CONVERGENCE ET APPROXIMATION

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de la convergence.

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Dans la suite les variables aléatoires considérées le sont sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (sauf mention du contraire).

I CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

► 0. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev dans le cas général...

Th. 1 **Inégalité de Markov**

Soit X une variable aléatoire réelle prenant presque sûrement ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et admettant une espérance.

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}\cdot$$

Cor. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre r.

Pour tout réel ε strictement positif, $|X|$ possède un moment d'ordre r et : $\boxed{P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}\cdot}$

P Mentionnons une conséquence de ce résultat qui sera utile en estimation. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et λ un réel.

$$\boxed{P(|X - \lambda| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\big((X-\lambda)^2\big)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X) + \big(E(X) - \lambda\big)^2}{\varepsilon^2}\cdot}$$

Th. 2 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 ou une variance. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}\cdot}$$

► 1. Définition

Déf. 1 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ **converge en probabilité** vers X si pour tout réel ε strictement positif :

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

Nous écrirons alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

Dans le programme précédent on écrivait $X_n \underset{P}{\longrightarrow} X$...

★★ Dans le programme de première année on trouve dans cette définition : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) = 0$! ! Une petite proposition s'impose pour mettre tout le monde d'accord.

Prop. 1 **SD** $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

i') Pour tout réel ε strictement positif : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\big) = 0$.

ii) Pour tout réel ε strictement positif : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) = 0$.

iii) Pour tout réel ε strictement positif : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| \leqslant \varepsilon\big) = 1$.

iv) Pour tout réel ε strictement positif : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| < \varepsilon\big) = 1$.

★★ Notons que la convergence en probabilité est une notion relativement contraignante. Il n'est pas toujours facile de calculer la probabilité intervenant d'autant qu'elle ne résulte pas de manière immédiate des lois de X_n et de X puisqu'elle fait intervenir la loi de $X_n - X$. Les deux conditions suffisantes qui suivent sont donc les bienvenues. Notons qu'elles ne sont pas explicitement au programme donc il est bon de savoir les démontrer.

▸ 2. Une condition suffisante de convergence en probabilité

Th. 3 **SD** Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $X_n - X$ possède un moment d'ordre 2.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$ alors la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Th. 4 **PP** **SD** Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $X_n - X$ possède un moment d'ordre 2.

On suppose que, pour n assez grand, $E(X - X_n) = 0$ (ou que $E(X_n) = E(X)$, ce qui n'est pas tout à fait la même chose...)

Alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$, la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

★★ Pour prouver le premier résultat on utilisera Markov pour écrire :

$$P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\big((X_n - X)^2\big)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X_n - X) + \big(E\big(X_n - X\big)\big)^2}{\varepsilon^2}.$$

★ Pour le second on écrira directement Bienaymé-Tchebychev. $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X_n - X)}{\varepsilon^2}$.

★★ Les conditions contenues dans ces théorèmes sont suffisantes pour avoir la convergence en probabilité mais pas nécessaires.

▶ 3. Loi faible des grands nombres

Déf. 2 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ est la **moyenne empirique** d'ordre n de la suite précédente.

Th. 5 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant même espérance m et même variance σ^2.

On suppose que les variables aléatoires réelles de cette suite sont (deux à deux) **indépendantes**.

Alors la suite de terme général $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine égale à m.

Ainsi, pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$

★ Notons que sous les hypothèses du théorème précédent : $P\left(\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\cdot$

Cor. 1 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

On suppose que les variables aléatoires réelles de cette suite sont deux à deux **indépendantes** (resp. indépendantes).

La suite de terme général $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine égale à p.

★ Notons que sous les hypothèses du résultat précédent : $P\left(\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}\cdot$

★ Rappelons que résultat figure au programme de première année...

Cor. 2 $\boxed{!}$ p est un élément de $]0,1[$. $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Alors $\left(\dfrac{1}{n}X_n\right)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine égale à p.

★ Rappelons que résultat figure au programme de première année...

