I Exercice autour de densité, fonction de répatition, espérance et variance de variables quelconques.

Exercice 1 **Densité de probabilité.** **F0**

UN OVNI... On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est une densité de probabilité.

f est une densité du produit de deux variables indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$... Voir au niveau de la convolution.

Exercice 2 **Densité. Espérance.** **QSP ESCP 2011** **F1**

Q1. Donner les conditions pour que $f_a : x \to a\, e^{-|x|}\, \ln(1+e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Q2 X est une variable aléatoire de densité f_a. X admet-elle une espérance ?

▶ *QSP déjà donnée à l'ESCP en 2010. Exercice donné à l'oral de l'ESCP 1997 (3.41).*

Exercice 3 **Densité de probabilité.** **QSP ESCP 2006** **F1**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et une espérance m_1 non nulle (! !). On note F la fonction de répartition de X et on définit la fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-F(x)}{m_1} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

▶ *Cet exercice est le classique* $E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(X \geqslant t)\,\mathrm{d}t$ *avec les hypothèses* $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ *et* $E(X)$ *existe... Voir plus bas.*

Exercice 4 **Fonction de répartition** **QSP ESCP 2008** **F1⁻**

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\,dx.$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Exercice 5 **Densité de probabilité. Fonction de répartition. $\mathbf{Y = 2^X}$.** **F1**

α est réel. $\forall x \in\ ]-\infty, 0[,\ f(x) = \alpha 2^x$ et $\forall x \in [0,+\infty[, f(x) = \alpha 2^{-x}$.

Q1. Trouver α pour que f soit une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire de densité f. Trouver la fonction de répartition de X et calculer $E(X)$.

Q3. x est un réel. Calculer $P(X < x / X \geqslant -1)$.

Q4. Étudier $Y = 2^{X/2}$ (on pourra admettre que Y est une variables alétoire réelle).

▶ *On retrouve la même chose dans oral ESCP 2001 3.22 en remplaçant* 2 *par* 3.

Exercice 6 **Loi de Pareto. Densité de probabilité. Fonction de répartition. Espérance. $\mathbf{Y} = \ln \mathbf{X}$.**

F1$^-$

a est un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q1. Montrer que f_a est une densité de probabililité.

Q2. X est une variable aléatoire réelle admettant pour densité f_a.

a) Trouver la fonction de répartition F_X de X.

b) X possède -t-elle une espérance ? Si oui la calculer. Même chose pour la variance.

c) $Y = \ln X$. Trouver la fonction de répartition F_Y de Y.

Exercice 7 **Fonction de répartition. Densité. Espérance.** **QSP HEC 2012-6-S23** **F1$^+$**

a, b sont deux réels strictement positifs. α est un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilissé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$;
- $P(X > 0) = \alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Exercice 8 **Espérance.** **QSP ESCP 2006** **F1$^-$**

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe b tel que pour tout x réel $f(b - x) = f(x)$. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 9 **Espérance.** **QSP ESCP 2006** **F1**

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et F sa fonction de répartition. On suppose que :

- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- X admet une espérance $E(X)$.
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\big(1 - F(x) - F(-x)\big) = 0$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t) - F(-t)]\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 **Espérance.** **QSP ESCP 2012** **F1**

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On note F la fonction de répartition de X.

On suppose que X possède une espérance. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)=0$.

Montrer que $\displaystyle E(X)=\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}P(X>t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}P(X\geqslant t)\,\mathrm{d}t$.

En se fatiguant un peu plus on peut remplacer la première phrase par : soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans $[0,+\infty[$ (presque sûrement...) et f une densité X.

Exercice 11 **Espérance. Généralise l'exercice précédent.** **F1$^+$**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On note F la fonction de répartition de X.

Montrer que $E(X)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.

En cas d'existence montrer que $\displaystyle E(X)=\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}P(X>t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}P(X\geqslant t)\,\mathrm{d}t$.

En se fatiguant un peu plus on peut remplacer la première phrase par : soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans $[0,+\infty[$ (presque sûrement...) et f une densité X.

Exercice 12 **QSP HEC 2007-7** **F 1**

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que X possède un moment d'ordre 2.

Q1. Étudier le comportement de $x^2\,P(X\geqslant x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q2. Établir une relation entre $E(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,P(X\geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Q3. Prouver que : $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty}P(X\geqslant x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 2\int_0^{+\infty}x\,P(X\geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Si on note F la fonction de répartition de X : $\displaystyle E(X^2)=2\int_0^{+\infty}x\,P(X\geqslant x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x\,P(X>x)\,\mathrm{d}x=$

$\displaystyle 2\int_0^{+\infty}x\,\big(1-F(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13 $\mathbf{E(X^2)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,P(|X|\geqslant t)\,\mathrm{d}t}$ **F1**

X est une variable aléatoire de densité f continue et telle que $E(X^2)$ existe.

