RÉDUCTION 1

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de la réduction ...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SF mentionne des savoirs faire.

N1 repère un exercice relativement simple.

N2 repère des exercices un peu plus plus difficiles.

Sauf mention du contraire dans la suite E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les savoir faires les plus usuels.

SF 1 Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomophisme et d'une matrice.

SF 2 Construire une base de vecteurs propes.

SF 3 Diagonaliser un endomophisme ou une matrice.

SF 4 Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice dans la recherche des valeurs propres.

SF 5 Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

SF 6 Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Les thèmes abordés.

1. **Exercices d'entraînement en dimension 2 ou 3.**

2. **Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'une matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ (resp. d'un endomorphisme en dimension finie).**

3. **Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de polynômes.**

4. **Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de fonctions.**

5. **Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de suites.**

6. **D'autres exercices.**

Exercices d'entraînement en dimension 2 ou 3.

Exercice 1 **N1$^-$** **Diagonalisation d'un endomorphisme.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Diagonaliser f si cela est possible.

Exercice 2 **N1** **Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$..**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Calculer A^n pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3 **N1$^-$** **Diagonalisation d'une matrice de permutation et d'une matrice circulante.**

Oral ESCP 1997 2-4.

a b et c sont trois éléments de $\mathbb{C}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-8 avec une application en probabilité, LYON 1991 MI Pb 1 (à l'ordre 4). On trouve dans HEC 2009 des matrices circulantes dans l'étude de suites définies par une réccurrence linéaire.

Voir le cas général un peu plus loin.

Exercice 4 **N1$^-$** **QSP ESCP 2011.**

x, y et z sont trois réels. $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 **N1$^-$** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = -4$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}\,(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.

En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Thème abordé dans ECRICOME 1994 Pb partie 2, dans oral ESCP 1997 2-22 avec les suite réelles (x_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+4} = -3x_{n+3} + 4x_{n+2} + 3x_{n+1} - 2x_n$, dans ESSEC MIII 2003.

Exercice 6 **N1$^-$** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire**

d'ordre 3 again. ESSEC MIII Éco 2003 Partie I.

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\, u_{n+1} + (1-3a)\ u_n.$$

(L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F.) .

I. Étude du cas particulier a = 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit $M\, X_n$.

En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que les vecteurs $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$ aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. a) Calculer P^{-1}(les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de $u_0,\ u_1,\ u_2$ et de l'entier naturel n.

Exercice 7 **N1⁻**

Trouver a, b, c, a', b' et c' pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

Exercice 8 **N1** **Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec paramètre.**

t est dans $\mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 **N1** **Réduction d'un endomorphisme d'endomorphismes.**

Nous reviendrons sur ce sujet dans le conducteur 2.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

u est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Q2. Pour tout f dans $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\varphi(f) = u \circ f$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 10 **N1** **Éléments propres d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec paramètre. ESCP 2000 MIII E.**

α est un réel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base d'une $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

On note Φ_α l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Q1 Montrer que 1 est valeur propre de Φ_α et déterminer, suivant les valeurs de α, une base du sous-espace propre associé (3 cas : $\alpha = 0$, $\alpha = 2$, ...).

Q2 On pose $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$ et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par f_1 et f_2.

a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de F.

b) Montrer que $\phi_\alpha(f_1)$ et $\phi_\alpha(f_2)$ sont des éléments de F.

En déduire que F est stable par Φ_α c'est à dire que $\forall u \in F,\ \Phi_\alpha(u) \in F$.

Soit $\widehat{\Phi}_\alpha$ l'endomorphisme de F induit par Φ_α (ainsi : $\forall v \in F,\ \widehat{\Phi}_\alpha(v) = \Phi_\alpha(v)$).

Donner la matrice de $\widehat{\Phi}_\alpha$ dans la base (f_1, f_2).

Q3 Montrer que Φ_α admet la valeur propre $\alpha - 1$ et que l'on peut trouver un vecteur propre associé f_3 qui ne dépend pas de α.

Q4 a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et trouver la matrice de Φ_α dans cette base.

b) Préciser l'ensemble des valeurs propres de Φ_α. Φ_α est-il diagonalisable ?

Exercice 11 **N1** **"Triangularisation" simultanée de deux endomorphismes.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. f et g sont les endomorphismes de E ayant respectivement pour matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g.