★★ Notons qu'il n'y a pas d'hypothèse (explicite) d'indépendance dans ce résultat.

▶ 4. Une conséquence de la loi faible des grands nombres

Illustrons le dernier résultat. Considérons un événement A associé à une expérience aléatoire et notons p la probabilité de sa réalisation.

Itérons cette expérience aléatoire de manière à ce que les itérations soient indépendantes. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, notons X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si A se réalise à la $n^{\text{ème}}$ itération et 0 sinon. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ est la fréquence de réalisation de A au cours des n premières itérations.

Le résultat précédent indique que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p. Donc, pour tout réel strictement positif ε, la probabilité pour que Y_n prenne des valeurs à l'extérieur de l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini , c'est à dire lorsque l'on réalise “un grand nombre” de fois l'expérience.

Ceci légitime notre modèle probabiliste inspiré des fréquences statistiques.

A l'inverse il permet encore d'estimer la valeur de p à partir de la fréquence de réalisation de A.

▶ 5. Convergence en probabilité et composition

Th. 6 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X, la suite $\big(f(X_n)\big)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers $f(X)$.

★ Ce résultat a été ajouté au programme concours 2015. Il est précieux.

II CONVERGENCE EN LOI

▶ 1. Définition

Déf. 3 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ **converge en loi** vers X si pour tout réel x où F_X est continue :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant x) = P(X \leqslant x).$$

Nous écrirons alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Dans le programme précédent cette notation n'était pas proposée.

★★ La convergence en probabilité donne la convergence en loi mais pas l'inverse. Ce résultat n'est pas au programme. Nous y reviendrons dans les compléments.

▶ 2. Pratiquement

PP Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour montrer que cette suite converge en loi il n'est pas utile de trouver une variable aléatoire X telle que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X.

En gros, il convient avant tout de trouver une fonction de répartition F telle que $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$ pour tout x ou F est continue. D'où l'importance des deux rappels qui suivent.

Th. 7 Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ ou dans $\mathbb{R}$... (voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle si et seulement si :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Th. 8 Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ ou dans $\mathbb{R}$... (voir les deux premiers points).

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité si et seulement si :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- F est continue sur $\mathbb{R}$;
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points éventuellement vide.

★ Notons que dans ces deux résultats les deux premiers points montrent que F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$. Il n'est donc pas utile de vérifier cette dernière propriété.

▸ 3. Une difficulté à surmonter

PP Soit $(X_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On souhaite montrer que cette suite converge en loi vers une variable aléatoire. Comme nous l'avons dit plus haut il convient en gros de trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$. Le problème se complique lorsque F_{X_n} est définie par intervalles et que des bornes de ses intervalles contiennent n. Donnons deux exemples.

ex. 1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \in [-\ln n, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

ex. 2. $\forall x \in \left]-\infty, \dfrac{2}{n}\right],\ F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [2, +\infty[,\ F_n(x) = 1$.

Si x est élément de $\left[\dfrac{2}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right[: F_n(x) = \dfrac{\mathrm{Ent}\,(nx)\ (\mathrm{Ent}\,(nx) - 1)}{2n^2}$.

Si x est élément de $\left[1 + \dfrac{1}{n}, 2\right[: F_n(x) = \dfrac{1}{2\,n^2}\Big((4n+1)\,\mathrm{Ent}\,(nx) - \big(\mathrm{Ent}\,(nx)\big)^2 - 2\,n^2 - 2\,n\Big)$.

Dans le premier cas il n'est pas question de passer à la limite pour x dans $[-\ln n, +\infty[$ puis pour x dans $]-\infty, -\ln n[$! ! Même type de remarque pour le deuxième exemple.

Le bon algorithme consiste à fixer x dans un intervalle indépendant de n qui permet de passer aisément à la limite.

Dans le premier cas on fixe x dans $\mathbb{R}$ et on remarque que pour n assez grand x est dans $[-\ln n, +\infty[$.

Dans le second cas on conclut aisément pour x dans $]-\infty, 0]$ et dans $[2, +\infty[$.