Q1. Montrer que si x est un réel strictement positif :

$$0\leqslant x^2P(|X|\geqslant x)\leqslant\int_{-\infty}^{-x}t^2f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{+\infty}t^2f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(x^2P(|X|\geqslant x)\big)=0$.

Q2. Soit x un réel positif. Montrer que : $\displaystyle\int_0^x t\,P(|X|\geqslant t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\,P(|X|\geqslant x)+\frac{1}{2}\int_{-x}^x t^2f(t)\,\mathrm{d}t$ (utiliser la fonction de répartition F de X et une intégration par parties).

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,P(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $E(X^2)/2$.

▶ *Thème abordé dans oral ESCP 2009 3.8.*

II Présentation de lois classiques.

Nous reviendrons sur ses lois dans la suite.

Exercice 14 **La loi gamma à "deux" paramètres.** **F1$^+$**

★★ Notons que cette loi faisait partie du programme jusqu'au concours de 2014. Il est certainement utile d'avoir quelques idées sur le sujet...

★★ Nous utiliserons dans cet exercice tous les résultats concernant la loi gamma à un paramètre. Il est fortement conseillé de faire de même aux concours.

b et ν sont deux réels strictement positifs. On pose : $\forall t \in]-\infty, 0],\ f(t) = 0$ et $\forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = \dfrac{t^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité. On dit que X suit la **loi gamma** de paramètres b et ν. On écrit $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

a) Que dire sit $\nu = 1$ (resp. $b = 1$) ?

b) Que dire de $\dfrac{1}{b} X$? Envisager une réciproque.

Q3. a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k et le calculer.

b) Vérifier que $E(X) = b\,\nu$ et $V(X) = b^2 \nu$.

Q4. a) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres b et ν_1, et b et ν_2.

Montrer que $X_1 + X_2$ suit la loi gamma de paramètres b et $\nu_1 + \nu_2$.

b) Plus généralement X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$ alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)$.

c) X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi gamma de paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$ et n.

Exercice 15 **Loi de Pareto** **F1$^-$**

α et x_0 sont deux réels strictement positifs. On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\, x_0^\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f. On dit que X suit **la loi de Pareto** de paramètres α et x_0. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{VP}(\alpha, x_0)}$.

Q2. Donner la fonction de répartition F_X de X.

Q3. a) $E(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\, x_0$.

b) $V(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 2$ et dans ce cas $V(X) = \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)\,(\alpha-1)^2}\, x_0^2$.

► *On ajoute parfois un paramètre C telle que $x_0 + C > 0$ (à la place de $x_0 > 0$).*

f devient : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\,(x_0+C)^\alpha}{(t+C)^{\alpha+1}} & \textit{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$.

C'est la loi de Pareto à trois paramètres que l'on note $\mathcal{VP}(\alpha, x_0, C)$.

Exercice 16 **Loi de Cauchy** **F1$^-$**

a est un réel strictement positif. On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2 + t^2)}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f. On dit que X suit **la loi de Cauchy** de paramètre a. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)}$.

Q2 Trouver la fonction de répartition F_X de X.

Q3 Montrer que X , n'a pas d'espérance.

On ajoute parfois un paramètre de dispersion x_0 (au paramètre d'échelle a) et f devient : $t \to \dfrac{a}{\pi(a^2 + (t - x_0)^2)}$.

C'est la loi de Cauchy de paramètres x_0 et a.

Exercice 17 **Loi Bêta de première espèce.** **F1**

α et β sont deux réels strictement positifs.

Q1. Montrer que $B(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et strictement positive.

On pose $\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[,\ f_{\alpha,\beta}(t) = 0$ et $\forall t \in]0, 1[,\ f_{\alpha,\beta}(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$.

Q2. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité $f_{\alpha,\beta}$. On dit que X suit **la loi de bêta de première espèce** de paramètres α et β. On écrit alors $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha, \beta).}$

Q3. a) Montrer que pour tout r dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre r.

b) Montrer que $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$ et $V(X) = \dfrac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}$.

c) Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ E(X^r) = \displaystyle\prod_{i=0}^{r-1} \dfrac{\alpha + i}{\alpha + \beta + i}$.

Exercice 18 **Loi de Weibull.** **Oral ESCP 1997 3.38** **F1**

α et λ sont des réels strictement positifs. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \alpha\lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda\, x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire à densité de densité f. On dit que X suit la loi de Weibull de paramètre α et λ.

