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot$

Th. 4 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I qui n'en est ni le plus petit élément ni le plus grand.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est dérivable en a.

ii) f est dérivable à droite et à gauche en a, $\boxed{\text{et}}$ $f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$.

Si l'une des assertions est vérifiée f est dérivable en a et : $f'(a) = f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$.

★★ f peut être dérivable à droite et à gauche en a sans être dérivable en a.

$x \to |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0 sans être dérivable en ce point. Le nombre dérivé à droite (resp. à gauche) en 0 est 1 (resp. -1) ;

▸ 4. Dérivabilité SUR un intervalle

Déf. 6 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et J est un intervalle contenu dans I.

f est dérivable $\boxed{\textbf{sur}}$ J si $\boxed{\text{la restriction}}$ de f à J est dérivable en tout point de J.

★★ Dire que f est dérivable sur J ne signifie pas que f est dérivable en tout point de J.

Prop. 1 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et J est un intervalle contenu dans I.

f est dérivable sur J si et seulement si :

- f est dérivable en tout point intérieur à J,
- f est dérivable à droite en le plus petit élément de J s'il existe.
- f est dérivable à gauche en le plus grand élément de J s'il existe.

Prop. 2 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et J est un intervalle contenu dans I.

Si J est un intervalle $\boxed{\text{ouvert}}$, dire que f est dérivable sur J est équivalent à dire que f est dérivable en tout point de J.

★ Si f est une $\boxed{\text{application}}$ de I dans $\mathbb{R}$, dire que f est dérivable sur I est équivalent à dire que f est dérivable en tout point de I !

★ Ces considérations ne sont pas une simple vue de l'esprit. Elles interviennent de manière importante au niveau de variables aléatoires à densité. Le tout est donc à bien comprendre.

Une illustration Considérons la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ -x^2-2x+4 & \text{si } x \in]-\infty,1[\end{cases}$

On voit trop souvent le raisonnement suivant. $\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x) = 2x-1$ donc :

1. f est dérivable sur $[1,+\infty[$
2. $\forall x \in [1,+\infty[,\ f'(x) = 2$

Le premier point est juste le second faux. La première assertion indique que f est dérivable à droite en 1 mais n'autorise pas à écrire $f'(1)$, f n'étant pas nécessairement dérivable en 1 (on peut seulement écrire que $f'_{\mathrm{d}}(1) = 2$).

Notons qu'ici f est dérivable à droite et à gauche en 1 mais n'est pas dérivable en 1 car $f'_{\mathrm{d}}(1) = 2 \neq -4 = f'_{\mathrm{g}}(1)$.

▶ 5. Dérivabilité et continuité

Th. 5 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I.

Si f est dérivable en a, f est continue en a. La réciproque est fausse.

Sous de bonnes hypothèses, si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, f est continue à droite (resp. à gauche) en a.

★ 1. $x \to |x|$ et $x \to \sqrt{x}$ sont continues en 0 sans y être dérivables.

Même chose pour f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

▶ 6. Interprétation géométrique du nombre dérivé

P f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a est un élément de I. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si f est dérivable en un point a de I, $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de cette tangente dans le repère $\mathcal{R}$ est alors :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en un point a de I, $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une demi-tangente à droite (resp. à gauche) de coefficient directeur $f'_{\mathrm{d}}(a)$ (resp. $f'_{\mathrm{g}}(a)$).

Notons encore que si f est continue en a et si $x \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en a (resp. à droite ou à gauche en a), $\mathcal{C}_f$ admet une tangente (resp. demi-tangente) “verticale” au point d'abscisse a.