Q2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de E par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

Donner $M_{\mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(g)$.

Exercice 12 **N2** **Une petite QSP d'HEC 2010**

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

► Une remarque sur les matrices semblables.

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour montrer qu'elles sont semblables lorsque l'on ne trouve pas facilement une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$ on procède le plus souvent de la manière suivante.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ font la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est A et on montre l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit B.

Pour montrer l'existence de $\mathcal{B}'$ il convient le plus souvent de faire une analyse. Dans cette analyse on part d'une base $\mathcal{B}'$ solution et on dégage le maximum de propriétés sur les élélents de $\mathcal{B}'$.

Vient alors le moment de la synthèse où l'on construit une base solution en s'appuyant sur l'analyse. Il convient de clairement indiquer le moment où l'analyse s'arrête et où la synthèse commence. Si l'on est très pressé on peut se contenter de ne rédiger que la synthèse...

Exercice 13 **N1** **Matrices semblables 1.**

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^n et A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 14 **N1** **Matrices semblables 2.**

Q1. $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q2. Calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 15 **N1** **Matrices semblables 3.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q2. Calculer A^n pour n dans $[\![2, +\infty[\![$.

Exercice 16 **N1** **Matrices semblables 4.**

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$.

Q2. Calculer A^2 et A^4.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 **N1** **Racines carrées d'une matrice.**

Q1. $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit D un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si D commute avec C : D est diagonale.

En déduire que si $D^2 = C$ alors D est diagonale.

Q2. Déterminer le nombre d'éléments D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $D^2 = C$.

Q3. $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre d'éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = A$.

Exercice 18 **N1** **Racines $\mathbf{n}^{\text{ème}}$ d'une matrice. Oral ESCP 1995 1.7.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de A. A est-elle diagonalisable ?

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^n = A$.

a) Soit B un élément de $\mathcal{R}$. Montrer que B commute avec A.

En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B et des conséquences sur les colonnes de B.

Montrer qu'il existe trois réels a, b et f tels que : $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathcal{R}$.

Dans oral ESCP 2008 2.6 on cherche les racines $\mathbf{n}^{\text{ème}}$ *dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *de* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *($a \in \mathbb{R}$).*

Exercice 19 **N1$^+$** **Racines carrées d'une matrice non diagonalisable. Oral ESCP 1994 2.17**

f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Q2. On suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant : $g \circ g = f$.

a) Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.

En déduire que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g. g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de g est $\{1, 2\}$ ou $\{-1, -2\}$ ou $\{1, -2\}$ ou $\{-1, 2\}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels δ et ε tels que : $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$.

Q3. Résoudre l'équation : $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X^2 = A$.

Exercice 20 **N1** **Réduction d'un endomorphisme en dimension** 4.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q2. Construire (en justifiant) une base de E constituée de vecteurs propres de f.

En plus. *Contenu dans EDHEC 2008 ex 1.*

x et y sont deux réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

En plus. *Contenu dans oral ESCP 1994 2.8*

Éléments propres de $M = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

En plus. *Contenu dans oral ESCP 1995 1.11*

Éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

En plus. *Contenu dans EDHEC 1994 Pb partie 2.*

$p \in]0,1[$. $q = 1 - p$. $A = \begin{pmatrix} p & q/2 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q/2 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

En plus. *Contenu dans ECRICOME 1991 Pb partie 2.*

$M = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 12 & 0 \\ 3 & -3 & 18 & -3 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer MC. En déduire les valeurs propres de M, les sous-espaces propres de M, l'inversibilité de Q et une matrice diagonale D telle que $M = QDQ^{-1}$.

En plus. *Contenu dans ECRICOME 1992 ex 2.*

$a \in]0,1[$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$.

N est-elle diagonalisable ?

En plus. *Contenu daprès oral ESCP 2006 2.4.*

$p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. $A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \\ 0 & 0 & 1-2p & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables et calculer B^n.

Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'une matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ (resp. d'un endomorphisme en dimension finie).

- Dans les exercices qui suivent, le plus souvent, nous ferons abstraction du carractère symétrique de certaines matrices pour ne pas déborder sur le chapitre algèbre bilinéaire.
- Les exercices qui suivent sont aussi là pour s'entraîner à résoudre des systèmes linéaires de n équations et n inconnues.