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{W}(\alpha, \lambda)$.

a) Trouver F_X. Montrer que X possède une espérance et une variance que l'on exprimera à l'aide de la fonction Γ.

b) On considère la variable aléatoire $Y = \lambda\ X^\alpha$. Étudier Y.

III Densité, fonction de répartition, espérance à partir des lois du programme.

Exercice 19 **Approche des lois gamma.** **F1$^-$**

Pour tout réel positif t, le nombre de personnes qui entrent dans un magasin entre les instants 0 et t est une variable aléatoire N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre λt.

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Y_n est la variable aléatoire égale au temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ client dans le magasin.

Q1. Donner la fonction de répartition F_n de Y_n.

Q2. Montrer que Y_n est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité.

Éxaminer les cas particuliers $\lambda = 1$ et $n = 1$.

► *Abordé dans ESCP 2011 3.3*

Exercice 20 **Géométrique-exponentielle.** **QSP ESCP 2012** **F1**

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables alétaoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire N_x égale à $\text{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

► *Déjà vu en 2011.*

Exercice 21 **Poisson-Gamma.** **F1**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et λ est un réel positif. X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X suit la loi gamma de paramètre n et que Y suit une loi de poisson de paramètre λ.

Démontrer que $P(X > \lambda) = P(Y < n)$.

► *Thème abordé dans oral ESCP 2001 3.1, 2006 3.33, HEC MII 1999.*

Exercice 22 **Gamma-Poisson.** **D'après oral ESCP 2008 3.5** **F1**

On ouvre un guichet au temps 0. Des clients se présentent successivement à ce guichet aux instants aléatoires $T_1, T_2, \ldots$

On suppose que les variables aléatoires $E_1, E_2, \ldots$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par : $\begin{cases} E_1 = T_1 \\ E_2 = T_2 - T_1 \\ E_3 = T_3 - T_2 \\ \ldots \end{cases}$

sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de clients arrivant dans l'intervalle $[0, 1]$.

Q1. Montrer que T_n est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité (cours).

Q2. Calculer $P[X = 0]$.

Q3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = n)$ en fonction de $P(T_{n+1} > 1)$ et de $P(T_n > 1)$.

En déduire la loi de X ou montrer que X suit une loi de Poisson ! ! (IPP)

Exercice 23 **Loi normale. Bienaymé-Tchebychev** **F1⁻**

x est un réel strictement positif. Montrer que $\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)$.

Exercice 24 **Loi normale.** **F1**

Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25 **Utilisation des lois normales pour calculer des intégrales.** **F1**

a, b et c sont trois réels. On suppose que a est strictement positif.

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\,t^2+b\,t+c)}\,\mathrm{d}t$.

► *On retrouve cela dans HEC MI 2004*

Exercice 26 **Moments d'une loi normale centrée réduite.** **F1**

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k et le calculer.

Exercice 27 **Stabilité des lois normales.** **Oral ESCP 2003 3.9.** **F1**

Q1. a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et φ une densité de X (nous pourrons prendre la densité de X continue sur $\mathbb{R}$).

Montrer que X admet des moments à tous les ordres. Préciser les moments d'ordre 1, 2 et 3.

Calculer le moment d'ordre 4 en remarquant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^4\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\,t^3\varphi'(t)\,dt$, où φ' désigne la dérivée de φ.

b) On suppose maintenant que X suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$.

En écrivant X sous la forme $X=\sigma X^*+m$, calculer $E(X^2)$, $E(X^4)$, puis $V(X^2)$ en fonction de m et de σ.

Q2. Un point se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé, en partant de l'origine à l'instant 0.

Si à l'instant $t=k-1$, le point se trouve en (u_{k-1},v_{k-1}), à l'instant $t=k$, il se trouvera en $(u_{k-1}+X_k, v_{k-1}+Y_k)$, où X_k et Y_k suivent des lois normales $\mathcal{N}(a,1)$.

Ainsi, au temps $t=1$, il se trouve au point de coordonnées (X_1,Y_1), au temps $t=2$, il se trouve en (X_1+X_2, Y_1+Y_2), etc.

On suppose les variables $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ et $Y_1,Y_2,\dots,Y_n,\dots$ mutuellement indépendantes : les X_i sont indépendantes entre elles, de même que les Y_j et toutes les X_i sont indépendantes de toutes les Y_j.

► *L'objectif de cette question est l'estimation de a^2 où a est défini ci-dessus.*

Pour tout n entier strictement positif, on pose $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. (A_n,B_n) sont donc les coordonnées du point à l'instant n.

a) Quelle sont les lois de A_n, de B_n, leur espérance et leur variance ?

b) Soit $D_n^2=A_n^2+B_n^2$ le carré de la distance du point à l'origine à l'instant n.