II CALCULS SUR LES DÉRIVÉES

▶ 1. Dérivées des fonctions usuelles

	D	f	f'
$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \to x^n$	$x \to nx^{n-1}$
$n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to x^n$	$x \to nx^{n-1}$
	$\mathbb{R}^*$	$x \to \dfrac{1}{x}$	$x \to -\dfrac{1}{x^2}$
$n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{x^n}$	$x \to -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \sqrt{x}$	$x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \ln x$	$x \to \dfrac{1}{x}$
	$\mathbb{R}$	$x \to e^x$	$x \to e^x$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to x^\alpha$	$x \to \alpha x^{\alpha-1}$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$x \to a^x$	$x \to \ln a\, a^x$

D	f	f'
$\mathbb{R}$	$x \to \sin x$	$x \to \cos x$
$\mathbb{R}$	$x \to \cos x$	$x \to -\sin x$
$D_{\tan}$	$x \to \tan x$	$x \to \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$D_{\tan}$	$x \to \tan x$	$x \to 1 + \tan^2 x$
$D_{\cot}$	$x \to \cot x$	$x \to -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$D_{\cot}$	$x \to \cot x$	$x \to -(1 + \cot^2 x)$
$]-1,1[$	$x \to \arcsin x$	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$]-1,1[$	$x \to \arccos x$	$x \to -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$x \to \arctan x$	$x \to \dfrac{1}{1+x^2}$

▶ 2. Premières opérations sur les fonctions dérivables.

Th. 6 a est un élément de I. f et g sont des applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en a.

1. $f + g$ est dérivable en a et $\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).}$

2. Si λ est un réel, $\lambda\, f$ est dérivable en a et $\boxed{(\lambda\, f)'(a) = \lambda\, f'(a).}$

3. $f\, g$ est dérivable en a et $\boxed{(f\, g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a).}$

4. Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, f^n est dérivable en a et $\boxed{(f^n)'(a) = n\, f'(a)\, f^{n-1}(a).}$

Cor. 1 f et g sont des applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en tout point de I.

$f + g$, $\lambda\, f$ $(\lambda \in R)$, $f\, g$ et f^n $(n \in N^*)$ sont dérivables en tout point de I et :

$(f+g)' = f' + g'$	$(\lambda\, f)' = \lambda\, f'$	$(f\, g)' = f'\, g + f\, g'$	$(f^n)' = n\, f'\, f^{n-1}$

Cor. 2 Soient f_1, f_2, ...,f_n n applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en tout point de I.

$f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ est dérivables sur I et $\boxed{(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n' \text{ ou } \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'.}$

Cor. 3 Soient f_1, f_2, ...,f_n n applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en tout point de I.

$f_1 f_2 \cdots f_n$ est dérivables sur I et :

$$\boxed{(f_1\, f_2 \cdots f_n)' = f_1'\, f_2 \cdots f_n + f_1\, f_2' \cdots f_n + f_1\, f_2 \cdots f_n' \quad \text{ou} \quad \left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} \Big(f_k' \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f_i\Big).}$$

Th. 7 a est un élément de I. f et g sont des applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en a. On suppose que g ne s'annule pas en a.

1. $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\boxed{\left(\dfrac{1}{g}\right)(a) = \dfrac{-g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}.}$

2. $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}.}$

3. Si n est un élément de $\mathbb{Z}^*$, g^n est dérivable en a et $\boxed{(g^n)'(a) = n\, g'(a)\, g^{n-1}(a).}$

4. Si p est un élément de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{g^p}$ est dérivable en a et $\boxed{\left(\dfrac{1}{g^p}\right)(a) = \dfrac{-p\, g'(a)}{\big(g(a)\big)^{p+1}}.}$

P Pour dériver $\dfrac{1}{g^p}$ je conseille de partir de g^{-p} et d'utiliser **3.**

Cor. f et g sont des applications de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en tout point de I. On suppose que g ne s'annule pas sur I.
$\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$, g^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$ et $\dfrac{1}{g^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ sont dérivables en tout point de I et :

$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\, g - f\, g'}{g^2}$	$(g^n)' = n\, g'\, g^{n-1}$	$\left(\dfrac{1}{g^p}\right)' = -\dfrac{p\, g'}{g^{p+1}}$

▶ 3. Composition des fonctions dérivables.

Th. 8 a est un élément de I. f est une application de I dans $\mathbb{R}$, g est une application de J dans $\mathbb{R}$ et $\boxed{f(I) \subset J}$.