Exercice 21 **N1$^-$** **Diagonalisation d'un endomorphisme de "faible" rang. HEC 2007 MIII E exercice**

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3).

Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$.

Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}\, u$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$.

Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Exercice 22 **N1** **Diagonalisation de la fameuse matrice "J" et d'un polynôme de J.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$

Q1. J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Diagonaliser J.

Q2. α et β sont deux réels. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

On Q2 cela dans ECRICOME 2003 avec $a = n-1$ et $b = -1$, dans HEC 1993 avec $a = 0$ et $b = \frac{1}{n-1}$ dans un exercice d'oral HEC 2012 avec $a = 1$ et $b = r$.

On trouve Q1 dans beaucoup d'exercices. Vu aussi EDHEC 2001 pb, EDHEC 2005 ex 3, EDHEC 2010 ex 1.

Exercice 23 **N1** **Diagonalisation d'une matrice de rang 1...**

$n \in [\![2, +\infty[\![$ et $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = \dfrac{i}{j}\cdot$ La matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 24 **N1** **Diagonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$.**

n est un entier supérieur ou égal à 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diagonaliser A.

Exercice 25 **N1$^+$** **Diagonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$ D'après l'oral ESCP 1996 1.17.**

n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 4. a et b sont deux complexes non nuls.

A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ égale à $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & a \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \\ a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

On pourra donner une méthode directe et une méthode qui utilise l'image d'un endomorphisme associé.

Exercice 26 **N1** **Diagonalisation d'une matrice de faible rang. Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2009 2.6.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

Pour simplifier les écriture on pourra poser $c_n = \dfrac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\cdot$

Q1. Justifier en une ligne que A est diagonalisable.

Q2. a) Montrer que A est de rang 2. En déduire que 0 est valeur propre de A.

b) Donner une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

Q3. $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) On pose $u = e_n$ et $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\, e_k$ (oui $n-1$! !). Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

c) Soit g l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ défini par $\forall x \in \operatorname{Im} f,\ g(x) = f(x)$. Trouver la matrice M de g dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de g.

Q4. Utiliser tout ce qui précède pour diagonaliser A.

Exercice 27 **N1$^+$** **Matrice compagnon.**

a_0, a_1, ..., a_{n-1} sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

On aura intérêt à passer par la transposée de A.

Thème abordé dans LYON MI 2006 Pb 2, oral ESCP 2000 2-11. Apparaît aussi dans oral ESCP 2004 2.2, 2011 2.10 (ou presque).

► *Les deux exercices qui suivent sont de la même famille.*

Exercice 28 **N1** **ESCP 1995 1.17**

$n = 2p - 1$ avec p élément de $[\![2, +\infty[\![$. $E = \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de E. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$. u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_n \\ & (0) & & a_{n-1} & \\ & & \iddots & & \\ & a_2 & & (0) & \\ a_1 & & & & \end{pmatrix}$$

C'est à dire que $A = (a_{ij})$ avec $a_{n-k+1,k} = a_k$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et 0 autrement

Q1. Calculer $u(e_k)$ pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$.

Q2. Montrer que e_p est un vecteur propre de u. On pose $D_p = \text{Vect}(e_p)$.

Q3. k est un élément de $[\![1, p-1]\!]$. Montrer que le $P_k = \text{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$ est stable par u. Montrer que la restriction u_k de u à P_k est un endomorphisme diagonalisable de P_k.

Q4. Montrer que u est diagonalisable.

Q5. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ? Et la matrice B^2.

Dans une QSP ESCP 2010 on trouve $\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & (0) & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & (0) & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$ *($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans indication sur n...)*

Exercice 29 **N1$^+$** **LYON 1988 MI Pb 1**

On note n un entier naturel, $n \geqslant 2$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1}e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.

b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.

2. Écrire la matrice de f relativement à B.

3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$.

Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.

a) Pour tout entier k de l'intervalle $\left[1; \dfrac{n+1}{2}\right]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.

b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $\left[1; \dfrac{n+1}{2}\right[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k\, e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k\, e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.

c) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 30 **N2** **ESCP 2006 2.9**

n est dans $\mathbb{N}^*$. $A = (a_{ij})$ est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = i$ si $i = j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & (1) & \\ & & \ddots & & \\ & (1) & & n-1 & \\ & & & & n \end{pmatrix}.$$

Q1. λ est un réel. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda \notin [\![0, n-1]\!] \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \cdots + \frac{1}{\lambda - (n-1)} = 1.$$

Q2 Trouver le nombre d'éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

On trouve un thème analogue dans ESCP 1996 1.14 avec $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Exercice 31 **N1$^+$** **Matrice circulante again. Oral ESCP 1996 1.1.**

Q1. Soit $A = (a_{p,q})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (p,q) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p+1 \text{ ou si } (p,q)=(\text{n},1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$ Diagonaliser A dans $\mathbb{C}$.

Q2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un n-uplet de nombre complexes.
Soit $B = (b_{p,q})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall (p,q) \in [\![1, n]\!]^2,\ b_{p,q} = x_k$ où $\begin{cases} k = q - p + 1 & \text{si } q > p - 1 \\ k = q - p + n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Diagonaliser B.

On trouve Q1 dans oral ESCP 1999 2-23. On trouve A également dans oral ESCP 1995 1.16..

Exercice 32 **N2** **Élément propres d'une matrice tridiagonale.**

n est un entier supérieur ou égal à 4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Q1. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose : $x_0 = x_{n+1} = 0$.

a) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$. Montrer que $AX = \lambda X$ si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0$.

b) Soit λ un élément de $\mathbb{C} - \{-2, 2\}$. Prouver que :

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0 \quad \iff \quad \exists \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \exists c \in \mathbb{C}^*,\ \begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \lambda \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = c\,(\alpha^k - \dfrac{1}{\alpha^k}) \end{cases}$$

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

Q3. a est un réel. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On trouve ce thème dans ESSEC 1996 MI , LYON 1999 MI Pb 1, HEC 1990 MI, oral ESCP 2008 2.1, dans une QSP ESCP 2006.

En plus 1 Oral ESCP 1994 2.6

p_1, p_2, ..., p_n sont n réels et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -p_1 & \cdots & \cdots & -p_n \\ p_1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

En plus 2 Oral ESCP 1994 2.13

▶ *Exercice repris à la fin.*

On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1, 2p+1]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i + j = 2p + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que A est diagonalisable et calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Figure dans une QSP ESCP 2010 avec $A = (a_{i,j})$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par :* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & si\ i+j=n+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$.

On demande les éléments propres et il n'y a pas d'indication sur n.

En plus 3 Oral ESCP 1995 1.12

Résumé : Éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \vdots & b \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a+b \end{pmatrix}$.

En plus 4 Oral ESCP 1995 1.14

Résumé : a_1, a_2, ..., a_n sont n réels et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Éléments propres de A.

On trouve dans une QSP HEC 2012, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ avec $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$...

En plus 5 Oral ESCP 1996 1.13

Résumé : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diagonalisation de A et B dans $\mathbb{C}$.

En plus 6 Oral ESCP 1996 1.14

Résumé : a_1, a_2, ..., a_n sont n réels tels que $0 < a_1 < a_2 \cdots < a_n$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ a n valeurs propres distinctes.

En plus 7 Oral ESCP 1996 1.16

J_p (resp. 0_p) est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 (resp. 0).

A est la matrice de $\mathcal{M}_{3p}(\mathbb{R})$ égale à : $\begin{pmatrix} J_p & 0_p & J_p \\ 0_p & 0_p & 0_p \\ J_p & 0_p & J_p \end{pmatrix}$. Éléments propres de A.

En plus 8 Oral ESCP 1999 2-14 et 2006 2.15

Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 3)$.

En plus 9 Oral ESCP 2001 2.5

En résumé : déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En plus 10 Oral ESCP 2004 2.22

En résumé : a_1, a_2, ..., a_n sont n éléments de $\mathbb{C}$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Éléments propres de la matrice M.

En plus 11 Oral ESCP 2009 2.8

Revient à trouver (!) les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \end{pmatrix}$.

Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de polynômes.

Un petit rappel bien utile.

P f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$.

Alors la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure. Sa diagonale fournit les valeurs propres de f.