Exprimer $E(A_n^2)$ à l'aide de $V(A_n)$ et $E(A_n)$. En déduire $E(D_n^2)$.

Montrer que $U_n = \dfrac{X_n^2 + Y_n^2}{2n^2} - \dfrac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de a^2.

c) Exprimer la variance de A_n^2 à l'aide des résultats de la question 1. En déduire celle de U_n. Cet estimateur est-il convergent ?

IV Composition d'une variable aléatoire réelle à densité par une fonction.

a) Les "$\varphi \circ X$" de base.

Exercice 28 **$\mathbf{Y = aX + b}$** **F1**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$. a est un réel non nul et b un réel.

Montrer que $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{|a|}\ f\Big(\frac{x-b}{a}\Big).$$

Exercice 29 **$\mathbf{Y = X^2}$** **F1$^+$**

★ Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big).$$

Exercice 30 **$\mathbf{Y = |X|}$** **F1$^-$**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = |X|$ est une variable réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et en donner une densité.

Exercice 31 **$\mathbf{Y = \dfrac{1}{X}}$** **F1$^+$**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in\ \mathbb{R} - \{0\},\ g(x) = \frac{1}{x^2}\ f(x).$$

Exercice 32 **$\mathbf{Y = e^X}$** **F1$^-$**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1}{x}\ f(\ln x).$$

Exercice 33 **$\mathbf{Y = \ln X}$** **F1$^-$**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$ (ou presque sûrement dans $]0, +\infty[$), de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

On considère la variable aléatoire $Y = \ln X$.

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x\, f(e^x)$$

---

b) $\phi \circ X$ à partir de la loi uniforme.

Exercice 34 **À partir de la loi uniforme.** **F1$^-$**

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$ et $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

Exercice 35 **À partir de la loi uniforme.** **ESCP 1997 3.19** **F1$^-$**.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([1,2])$. Étude de $Y = e^{X^2-1}$.

Exercice 36 **À partir de la loi uniforme.** **ESCP 1997 3.42** **F1**

X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $[-1,1]$.

Q1. Donner la fonction de répartition de $Y = X^2 + 1$. Calculer $E(Y)$.

Q2. Pour tout ω appartenant à Ω, on pose : $Z(\omega) = -\ln \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$ si $X(\omega) \neq -1$ et $Z(\omega) = 0$ si $X(\omega) = -1$. Étudier Z.

Exercice 37 **À partir de la loi uniforme. Simulation d'une loi exponentielle.** **F1$^-$**

Q1. a) λ est un réel strictement positif. X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

On suppose que $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln X$ est une variable aléatoire. Que dire de Y ? Et pour $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$?

b) Envisager une réciproque.

Q2. Écrire en TP 4 (ou en Scilab) une fonction qui simule une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 38 **À partir de la loi uniforme.** **QSP ESCP 2010** **F1$^-$**

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Exercice 39 **À partir de la loi uniforme.** **Oral HEC 1996** **F1**

Un baton de longueur 1 et d'extrémités A et B est cassé en deux au hasard. La longueur L du morceau d'extrémité A suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Q1. Étudier la variable aléatoire X égale à la longueur du plus petit morceau et calculer son espérance.

Q2. Même chose avec la longueur du plus grand morceau.

Q3. Soit Z la variable aléatoire égale au rapport de la longueur du plus petit morceau à celle du plus grand. Déterminer la loi de Z et son espérance.

► *On trouve ce thème dans oral ESCP 1998 3.13 (la loi est uniforme sur $[0, \ell]$ et on étudie XY.)*

Exercice 40 **À partir de la loi uniforme.** **QSP ESCP 2007** **F1$^+$**

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 41 **À partir de la loi uniforme.** **D'après ESCP 2002 3.10** **F1$^+$**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 2]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & -X(\omega) \\ X(\omega) & -3 \end{pmatrix}$$

Soit Y la variable aléatoire définie par : pour tout ω dans Ω, $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de M_ω .

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Exercice 42 **À partir de la loi uniforme.** **QSP HEC 2012-13-S40** **F2**

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

---

c) $\phi \circ X$ à partir de la loi exponentielle

Exercice 43 **À partir de la loi exponentielle.** **QSP ESCP 2006-7** **F1$^-$**.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre k.

Exercice 44 **À partir de la loi exponentielle.** **F1$^-$**

X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère la variable aléatoire réellle $Y = \sqrt{X}$.

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Calculer $E(Y)$.

Exercice 45 **À partir de la loi exponentielle.** **QSP ESCP 2003** **F1$^+$**.