Si $\boxed{f \text{ est dérivable en } a}$ et si $\boxed{g \text{ est dérivable en } f(a)}$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\ g'\big(f(a)\big).$$

Th. 9 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et g est une application de J dans $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I, si g est dérivable sur J et si $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

★★ On n'oubliera pas dans les deux résultats précédents l'hypothèse $f(I) \subset J$.

Cor. 1 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. a un élément de I.

1. a un élément de I. Si f est dérivable en a et si $f(a)$ n'est pas nul, $|f|$ est dérivable en a.

2. Si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I, $|f|$ est dérivable sur I.

P Il est fortement conseillé pour dériver $|f|$ de commencer par "retirer la valeur absolue"

★ f étant dérivable en a, $f(a) \neq 0$ est une condition suffisante pour que $|f|$ soit dérivable en a mais pas nécessaire (prendre $f : x \to x^2$ et $a = 0$).

Lorsque f est dérivable en a et que $f(a) = 0$ on revient le plus souvent à la définition pour étudier la dérivabilité de $|f|$ en a.

Cor. 2 f est une application positive de I dans $\mathbb{R}$.

1. a un élément de I. Si f est dérivable en a et si **f(a) est strictement positif**, $\sqrt{f}$ est dérivable en a et :

$$\boxed{\left(\sqrt{f}\,\right)'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}.}$$

2. Si f est dérivable et strictement positive sur I, $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\sqrt{f}\,\right)'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}.}$

★ f étant dérivable en a, $f(a) > 0$ est une condition suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable en a mais pas nécessaire (prendre $f : x \to x^4$ et $a = 0$).

Lorsque f est dérivable en a et que $f(a) = 0$ on revient le plus souvent à la définition pour étudier la dérivabilité de $\sqrt{f}$ en a.

Cor. 3 f est une application de I dérivable sur I.

Si f ne s'annule pas sur I, $\ln|f|$ est dérivable sur I et : $\boxed{\left(\ln|f|\right)' = \frac{f'}{f}}$.

Cor. 4 f est une application de I dérivable sur I. e^f est dérivable sur I et : $\boxed{\left(e^f\right)' = f'\,e^f}$.

Cor. 5 Si α est un réel et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ strictement positive et dérivable sur I.

f^α est dérivable sur I et : $\boxed{\left(f^\alpha\right)' = \alpha f'\,f^{\alpha-1}}$.

P Pour dériver $\frac{1}{g^\beta}$ je conseille de partir de $g^{-\beta}$ et d'utiliser ce qui précède.

▸ 4. Dérivabilité et fonctions réciproques.

Th. 10 f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I.

1. f définit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
2. Si f est dérivable en un point a de I et si $\boxed{f'(a) \neq 0}$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

3. Si f est dérivable sur I et si $\boxed{\text{sa dérivée ne s'y annule pas}}$, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

★★ C'est un résultat que l'on n'utilise pas souvent. On est donc prié de l'apprendre avec soin pour ne pas l'oublier.

P Si par malheur on oublie la formule, on peut la retrouver en dérivant $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$.

III DÉRIVÉES SUCCESSIVES

▶ 1. Définition.

Déf. 7 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

On dit que f est n fois dérivable sur I s'il existe une suite $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ d'applications de I dans $\mathbb{R}$ telles que : $f_0 = f$ et pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, f_k est dérivable sur I et $f'_k = f_{k+1}$.

Cette suite est unique et le terme d'indice n de cette suite s'appelle la dérivée n-ième de f et se note $f^{(n)}$.

Par convention on dit que f est 0 fois dérivable sur I et on pose $f^{(0)} = f$.

Prop. 3 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose que f est n fois dérivable sur I. Alors :

- f est k fois dérivable sur I pour tout k dans $[\![0, n]\!]$
- Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $f^{(k+1)}$ n'est autre que la dérivée de $f^{(k)}$.

Déf. 8 f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

Si n est un élément de $\mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I ; autrement dit si f est n fois dérivable sur I pour tout n dans $\mathbb{N}$.