D'une manière général il est très utile lorsque l'on cherche les valeurs propres d'un endomorphisme f de $\mathbb{K}_n[X]$ ou de $\mathbb{K}[X]$ de préciser le degré de "$f(P)$".

Pour trouver les éléments propres d'un tel endomorphisme on pourra êtra amené à faire des raisonnements sur les racines des polynômes et leur ordre de multiplicité.

On n'oubliera pas que la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans une base de cet espace vectoriel est un élément de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ (et non de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 33 **N1$^-$** **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 1.**

$E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. f est l'application qui à tout élément P de E associe le reste dans la division de AP par B.

Q0. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne des polynômes.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E (à faire très proprement).

Q2. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Q3 **N1$^+$** Retrouver les résultats de Q2 sans utiliser la matrice de f par des considérations sur les racines des polynômes.

Thème analogue dans LYON 1994 PB 1, EDHEC 2012 ex 3, ECRICOME 2002 ex1, oral ESCP 2002 2.10.

Exercice 34 **N1$^-$. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 2. Contenu dans ESCP 2008 2.12**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. $\forall P \in E,\ f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

Q0. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}$ et que f est un endomorphisme diagonalisable de E.

Q2. Montrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k.

Q3. Montrer que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ il existe un polynôme unitaire P_k et un seul appartenant à SEP $(f, k(k+1))$.

Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 35 **N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 3. Contenu dans oral ESCP 2004 2.13.**

n est un élément de $[\![3, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver la matrice de f dans la base canononique de E. En déduire le spectre de f. Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f + 2Id_E)$.

Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Sur le même modèle dans oral ESCP 2004 2.18 on trouve $f : P \to P(a) + X\,P'(a) + \dfrac{X^2}{2}\,P''(a) + X^3\,P'''(X)$. *avec* $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 36 **N1**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 4.**

C'est proche de LYON 1995 Pb 1, oral ESCP 2001 2.8, 2008 2.5, 2008 2.13. On trouve aussi presque cela dans HEC 1987 MII.

• n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P) = \lambda P$.

a) Soit α un zéro de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k. Montrer que nécessairement α vaut 1 ou -1.

b) En déduire que : $P = c(X-1)^p(X+1)^q$, avec c dans $\mathbb{R}^*$ et (p, q) dans $[\![0, n]\!]^2$.

Exprimer q et λ en fonction de p et de n.

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

L'utilisation des racines et de leurs ordres de multiplicité dans la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme de polynômes est classique. On trouve cela dans :

ECRICOME 1995 ex 1 avec $E = \mathbb{R}[X]$ *et* $f : P \to (2X+1)\,P - (X^2-1)\,P'$.

LYON 1995 pb 1 avec $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *et* $u : P \to (n-1)\,XP - (X^2-1)\,P'$.

Oral ESCP 2001 2.26, oral ESCP 2012 2.14 et ESSEC 1991 MII avec $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *et* $T : P \to P + \dfrac{1}{n}\,(1-X)\,P'$.

Oral ESCP 2001 2.8 et 2008 2.13 avec $E = \mathbb{C}_n[X]$ *et* $u : P \to (X^2+1)\,P' - nX\,P$.

Oral ESCP 2002 2.20 avec $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ *et* $\Phi : P \to \left(\dfrac{1}{4} - X^2\right)\,P'(X) + 2nX\,P(X)$ *(voir plus bas).*

Oral ESCP 2008 2.5 avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* $T : P \to X\,P(X) - \dfrac{1}{n}\big(X^2-1\big)\,P'(X)$.

Oral ESCP 2008 2.13 avec $E = \mathbb{C}_n[X]$ *et* $u : P \to (X^2+1)\,P'(X) - nX\,P$.

Oral ESCP 2011 2.17 avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* $f : P \to \left[x \to \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\right]$. *Voir plus bas.*

HEC 1987 MII avec $E = \mathbb{R}_N[X]$ *et* $f : P \to X\,P - \dfrac{1}{N}\,(X^2-1)\,P'$.

Exercice 37 **N1⁺**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 5.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et A est un élément non nul de E.

f est l'application qui à tout élément P de E associe la dérivée $n^{\text{ème}}$ de AP.

Montrer que f est un endomorphisme de E. f est-il diagonalisable ?