Puis on fixe x dans $]0,1]$ et on remarque que pour n assez grand x est dans $\left[\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$.

Puis on fixe x dans $]1,2[$ et on remarque que pour n assez grand x est dans $\left[1 + \frac{1}{n}, 2\right[$.

▶ 4. Convergence en loi et opérations

Th. 9 **Théorème de Slutsky** $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge **en loi** vers une variable aléatoire réelle X.

$(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge **en probabilité** vers la variable certaine égale à c.

Alors $(X_n + Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers $X + c$ et $(X_n\, Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers $c\, X$.

Cor. **Théorème de Slutsky again** $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle X.

$(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en loi vers la variable certaine égale à c.

Alors $(X_n + Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers $X + c$ et $(X_n\, Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers $c\, X$.

★ Notons que ce second résultat n'est pas du programme alors qu'il coûte moins cher à mettre en œuvre que le premier... Rassurons tous le monde en disant que : $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à c si et seulement $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers la variable certaine égale à c...

Th. 10 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle X. f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X, la suite $\big(f(X_n)\big)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers $f(X)$.

★ Ces deux résultats ont été ajoutés au programme concours 2015. Ils sont précieux.

▶ 5. Convergence en loi : du discret au discret

Th. 11 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que toutes ses variables aléatoires prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout élément k de $\mathbb{Z}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Ceci est le résultat du programme. C'est bien maigre et impose sans doute de savoir démontrer les quelques résultats complémentaires qui suivent.

Th. 12 $\boxed{\textbf{SD}}$ $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que toutes ses variables aléatoires prennent leurs valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_r$.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = x_k) = P(X = x_k).$$

Cor. **SD** $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que toutes ses variables aléatoires prennent leurs valeurs dans $[\![a, b]\!]$ (a et b sont deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$).

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout élément k de $[\![a, b]\!]$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Th. 13 **SD** $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que toutes ses variables aléatoires prennent leurs valeurs dans $[\![r, +\infty[\![$ (r est un élément de $\mathbb{Z}$).

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout élément k de $[\![r, +\infty[\![$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

PP **Pratiquement** Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour montrer que cette suite converge en loi il n'est pas utile de trouver une variable aléatoire X telle que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X.

Deux voies sont à explorer car “la limite” peut être discrète ou non discrète. Dans le second cas revenir à ce qui a été dit plus haut.

Dans le premier cas il convient, en gros, de trouver une partie finie ou dénombrable D de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément d de D la suite de terme général $P(X_n = d)$ converge et de montrer que $d \to \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = d)$ est une loi de probabilité discrète. Ici encore un rappel s'impose.

Déf. 4 On appelle **loi de probabilité discrète** toute application d'une partie finie ou dénombrable D de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ ou dans $[0, +\infty[$ telle que :

$$\sum_{d\in D} f(d) = 1$$

Prop. 2 Toute loi de probabilité discrète est la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète .

▶ 6. Approximation 1. Approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson

Th. 14 **Énoncé du programme de seconde année**

λ est un réel strictement positif. n_0 est un élément de N tel que $\lambda \leqslant n_0$.

Pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$, X_n est une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$

Alors la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Autrement dit pour tout élément k de $\mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

Th. 15 **Énoncé du programme de première année**

Pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$, p_n est un élément de $[0, 1]$ et X_n une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi binômiale de paramètres n et p_n.

On suppose de plus que la suite $(np_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers un réel strictement positif λ.

Alors la suite $(X_n)_{n \geqslant n_0}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Autrement dit pour tout élément k de $\mathbb{N}$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi binômiale de paramètres n et p par une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre np lorsque $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np \leqslant 15$ (attention il y a autant de conditions que d'auteurs, mais voir plus bas...).

Si k est un élément de $X(\Omega)$, on prend $\dfrac{(np)^k}{k!}\, e^{-np}$ comme valeur approchée de $P(X = k)$.
Ceci a, en outre, comme avantage de faire passer de deux paramètres à un.