P Pour montrer qu'une fonction f est n fois dérivable sur I on procède le plus souvent de la manière suivante.

On montre que f est dérivable et on calcule f'. On montre que f' est dérivable et on calcule f'' et on continue jusqu'à deviner ce qu'est la dérivée $k^{\text{ème}}$.

On montre ensuite par récurrence que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ f est k fois dérivable sur I $\boxed{\text{et}}$ que $f^{(k)}$ vaut ...

P Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I il est préférable de montrer que f est n fois dérivable sur I pour tout n dans $\mathbb{N}$ plutôt que de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout n dans $\mathbb{N}$.

▶ 2. Notations.

Nous noterons, pour n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{D}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^n(I)$) l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).

$\mathcal{C}^\infty(I)$ désignera l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur I.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I)$.

$\mathcal{C}^\infty(I) = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I) = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{C}^n(I)$.

► 3. Opérations.

Th. 11 n est dans $\mathbb{N}$. f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I.

1. $f+g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
2. λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda\, f)^{(n)} = \lambda\, f^{(n)}$.

Th. 12 n est dans $\mathbb{N}$. f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I.

$f\,g$ est n fois dérivable sur I et :

$$\boxed{(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f^{(k)}\, g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f^{(n-k)}\, g^{(k)}}.$$

C'est la **Formule de leïbniz**.

Prop. 4 La somme et le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Le produit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I par un scalaire est encore une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Prop. 5 $\mathcal{D}^n(I)$, $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{C}^\infty(I)$ sont des sous-espaces (resp. des sous-algèbres) de l'espace vectoriel (resp. algèbre) des applications de I dans R.

Prop. 6 Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur I.

Si f et g sont n fois dérivables (resp. $\mathcal{C}^n$; resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n$; resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

4. La composition

Th. 13 Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ n fois dérivable sur I et g une application de J dans $\mathbb{R}$ n fois dérivable sur J. On suppose de plus que $f(I) \subset J$.

Alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.

Prop. 7 Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et g une application de J dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J. On suppose de plus que $f(I) \subset J$.

Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

5. Fonction réciproque

Th. 14 f est une application continue et strictement montone de I dans $\mathbb{R}$. n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

On suppose que f est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n$; resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et que f' ne s'annule pas sur I.

Alors f^{-1} est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n$; resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur $J = f(I)$.

★ Il n'est pas conseillé d'utiliser ce résultat en l'état...

IV LES THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

▶ 1. Intérieur d'un intervalle

Déf. 9 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'intérieur de I est le plus grand ouvert contenu dans I. On le note $\overset{\circ}{I}$.

I étant un intervalle, $\overset{\circ}{I}$ est tout simplement I "privé de ses bornes".

▶ 2. Le théorème de Rolle

Th. 15 **V1** f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ $(a < b)$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

V2 f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

Si a et b sont deux points distincts de I tels que $f(a) = f(b)$ alors il existe un élément c de $]a, b[$ ou $]b, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

★★ Toutes les hypothèses sont importantes dans ce théorème. On est prié de les vérifier avec soin avant de conclure.

Graphiquement ceci signifie, grossièrement, que la représentation graphique de f admet au moins une tangente horizontale.

▶ 3. Le théorème des accroissements finis.

Th. 16 • V1. f est application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

• V2. f est une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. a et b sont deux éléments distincts de I.

Alors il existe un élément c de $\overset{\circ}{I}$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Graphiquement ceci signifie que si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{C}_f$, il existe au moins un point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $]a, b[$ ou $]b, a[$, où la tangente est parallèle à la droite (AB).

▶ 4. L'inégalité des accroissements finis.

Th. 17 f est application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

• V1. On suppose que m et M sont deux réels tel que : $\forall t \in \overset{\circ}{I}$, $m \leqslant f'(t) \leqslant M$.

Alors si x et y sont deux éléments de I tel que $\boxed{x \leqslant y}$:

$$m(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y - x)$$

• V2. On suppose que M est un réel tel que : $\forall t \in \overset{\circ}{I}$, $|f'(t)| \leqslant M$.