Thème abordé dans oral ESCP 2004 2.24, 2007 2.13.

Exercice 38 **N1**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 6. D'après oral ESCP 1995 1.5.**

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = (2X+1)\,P + (1-X^2)\,P'$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

On trouve aussi cela dans ECRICOME 1995 ex 1.

Même chose dans oral ESCP 1997 2-21 avec $P \to (X-1)(X-2)\,P' - 2X\,P$.

Exercice 39 **N1**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 7. Oral ESCP 2011 2.17.**

Q1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \neq 1$: $Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$.

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Q3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son inverse A^{-1}. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

Q4. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Le complexe α est-il racine de $f^{-1}(Q)$? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme f^{-1} puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de f.

Ce thème est abordé dans ESSEC 1984 MII, ECRICOME 2012 Pb.

On trouve dans ESSEC 1981 MI $P \to \left[\dfrac{1}{x-s}\displaystyle\int_s^x P(t)\,\mathrm{d}t\right]$ *et même* $P \to \left[\dfrac{1}{(x-s)^2}\displaystyle\int_s^x \left(\int_s^y P(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]$ *sur* $\mathbb{R}[X]$.

On trouve dans ECRICOME 1992 $P \to \left[\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_x^{2x-a} P(t)\,\mathrm{d}t\right]$ *sur* $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 40 **N1**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 8. Oral ESCP 1998 2-2.**

E est l'espace vectoriel des applications polynômiales de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 4.

$\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Phi(P)(x) = P(x) + 2x^4\,P\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. Exprimer Φ^2 en fonction de Φ et Id_E. Qu'en déduire pour les valeurs propres de Φ ?

Q3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ.

On trouve dans EDHEC 2009 ex 3 $P \to X^{2n+1}\,P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ *dans* $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$

Exercice 41 **N1**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 9. LYON 1990 MI Pb 1.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, μ_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\quad \mu_k(t) = t^k$.

Q1 Montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^k\,e^t\,dt$ est convergente .

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit f un élément de E. Montrer que l'on peut définir une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^t \, \mathrm{d}t.$ Cette fonction g dépend de f et est notée $L(f)$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) Calculer $L(\mu_0),\ L(\mu_1),\ L(\mu_2)$.

b) Montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n-1]\!]$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.

En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ L(\mu_k) = (-1)^k\, k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\, \mu_j$.

c) Montrer que, pour tout élément f de E, $L(f)$ appartient à E.

On considère l'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ de E vers E.

La question Q4 a) du texte.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Montrer que L est une application linéaire et injective.

Ma question Q4 a).

Montrer que L est un endomorphisme de E. Montrer que L est injectif puis bijectif et déterminer L^{-1}.

b) Écrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Justifier l'inversibilité de M et écrire M^{-1}.

La question Q5 du texte.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ a) Soient λ une valeur propre de L, et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ.

Montrer que λ est non nul et que, pour tout réel x, $(1-\lambda)\, f(x) = \lambda\, f'(x)$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\, x}\, f(x)$.

Montrer que φ est constante.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L. Est-ce que L est diagonalisable ?

Ma question Q5 !

Montrer, sans calcul que 1 est la seule valeur propre de L. Montrer que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par μ_0.

On trouve dans oral ESCP 2007 2.7 la recherche des éléments propres de l'endomorphisme

$P \to \left[x \to e^{-x} \displaystyle\int_{x}^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \right]$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$.

On trouve aussi cet endomorphisme dans oral ESCP 2001 2.14, exercice intégralement repris en 2012 (2.8).

$\boxed{\textbf{Exercice 42}}$ N1$^+$. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 10. ESCP 2002 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $2n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{2n})$.

On considère Φ définie sur E par : $\forall P \in E,\ \Phi(P)(X) = \left(\dfrac{1}{4} - X^2\right) P'(X) + 2nXP(X)$.

Q1. Vérifier que Φ définit un endomorphisme de E.

Q2. a) Soit λ entier relatif tel que $-n \leqslant \lambda \leqslant n$.