X est une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $Y = X^2$ et on suppose que : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f.

Exercice 46 **À partir de la loi exponentielle. Piège...** **QSP ESCP 2012** **F1**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. $Z = XY$.

Z est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

---

d) $\phi \circ X$ à partir de lois normales

Exercice 47 **À partir de la loi normale.** **F1$^-$**

X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. Y est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend deux valeurs, 1 avec la probabilité p et -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Q1. On note Φ la fonction de répartition de X. Montrer que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Q2. Montrer que $Z = XY$ a même loi que X (commencer par trouver la fonction de répartition de Z.).

Exercice 48 **À partir de la loi normale.** **QSP HEC 2012-15** **F1**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\text{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

► *Déjà vu en 2007*

Exercice 49 **À partir de la loi normale.** **QSP ESCP 2013**. **F1$^-$**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que $P(Y \leqslant X) \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot$

Exercice 50 **À partir de la loi normale. Loi Log-Normale.** **QSP HEC 2011** **F1$^+$**

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1, 1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\, \sin(2\pi\, \ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

► *Dans Oral ESCP 2003 3.8 on demande de montrer que Z et une variable de densité f_a ont les mêmes moments.*

Exercice 51 **À partir de la loi normale. Piège...** **F1**

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Q1. Étudier $Y = |X|$. Calculer $E(Y)$.

Q2. Trouver la fonction de répartition de $Z = \dfrac{X + |X|}{2}\cdot$ Z est-elle une variable aléatoire à densité ?

e) $\phi \circ X$ à partir d'une loi "quelconque"

Exercice 52 **QSP HEC 2007-10** **F1$^-$**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = a\, e^{x - a\, e^x}$.

Q1. À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?

Q2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$?

Exercice 53 **Oral ESCP 2001 3.20** **F1**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.

Q2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Étudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

Q3. On définit une variable aléatoire Y par : $Y = \varphi(X) = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 54 **Oral ESCP 1998 3.3** **F1$^+$**

Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{(1 + x)^2}$ si x appartient à $[0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire de densité f. Touver la fonction de répartition F de X. Calculer $E(X)$.

Q3. On pose $Y = X + \dfrac{1}{X}$. t est un réel. Résoudre l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - tx + 1 \leqslant 0$.

Étudier Y. Y admet-elle une espérance ?

Exercice 55 **Inverse d'une loi de Cauchy.** **QSP HEC 2010** **F1$^+$**

Q1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{c}{1 + x^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

Q3. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

Exercice 56 **Variable aléatoire réelle définie par une intégrale.** **Oral ESCP 2013 3.13** **F1$^+$**

Q1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x - t|\, dt$.

Donner, suivant les valeurs de x, l'expression explicite de $g(x)$ en fonction de x et vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, X est une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit sur Ω l'application Y par : $\forall\, \omega \in \Omega, Y(\omega) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big|X(\omega) - t\big|\, dt$.

On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q2. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

a) Exprimer Y en fonction de X.

b) Donner la fonction de répartition de Y.

c) Vérifier que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

d) Calculer l'espérance de Y.

Q3. On considère dans cette question une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, X_n suit la loi normale d'espérance nulle et d'écart-type $1/n$.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, l'application Y_n par : $\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big|X_n(\omega) - t\big|\, dt$.

On admet que, pour tout entier naturel non nul, Y_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n et Φ celle de la loi normale centrée réduite.

a) Exprimer, pour tout réel y, $F_{Y_n}(y)$ en fonction de $\Phi(y)$ et de n.

b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Exercice 57 **Oral ESCP 2012 3.3** **F1$^+$**

Q1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}\cdot$

Montrer que g est une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant g pour densité (on dit que X suit la loi d'Euler).

Q2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Q3. Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

Q4. On pose $Y = e^X$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Q5. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la même loi que Y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \text{Sup}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

V Utilisation du théorème de transfert.

Exercice 58 **Transfert.** **F1**

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y = \sqrt{X}$. On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Existence et valeur de $E(Y)$.

Exercice 59 **Transfert. Loi log-normale.** **F1**

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2.

Q1. Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Q2. a) m=0. Utiliser le théorème de transfert pour montrer l'existence et calculer $E(Y)$.

b) Traiter la même question avec m quelconque (on se ramènera au a)).

► *La loi de log-normale est abordée dans oral ESCP 2003 3.35.*

Exercice 60 **Transfert.** **F1**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Y_n est une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\dfrac{1}{a}$ et $n+1$.

On remarquera ou admettra que $a\,Y_n \hookrightarrow \gamma(n+1)$ pour se ramener au programme c'est à dire à loi gamma à un paramètre.