Alors si x et y sont deux éléments quelconque de I :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$$

Cor. f est application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\boxed{\forall (x,y)\in I^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant |x-y| \underset{t\in[x,y]\text{ou } [y,x]}{\text{Max}} |f'(t)|.}$$

P Ces résultats sont précieux pour établir des inégalités !

V VARIATIONS ET DÉRIVÉE

1. Monotonie.

Th. 18 f est continue sur **l'intervalle** I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

1. f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur $\overset{\circ}{I}$.
2. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur $\overset{\circ}{I}$.
3. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur $\overset{\circ}{I}$.

2. Stricte monotonie.

Th. 19 f est continue sur **l'intervalle** I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

1. SI f' est strictement positive sur $\overset{\circ}{I}$ ALORS f est strictement croissante sur I.
2. SI f' est strictement négative sur $\overset{\circ}{I}$ ALORS f est strictement décroissante sur I.

Notons que dans les résultats précédents il n'est pas nécessaire d'avoir des informations de dérivabilité ou sur le signe de la dérivée aux bornes de I (mais il est indispensable d'avoir de la continuité sur la totalité de I). C'est souvent très utile. Cela peut apporter un certain confort dans l'application du théorème de la bijection.

★★ Les réciproques du dernier théorème sont fausses. Voir les compléments pour une réciproque.

VI EXTREMUM LOCAL

1. Définition

Déf. 10 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I.

f possède un **maximum local** en a s'il existe un réel strictement positif α tel que :

$$\forall x\in I\cap]a-\alpha,a+\alpha[,\ f(x)\leqslant f(a).$$

f possède un **minimum local** en a s'il existe un réel strictement positif α tel que :

$$\forall x\in I\cap]a-\alpha,a+\alpha[,\ f(a)\leqslant f(x).$$

f possède un **extremum local** en a si f possède un minimum local ou un maximum local en a.

2. Une condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Th. 20 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.

Si f est dérivable en a et si f possède un extremum local en a, $f'(a)=0$.

★★ L'hypothèse a dans l'intérieur de I est essentielle.

★★ La réciproque est fausse. Clairement $f : x \to x^3$ est dérivable en 0 et de dérivée nulle en ce point. Pourtant f ne possède pas d'extremum local en 0 car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▶ 3. Une modeste condition suffisante d'existence d'un extremum local

Prop. 8 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et a un point $\boxed{\text{intérieur}}$ à I.

Si f est dérivable sur un voisinage de a et si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f possède un extremum local en a.

Les hypothèses du résultat précédent signifient qu'il existe un intervalle $]a - \alpha, a + \alpha[$ $(\alpha > 0)$ tel que :

- f est dérivable sur cet intervalle
- $f'(a) = 0$
- f' est positive sur $]a - \alpha, a[$ et négative sur $]a, a + \alpha[$ ou le contraire.

VII PROLONGEMENT DES FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^p$ ET PLUS

▶ 1. LE résultat du programme

Th. 21 f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et p est un élément de $\mathbb{N}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b[$ et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en b alors f admet **un prolongement** de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b]$.

★ Il n'y rien d'autre dans le programme ! Il est clair que l'on peut extrapoler ce résultat en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$, ou $]a, b[$ ou encore $I - \{x_0\}$. Dans le dernier cas cela donne :

Th. 22 p est un élément de $\mathbb{N}$. x_0 est un élément de I. f est une application de $I - \{x_0\}$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I - \{x_0\}$ et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en x_0 alors f admet **un prolongement** de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

▶ 2. Le théorème de "la limite de la dérivée" (du programme ?)

Th. 23 f est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$

1. f est continue sur $[a, b]$,		1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$
2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$	DONNE	2. $f'(a) = \ell$
3. f' admet une limite finie ℓ à gauche en b.		

On a des résultats analogues lorsque le point "pathologique" est a ou lorsque les points "pathologiques" sont a et b. On a encore :

Th. 24 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 est un point de I.