Trouver (α, β) dans $\mathbb{N}^2$ pour que le polynôme $P(X) = \left(X + \dfrac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^{\beta}$ de E vérifie $\Phi(P) = \lambda P$.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Q3. Déterminer la matrice A de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Q4. Déterminer une matrice A' dont les valeurs propres sont les nombres $0, 1, \dots, 2n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

Q5. Construire un endomorphisme Λ de E tel que $\Lambda(P)$ s'exprime en fonction de P, P' et P'' et admettant 0, 1, 4, 9, ..., $(2n)^2$ comme valeurs propres.

• Endomorphisme qui "n'augmente pas le degré. On trouve

$P \to (X^2-1)\,P'' + (2X+1)\,P'$ dans oral ESCP 2000 2-2 et 2008 2.20,

$P \to X(1-X)\,P'' + (1-2X)\,P'$ dans oral ESCP 2002 2.13 rt 2005 2.15,

$P \to (X^2+1)\,P'' - 2X\,P'$ dans oral ESCP 2002 2.13,

$P \to P'' - 2X\,P'$ dans oral ESCP 2007 2.12,

$P \to (X^2-1)\,P'' + (2X+1)\,P'$ dans oral ESCP 2000 2-2,

$P \to (X^2-1)\,P'' + 3X\,P'$ dans LYON MI 1996 Pb1 et 2005 Pb 1,

$P \to X\,P'' + (1-X)\,P'$ dans LYON MI 1998 Pb1,

$P \to \big((X^2-1)\,P\big)''$ dans LYON MI 2007 Pb2,

$P \to -P'' + 2X\,P' + P$ dans LYON MI 2008,

$P \to X\,P'' - (X-1)\,P'$ dans LYON MI 2011,

$P \to (X-1)\,P' - X\,P''$ dans EDHEC 1998 Pb,

$P \to \big((X^2-X)\,P\big)''$ dans EDHEC 2004 Pb,

$P \to P'' - 4X\,P'$ dans ECRICOME 2010 Ex 2,

$P \to P'(X+1)$ dans ECRICOME 2011 Ex 1,

$P \to (X-1)\,P' + P$ dans ECRICOME 2011 Pb partie I,

$P \to 2X\,P' - P''$ dans ESSEC 2002 MI.

En plus 1 D'après oral ESCP 1997 2.20

$E = \mathbb{R}[X]$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = (X-a)\left[P'(X) + P'(a)\right] - 2\left[P(X) - P(a)\right]$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et trouver ses éléments propres.

On trouve dans oral ESCP 2002 2.6 : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (X-b)\big(P'(X) + P'(b)\big) - 2\big(P(X) - P(b)\big)$.

En plus 2 Oral ESCP 2007 2.4

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par : $\varphi(P)(X) = aP(X+2) + bP(X+1) + cP(X)$, a, b et c étant des réels fixés.

Q1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que φ bijectif si et seulement si $a+b+c \neq 0$.

c) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P)(X) = (a+b+c)P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$$

Q2. On suppose dans cette question $a+b+c=0$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) A quelle condition, portant sur a, b et c, a-t-on $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$? Que vaut $\operatorname{Ker}\varphi$ dans ce cas ?

c) Montrer que si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on a $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathbb{R}_1[X]$. Quand a-t-on égalité ?

d) Montrer que φ n'a pas d'autre valeur propre que 0. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Q3. On suppose dans cette question $a+b+c \neq 0$.

a) Montrer que si λ est valeur propre de φ alors $\lambda = a+b+c$.

b) Montrer que $a+b+c$ est effectivement valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.

c) φ est-il diagonalisable ?

En plus 3

N1$^+$. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 6. D'après oral ESCP 2001 2.26, lui même adapté d'ESSEC MII 1991. On retrouve la même adaptation, ou presque, dans oral ESCP 2.14

► *Exercice repris à la fin.*

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$.

Soit T l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$Q(X) = P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X)$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

On pourra écrire indifféremment P ou $P(X)$, donc on pourra écrire $Q = P + \dfrac{1-X}{n} P'$.

Q1 Montrer que T est un endomorphisme de E.

Q2 Donner la matrice associée à T dans la base canonique de E.

Q3 Montrer que T admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ (*formulation ECSP...*). Qu'en déduire ?

JF Attention à ne pas faire d'erreur sur la valeur de λ_k...

Q4 a) Déterminer le sous–espace propre associé à la valeur propre λ_n.