Existence et valeur de $E\left(\dfrac{n}{Y_n}\right)$ (resp. $V\left(\dfrac{n}{Y_n}\right)$).

On retrouve ce thème dans oral ESCP 1998 3.15.

Exercice 61 **Fonction génératrice des moments. Transfert** **F1**

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et 1.

Q1. Trouver le domaine de définition de la fonction numérique de la variable réelle $M_X : z \to E\left(e^{z\,X}\right)$ et calculer $M_X(z)$ pour tout élément z de ce domaine.

Q2 Examiner le cas ou $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 62 **Fonction génératrice des moments. Transfert** **F1$^+$**

X est une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre ν.

Trouver le domaine de définition de la fonction numérique de la variable réelle $M_X : z \to E\left(e^{z\,X}\right)$ et calculer $M_X(z)$ pour tout élément z de ce domaine.

Exercice 63 **Transfert.** **QSP ESCP 2007** **F1$^-$**

Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1, 0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Exercice 64 **Transfert. Cauchy-Schwarz** **QSP ESCP 2007** **F1**

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$.

On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance. Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Exercice 65 **Transfert.** **QSP ESCP 2012** **F1$^+$**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X\,g(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E\big(g'(X)\big) = E\big(X\,g(X)\big)$.

b) En déduire les valeurs des moments de X.

Exercice 66 **Transfert.** **QSP ESCP 2010** **F1$^+$**

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f continue sur $[a, b]$ et nulle en dehors de $[a, b]$.

Justifier l'existence d'un réel α tel que $E(|X-\alpha|)$ soit minimale. Que représente α ?

Exercice 67 **Transfert.** **D'après ESCP 2005 3.15** **F1$^+$**.

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$V(\omega) = \int_{-1}^{1} \text{Min}(x, U(\omega))\, dx \text{ et } W(\omega) = \int_{-1}^{1} \text{Max}(x, U(\omega))\, dx.$$

On admet par la suite que V et W sont des variables aléatoires.

Q1. Établir la relation $V = -\dfrac{(U-1)^2}{2}$ et en déduire la loi de V.

Calculer l'espérance de $\text{Min}(x, U)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, puis l'espérance de V. Conclusion ?

Q2. Déduire la loi de W de celle de V.

Exercice 68 **Transfert.** **ESCP 2009 3.2** **F1**

Q1. On considère la fonction f définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} t\,e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

Q2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et déterminer l'espérance $E(X^n)$ de X^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q3. a) Pour quelles valeurs du réel u, la variable aléatoire e^{uX} a-t-elle une espérance ?

b) Pour quelles valeurs du réel u, la série de terme général $\dfrac{u^n}{n!}\, E(X^n)$ est-elle convergente ?

c) Pour quelles valeurs du réel u peut-on écrire : $E\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} X^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} E(X^n)$?

► *On retrouve ce théme dans oral ESCP 1995 3.3 fait en gros jusqu'à 3 a*

Exercice 69 **Transfert. Limite centrée.** **QSP HEC 2012-1-S7** **F 1**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\, X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 70 **Densité. Loi de Gompertz. Stabilité. Transfert. Estimation.** **Oral ESCP 1998 3.15** **F1**

a est un réel strictement positif. $f : x \to a e^{x - a e^x}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet pour densité f (X suit une loi de Gompertz). Quelle est la loi de la variable aléatoire e^X ?

Q3. On veut estimer le paramètre a d'une loi de Gompertz à l'aide d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi. On pose :

$$Y_n = e^{X_1} + e^{X_2} + \cdots + e^{X_{n+1}}$$

a) Rappeler les stabilités classiques au niveau des var discrètes et à densité. Trouver la loi de Y_n.

b) Rappeler le théorème de transfert au niveau des var discrètes et à densité. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{n}{Y_n}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre a.

VI Variables aléatoires réelles à densité et géométrie

Exercice 71 **Variables aléatoires réelles à densité et géométrie** **F1$^-$**

Un point M se promène au hasard à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon de R.

La probabilité pour que M se trouve dans une portion de la boule est proportionnelle au volume de cette portion.

Étudier la variable aléatoire X égale à la distance de O à M (... $4\pi R^3/3$). Calculer $E(X)$.

Exercice 72 **Variables aléatoires réelles à densité et géométrie** **F1**

$\mathcal{R}$ est un repère orthonormé d'origine O du plan $\mathcal{P}$. A et B sont les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$. On choisit au hasard un point dans le triangle OAB. X (resp. Y) est la variable aléatoire réelle égale à l'abscisse (resp. ordonnée) de ce point. On admet que la probabilité pour que le point obtenu soit dans une partie du triangle est proportionnelle à l'aire de cette partie.