On suppose que f est continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I - \{x_0\}$ et que la restriction de f' à $I - \{x_0\}$ admet une limite finie ℓ en x_0.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(x_0) = \ell$.

★★★ Pour ces deux derniers résultats il n'est absolument pas question de parler de prolongement de f (ou de f'). En effet la fonction f est définie sur la totalité de $[a, b]$ ou de I

On peut donner des résultats analogues pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$. Voir compléments.

▶ 3. Remarque

★★ Il est essentiel de faire la différence entre les résultats du **1.** et ceux du **2**. Dans **1. on prolonge** la fonction en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^p$) dans le **2.** on montre que **LA** fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Illustrons.

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{\ln x}\cdot$ Dans ce cas on utilisera **1.** pour montrer que f se prolonge à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \begin{cases} (x^2 - x)\dfrac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Dans ce cas on utilisera **2.** pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

VIII FORMULES DE TAYLOR

★★ La place de certains résultats n'est pas ici mais je préfère les mentionner pour être complet sur le sujet.

▶ 1. La formule de Taylor avec reste intégral

Th. 25 **Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Cor. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

▶ 2. La formule de Taylor-Lagrange

Th. 26 **Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour tout élément x de $I - \{a\}$, il existe un élément c appartenant à $]a, x[$ ou $]x, a[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)$$

ou :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c).}$$

★★★ Pour n et a fixés, il est essentiel de remarquer que c dépend de x.

Cor. f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose que 0 est un élément de I.

Pour tout élément x de $I - \{0\}$, il existe un élément c appartenant à $]0, x[$ ou $]x, 0[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)$$

ou :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c).}$$

▶ 3. L'inégalité de Taylor-Lagrange

Th. 27 **Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ \Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)\Big| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Max}_{u \in [a,x]} |f^{(n+1)}(u)|.}$$

P Après avoir écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange on essaie le plus souvent de trouver le max ou plus modestement d'en trouver un majorant raisonnable.

▶ 4. La formule de Taylor-Young

Th. 28 **La formule de Taylor-Young**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Ainsi f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est :

$x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, (x-a)^k$.

Cor. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n).$$

Ainsi f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est :

$x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$.

▶ 5. Remarques

PP La formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Lagrange et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont très utiles pour obtenir des sommes de séries, pour majorer des restes de séries, pour développer des fonctions en séries entières, pour établir des inégalités...

PP La formule de Taylor-Young est essentielle pour construire des développements limités.

IX FONCTIONS CONVEXES

▶ 1. Une évidence.

Prop. 9 Soient u et v deux éléments d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Un réel x appartient au segment d'extrémités u et v si et seulement si : $\exists \lambda \in [0,1],\ x = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v$ (resp. $\exists \lambda' \in [0,1],\ x = (1-\lambda')\, u + \lambda'\, v$).

2. Le segment d'extrémités u et v est : $\{\lambda\, u + (1-\lambda)\, v\ ,\ \lambda \in [0,1]\}$ ou $\{(1-\lambda')\, u + \lambda'\, v\ ,\ \lambda' \in [0,1]\}$

▶ 2. Définition et premières caractérisations.

Déf. 11 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. f est **convexe** sur I si :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, a + (1-\lambda)\, b) \leqslant \lambda\, f(a) + (1-\lambda)\, f(b).$$

Déf. 12 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. f est **concave** sur I si :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda\, f(a) + (1-\lambda)\, f(b) \leqslant f(\lambda\, a + (1-\lambda)\, b).$$

Prop. 10 Soit f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est concave sur I si $-f$ est convexe.

Dans la suite si f est une application de I dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Th. 29 f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si pour tout couple (a,b) d'éléments de I tel que $a < b$:

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a) + f(a).$$

Cor. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{C}_f$, tout point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse comprise entre celles de A et B est en dessous du segment $[A,B]$.

Autrement dit f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de toutes ses cordes.

▶ 3. La convexité pour les fonctions dérivables

Th. 30 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Th. 31 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si $\forall a \in I,\ \forall x \in I,\ f'(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$.