★★ Le programme dit que : "toutes indications devront être fournies aux candidats quant à la justification des approximations".

III THÉORÈME CENTRAL LIMITE

▶ 1. Deux énoncés du théorème central limite

Th. 16 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes**, suivant la même loi, ayant une espérance m et une variance σ^2 ($\sigma > 0$).

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

La suite de terme général $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite.

Ainsi, pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{S_n^*}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^* \leqslant x) = \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

Et pour tout couple (a,b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant S_n^* \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

Th. 17 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** suivant la même loi ayant une espérance m et une variance σ^2 ($\sigma > 0$).

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

La suite de terme général $\overline{X}_n^* = \dfrac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} = \dfrac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite.

Ainsi, pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{\overline{X}_n^*}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{X}_n^* \leqslant x) = \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

Et pour tout couple (a,b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

★ Le programme parle de "théorème limite central"...On parle aussi souvent de "théorème de la limite centrée".

▶ 2. Approximation 2. Approximation d'une loi binômiale par une loi normale

Th. 18 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles de bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$) **mutuellement indépendantes**. $q = 1 - p$.

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

a) Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binômiale de paramètres n et p.

b) Les suites de termes généraux $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ et $\overline{X}_n^* = \dfrac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$ convergent en loi vers une variable aléatoire

réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X}_n - p}{\frac{\sqrt{pq}}{n}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Cor. **SD** p est un élément de $]0,1[$. $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n suit une loi binômiale de paramètres n et p.

La suite de terme général $T_n^* = \dfrac{T_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{T_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

★★ Observons que le corollaire ne contient pas de condition d'indépendance. Il convient de savoir le démontrer proprement à partir du théorème.

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi binômiale de paramètres n et p par une variable aléatoire réelle Y suivant une loi normale d'espérance np et d'écart-type $\sqrt{npq}$ $(q = 1-p)$ lorsque $n \geqslant 20$ ou 30, p pas trop petit (!), $np \geqslant 10$ et $nq \geqslant 10$.

Dans ces conditions

- Pour tout réel x, on approxime $P(X \leqslant x)$ par $P(Y \leqslant x) = F_Y(x)$; donc

$$\boxed{P(X \leqslant x) \simeq \Phi\Big(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\Big)}$$

- Pour k dans $[\![0,n]\!]$, on approxime $P(X = k)$ par $P(k-1/2 \leqslant Y \leqslant k+1/2) = F_Y(k+1/2) - F_Y(k-1/2)$; donc

$$\boxed{P(X = k) \simeq \Phi\Big(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\Big)}$$

▶ 3. Approximation 3. Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Th. 19 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes**. On suppose que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre μ $(\mu > 0)$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

a) $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\,\mu$.

b) Les suites de termes généraux $S_n^* = \dfrac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}}$ et $\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\mu}{n}}}$ convergent en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}} \leqslant x\right) = P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\mu}{n}}} \leqslant x\right) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Cor. **SD** μ est un élément de $]0,+\infty[$. $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\,\mu$.

La suite de terme général $T_n^* = \dfrac{T_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{T_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mu}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

★★ Observons que le corollaire ne contient pas de condition d'indépendance. Il convient de savoir le démontrer proprement à partir du théorème.

PP Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Poisson de paramètre λ par une variable aléatoire réelle Y suivant une loi normale d'espérance λ et d'écart-type $\sqrt{\lambda}$ lorsque $\lambda > 10$.

Dans ces conditions

• Pour tout réel x, on approxime $P(X \leqslant x)$ par $P(Y \leqslant x) = F_Y(x)$; donc

$$\boxed{P(X \leqslant x) \simeq \Phi\Big(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big)}$$

• Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, on approxime $P(X = k)$ par $P(k-1/2 \leqslant Y \leqslant k+1/2) = F_Y(k+1/2) - F_Y(k-1/2)$; donc

$$\boxed{P(X = k) \simeq \Phi\Big(\frac{k+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big) - \Phi\Big(\frac{k-1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Big)}$$

IV SAVOIR FAIRE

• Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour montrer une convergence en probabilité (cas où $E(X - X_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X - X_n) = 0$).