Q1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Calculer $E(Y)$.

Q2. Reprendre le problème avec X.

Exercice 73 **Variables aléatoires réelles à densité et géométrie** **ESCP 1995 3.11** **F1$^+$**

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. On tire sur la cible représentée par le carré de sommets O, I, K, J de coordonnées respectives $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. On suppose que pour toute partie A de la cible, la probabilité que le point d'impact soit dans A est égale à l'aire de A.

On note X et Y les coordonnées aléatoires du point d'impact.

Q1. Étudier X et Y.

Q2. Soit Z la variable aléatoire égale au produit XY. Déterminer $Z(\Omega)$. Pour tout t dans $Z(\Omega)$, que représente graphiquement $\{Z \leqslant t\}$.

Trouver la loi de Z. Calculer, si possible son espérance et sa variance.

Q3. Mme chose avec $T = Y/X$.

Q4. Étudier $U = [T]$ (partie entière).

▶ *On retrouve ce thème dans oral ESCP 2003 3.18. On étudie $X + Y$ et XY.*

VII Partie entière et partie décimale d'une variable aléatoire réelle à densité.

Exercice 74 **QSP HEC 2008 S9** **F1$^-$**

U est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in]0,1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Exercice 75 **F1**

Q1. X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Étudier la variable aléatoire réelle $Y = [X]$ (ou $Y = \text{Ent}\,(X)$ ou $Y = \lfloor X \rfloor$) égale à la partie entière de X.

b) Étudier la variable aléatoire réelle $Z = X - Y$.

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Montrer que la suite de terme général $X_n - [X_n]$ converge en loi (on précisera cette loi).

Thème également abordé dans oral ESCP 2006 3.27, QSP HEC 2013

Même exercice en deux versions. La première est un peu détaillée... Je corrige la seconde.

Exercice 76 **Oral ESCP 2003 3.38** **F1$^+$**

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in]0,1[, f(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{1}{1+x}$ et $\forall x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, f(x) = 0$.

Q1. a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $E(X)$ et $V(X)$.

Q2. On pose $Y = \frac{1}{X}$ et $N = \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).

a) Déterminer la loi de Y.

b) Déterminer la loi de N.

c) Y et N ont-elles une espérance ?

Q3. On pose $Z = Y - N$. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Exercice 76 **QSP ESCP 2012** **F1$^+$**

X est une variable aléatoire à densité de densité $x \to \dfrac{1}{\ln 2} \dfrac{1}{1+x} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et X ont même loi.

Déjà vu en 2010. Vu à l'oral de l'ESCP en 2008 3.25.

Exercice 77 **F1$^-$**

X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant une densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\text{Ent}\,(nX)}{n}$ converge en loi vers X.

Les deux exercices suivants abordent le même thème. Le premier est assez court, c'est une QSP.

Exercice 78 **D'après HEC 2005-11** **F 1**

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$.

On considére la variable aléatoire réelle $Y = [X]$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

Thème également abordé dans Oral ESCP 2008 3.25

Exercice 79 **Oral ESCP 2008 3.25** **F1**

Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une densité de X.

On note Y la variable aléatoire égale à la partie entière de X.

Q1. a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, expliciter $P(Y = k)$ au moyen d'une intégrale.

b) On suppose que f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$.

Montrer que Y admet une espérance si et seulement si X en admet une et que, dans ce cas : $E(Y) \leqslant E(X) \leqslant E(Y)+1$

c) Expliciter la loi de Y et son espérance dans le cas où X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Q2. Dans cette question X suit la loi normale centrée réduite.

a) Expliciter la loi de Y à l'aide de la fonction de répartition Φ de X.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparer $P(Y = -k)$ et $P(Y = k - 1)$.

c) Montrer que Y admet une espérance et calculer celle-ci.

Thème également abordé dans oral QSP HEC 2005

Exercice 80 **Oral ESCP 2002 3.20** **F1**

Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et λ un réel strictement positif.

On considère les variables aléatoires suivantes : $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$, $W = \lfloor V \rfloor$ où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de V,

puis $Y = V - \lfloor V \rfloor$ et $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - Y)$.

Q1. Déterminer les lois de V et W.

Q2. Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance.

Q3. Déterminer une densité de Z.

Q4. On considère la variable aléatoire $X = \text{Min}(1, V)$.

Déterminer la fonction de répartition de X et démontrer que $P(2X^2 - 3X \geqslant -1) \geqslant 1/2$.

Exercice 81 **Oral ESCP 1999 3.4** **F2**

A. Soit k un entier naturel strictement positif. On considère une suite $(x_n)_{n>0}$, de nombres réels appartenant au segment $[0, k[$.