Cor. f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

▶ 4. La convexité pour les fonctions deux fois dérivables

Th. 32 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

▶ 5. Remarques

P La convexité est un formidable générateur d'inégalités. Voir compléments.

La convexité joue un rôle important en optimisation. Une fonction dérivable et convexe (resp. concave) dont la dérivée s'annule en un point possède un minimum (resp. maximum). Voir compléments.

X SAVOIR FAIRE

- Montrer en utilisant la définition qu'une fonction est dérivable en un point (lorsque l'on ne peut pas conclure avec les théorèmes usuels).
- Calculer la dérivée d'une composée.
- Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction.
- Utiliser Rolle pour donner des zéros aux dérivées successives d'une fonction.
- Utiliser le théorème ou l'inégalité des accroissements finis pour obtenir des inégalités.
- Utiliser la formule de leïbniz.
- Calculer les dérivées successives d'un quotient.
- Utiliser la convexité et la concavité pour obtenir des inégalités.
- Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
- Utiliser le théorème de " la limite de la dérivée" pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Utiliser les dérivées successives pour trouver l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

---

XI COMPLÉMENTS

▶ 1.Un peu plus sur les fonctions convexes

Th. 33 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe sur I.

ii) Pour tout a dans I, $x \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I-\{a\}$.

iii) $\forall (x,y,z) \in I^3,\ x<y<z \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Th. 34 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f est convexe sur I, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I où cela est raisonnable ; en particulier f est continue en tout point de $\mathring{I}$.

▶ 2. Des inégalités classiques obtenues par convexité ou concavité.

Prop. 11 $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leqslant x-1}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x-1}$ $\boxed{\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin x}$

Th. 35 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe sur I.

n est un élément de $\mathbb{N}^*$, et x_1, x_2,..., x_n sont n éléments de I

1. α_1, α_2,..., α_n sont n réels positifs dont la somme vaut 1. Alors :

$$\boxed{f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}$$

2. En particulier :

$$\boxed{f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}}$$

Prop. 12 Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si a_1, a_2,..., a_n sont n réels positifs : $\boxed{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \ \leqslant \ \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}}$.

Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si a_1, a_2,..., a_n sont n réels strictement positifs :

$$\boxed{\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \ \leqslant \ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \ \leqslant \ \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}}$$

Prop. 13 p et q sont des réels strictement positifs tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

n est un élément de $\mathbb{N}^*$, a_1, a_2,..., a_n sont n réels strictement positifs ainsi que b_1, b_2,..., b_n.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ \leqslant \ \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{1/q} \quad \text{(inégalité de Hölder)}$$

▶ 3. ROLLE again.

Prop. 14 Si f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$ alors il existe un élément c de $]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Prop. 15 Si f est une application de $]-\infty, a]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, a]$, dérivable sur $]-\infty, a[$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = f(a)$ alors il existe un élément c de $] - \infty, a[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Prop. 16 Si f est application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ alors il existe un réel c tel que : $f'(c) = 0$.

★ Ces trois résultats ne sont pas à utiliser en l'état.

Prop. 17 **P** **Un générateur de zéros** f est une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I et n fois dérivable sur l'intérieur de I.

Si f a p zéros dans I, pour tout k dans $[\![1, \mathrm{Max}\{p-1, n\}]\!]$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $p-k$ fois dans l'intérieur de I.

★★ Il faut plus retenir l'idée que le résultat.

▶ 4. Dérivée et stricte monotonie.

Th. 36 f est une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur l'intervalle I et dérivable sur I privé d'un ensemble fini D.

SI f' est strictement positive sur $I \backslash D$, ALORS f est strictement croissante sur I.

SI f' est strictement négative sur $I \backslash D$, ALORS f est strictement décroissante sur I.

Th. 37 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est strictement croissante sur I.

ii) $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geqslant 0$ et l'ensemble des éléments de $\overset{\circ}{I}$ qui annule f' est d'intérieur vide.

Th. 38 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est strictement décroissante sur I.

ii) $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leqslant 0$ et l'ensemble des éléments de $\overset{\circ}{I}$ qui annule f' est d'intérieur vide.