• Utiliser l'inégalité de Markov pour montrer une convergence en probabilité (cas où $\lim_{n\to+\infty} E(X - X_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X - X_n) = 0$).

• Utiliser le théorème de Slutsky.

• "Composer une convergence" par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• Trouver la fonction d'une variable aléatoire pour obtenir de la convergence en loi.

• Utiliser les lois de probabilités pour obtenir de la convergence en loi.

• Traiter les situations usuelles au niveau de la convergence en loi (discret vers du discret "connu", discret vers du discret "inconnu", discret vers du continu "connu", discret vers du continu "inconnu", continu vers du continu "connu", continu vers du continu "inconnu").

• Montrer qu'une application est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ou d'une variable aléatoire à densité.

• Montrer qu'une application est une loi de probabilité discrète.

• Utiliser le théorème de la limite centrée (resp. théorème central limite).

• Approximer une loi binômiale par une loi de Poisson.

• Approximer une loi binômiale par une loi normale.

• Approximer une loi de Poisson par une loi normale.

• Utiliser les approximations du programme pour donner des valeurs approchées de probabilité ou pour traiter des problèmes "concrets".

V COMPLÉMENTS

▶ 1. Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binômiale

Prop. 3 p est un élément de $]0,1[$, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(N_m)_{m\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de $[\![n,+\infty[\![$ telle que :

$$\lim_{m\to+\infty} N_m = +\infty \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ N_m p \in \mathbb{N}.$$

On considère une suite $(X_m)_{m\geqslant 0}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout m appartenant à $\mathbb{N}$, $X_m \hookrightarrow \mathcal{H}(N_m, n, p)$.

$(X_m)_{m\geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale de paramètres n et p.

Autrement dit pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$: $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P(X_m = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$\boxed{\textbf{PP}}$ Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p, par une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale de paramètres n et p lorsque $\boxed{N \text{ est sensiblement supérieur à } 10\,n}$.

Si k est un élément de $X(\Omega)$, on prend $\displaystyle\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ comme valeur approchée de $\displaystyle P(\{X = k\}) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Ceci a en outre comme avantage de faire passer de trois paramètres à deux.

★ Figurait au programme jusqu'au concours 2014.

▶ 2. Comparaison des deux convergences

Th. 20 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X alors $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X.

★★ La réciproque est fausse. Néanmoins...

Prop. 4 Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit X une variable constante (ou presque sûrement constante) sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers X alors $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

▶ 3. De "l'unicité" de la limite dans le convergence en probabilité

Th. 21 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X et X' deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X et X', alors X et X' sont presque sûrement égales, c'est à dire que $P(X = X') = 1$.

▶ 4. Convergence presque sûre

Déf. 5 Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X s'il existe un événement négligeable A de $\mathcal{A}$ ($P(A) = 0$) tel que :

$$\forall \omega \in \Omega - A, \ \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

On écrit alors : $X_n \underset{PS}{\longrightarrow} X$ ou $X_n \xrightarrow{PS} X$.

Th. 22 Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X alors la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

★★ La réciproque est fausse.

▶ 5. Loi "forte" des grands nombres

Th. 23 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles suivant la même loi ayant une espérance m et une variance σ^2.

On suppose que les variables aléatoires réelles de cette suite sont deux à deux indépendantes.

Alors la suite de terme général $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire réelle certaine égale à m.

▶ 6. Convergence en probabilité et opérations.

Th. 24 Soient $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. a est un réel.

On suppose que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ convergent en probabilité respectivement vers X et Y.

Alors les suites de termes généraux $a\,X_n$, $X_n + Y_n$ et $X_n\,Y_n$ convergent en probabilité respectivement vers $a\,X$, $X + Y$ et $X\,Y$.

★ Les deux derniers résultats ne sont pas vrais au niveau de la convergence en loi.