On pose pour tout n entier strictement positif : $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$, $\quad r_n = f(s_n) = s_n - \lfloor s_n \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x.

Montrer que $r_{n+1} = f(f(s_n) + x_{n+1})$, pour tout $n > 0$.

B. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles continues indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $[0, k[$.

Q1. Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2, définie par $S_2 = X_1 + X_2$.

Q2. $\boxed{\text{Ici } k = 1}$. On définit la variable aléatoire R_2 par : $R_2 = S_2 - \lfloor S_2 \rfloor$.

Déterminer la fonction de répartition de R_2 en fonction de celle de S_2 et en déduire une densité de R_2.

Q3. $\boxed{\text{Ici encore } k = 1}$. Soient $(X_n)_{n>0}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$. On définit pour tout $n > 0$:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad R_n = S_n - \lfloor S_n \rfloor$$

Déterminer la loi de R_n (on pourra utiliser les résultats de la question A et un raisonnement par récurrence).

Exercice 82 **Oral ESCP 2008 3.1** **F2**

On considère deux variables aléatoires indépendantes, X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 2])$, on pose $q = 1 - p$.

On pose : $T = X + Y$, $Z = \lfloor T \rfloor$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T.

On admet que T et Z sont des variables aléatoires définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit qu'une variable aléatoire V est à densité généralisée si sa fonction de répartition F_V est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf sur un ensemble dénombrable de points. Une densité f_V de V s'obtient alors, en tout point où F_V est dérivable, par la relation $F'_V = f_V$.

Q1. On note F_T la fonction de répartition de T.

a) Donner, pour tout réel t, l'expression de $F_T(t)$ en distinguant à priori les cas : $t < 1$, $1 \leqslant t < 2$, $2 \leqslant t < 3$ et $k \leqslant t < k + 1$, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

(on remarquera que le cas particulier $2 \leqslant t < 3$ rejoint le cas général, $k \geqslant 3$).

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité généralisée.

c) Donner l'expression d'une densité de T.

Q2. a) Donner la loi de Z.

b) Calculer $E(Z)$.

c) Donner la loi de $\lfloor Y \rfloor$ ainsi que son espérance.

d) En remarquant que si x est un entier naturel et y un nombre réel, alors $\lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$, retrouver la loi de Z et donner la valeur de son espérance.

► *Thème analogue abordé à l'oral ESCP 2007 3.6*

En plus 1 **Oral ESCP 2006 3.8**

Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\, e^{a\, \frac{x-1}{x}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où exp désigne la fonction exponentielle.

Q1. Étudier la continuité de f.

Q2. Déterminer la constante C telle que $C \times f$ soit une fonction densité (on pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - \frac{1}{x}$).

Q3. Soit X une variable aléatoire de densité $C \times f$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$, où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

a) Déterminer la loi de probabilité de $\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$.

b) Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.

En plus 2 Oral ESCP 2011 3.5 $\boxed{\textbf{A relire}}$

On considère une fonction F définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles, croissante, continue, telle que $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Q1. On définit la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = F(n+1) - F(n)$.

Montrer que la série de terme général p_n est convergente et déterminer sa somme.

Q2. a) Soit x un réel fixé dans $[0,1[$. Montrer que la série de terme général $F(x+n) - F(n)$ est convergente.

b) On considère la fonction φ définie sur $[0, 1[$ par : $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (F(x+n) - F(n))$.

Montrer que φ est croissante.

c) Soient x et y deux réels fixés de $[0,1[$. Montrer que pour tout ε réel fixé strictement positif, il existe N_0 entier positif indépendant de x et y tel que, pour tout $N \geqslant N_0$: $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| < \varepsilon$

En déduire que φ est continue sur $[0,1[$.

Q3. On considère désormais que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère les variables aléatoires notées $d(X)$ et $\lfloor X \rfloor$ définies par, pour tout $\omega \in \Omega : d(X)(\omega) = X(\omega) - \lfloor X(\omega) \rfloor$ et $\lfloor X \rfloor(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a) Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ à l'aide des (p_n) et la fonction de répartition de $d(X)$.

b) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter la loi de $\lfloor X \rfloor$ et la fonction de répartition de $d(X)$. Déterminer une densité de $d(X)$, puis calculer les espérances de ces deux variables aléatoires.

► *Sur le thème partie entière-partie décimale on pourra voir encore : EDHEC 2005 EX 2, ECRICOME 2013 PB, oral ESCP 1995 3.11, 1999 3.13, 2000 3.16, 2003 3.33, 2006 3.27.*