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. Montrer que $P(1) = 0$.

On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R(1) \neq 0$. Montrer que $r = n-k$ et que R est constant.

c) En déduire le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k

Q5 On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ U_{j+1}(X) = T(U_j)(X)$.

a) Montrer que : $U_1(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$.

b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \ldots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \in [\![2, +\infty[\![$... ou $j \in \mathbb{N}^*$.

En plus 4 Oral ESCP 2004 2.18

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit a un réel fixé.

Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \dfrac{1}{2}\,X^2\,P''(a) + X^3 P'''(X)$.

Q1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2. Cet endomorphisme est-il inversible ?

Q3. a) Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de u ainsi que la dimension des sous–espaces propres associés.

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

En plus

Oral ESCP 2007 2.4

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par : $\varphi(P)(X) = aP(X+2) + bP(X+1) + cP(X)$, a, b et c étant des réels fixés.

Q1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que φ bijectif si et seulement si $a + b + c \neq 0$.

c) Montrer que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P)(X) = (a+b+c)P(X) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a2^k + b}{k!}\, P^{(k)}(X)$.

Q2. On suppose dans cette question $a + b + c = 0$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) A quelle condition, portant sur a, b et c, a-t-on $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$? Que vaut $\operatorname{Ker}\varphi$ dans ce cas ?

c) Montrer que si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on a $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathbb{R}_1[X]$. Quand a-t-on égalité ?

d) Montrer que φ n'a pas d'autre valeur propre que 0. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Q3. On suppose dans cette question $a + b + c \neq 0$.

a) Montrer que si λ est valeur propre de φ alors $\lambda = a + b + c$.

b) Montrer que $a + b + c$ est effectivement valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.

c) φ est-il diagonalisable ?

Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de fonctions.

Exercice 43 **N1$^-$** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 1.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est un élément de E, $\varphi(f)$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que φ est un endomorphisme de E n'ayant pas de valeur propre.

Thème abordé dans EDHEC 1997 Ex 1.

Dans oral ESCP 1994 2.22 on trouve la même chose avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ *et dans 2010 2.4 la même chose avec* $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Je propose l'exercice suivant en trois services...

Une première version avec un texte détaillé, une seconde avec un texte minimum et une variante qui est une QSP HEC 2012. Si vous choisissez la version deux ou la version 3 ne pas lire la version 1...

Je corrige les versions deux et trois.

L'exercice qui suit ces trois là en est assez proche.

Exercice 44 **N1$^+$** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 2..**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est un élément de E, $\varphi(f)$ est l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \text{ est dans }]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de E, injectif mais non surjectif.

Q2. Soit λ une valeur propre de φ et f un vecteur propre associé.

a) Montrer que λ n'est pas nul.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1]$ et que pour tout x dans cet intervalle, $(1-\lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$.

c) Déterminer f et prouver que λ appartient à $]0,1]$.

Q3. Donner le spectre de φ et ses sous-espaces propres.

Thème abordé dans une QSP HEC 2012 sans indication... Voir plus bas.

Exercice 44 **N2** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 2'.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est un élément de E, $\varphi(f)$ est l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \text{ est dans }]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. φ est-il injectif ? surjectif ?

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Exercice 45 **N2** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 2". QSP HEC 2012.**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda\, f$.

On trouve aussi cela dans l'oral ESCP 2010 1.18 (partie analyse).

Exercice 46 **N1$^+$** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 3. D'après oral ESCP 2000 2-18 et 2011- 2.2.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est un élément de E, $\varphi(f)$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

Q2. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'ensemble des fonctions impaires de E.

Q3. Soit λ un réel non nul. On se propose de trouver $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

a) Soit f un élément de $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Trouver une relation entre f et f' sur $]0, +\infty[$. En déduire f sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que si λ appartient à $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ alors f est nulle sur $\mathbb{R}$.

b) Utiliser ce qui précède pour déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

Q4. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

A noter que dans ESCP 2000 2-18 on demande de montrer que $\operatorname{Sp}\varphi = \mathbb{R}$ *ce qui est faux...*

Exercice 47 **N2** **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 4.**

Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2008 (2.8).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n l'application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ e_n(x) = x^n \exp(-x) = x^n\, e^{-x}$.

On donne un entier N non nul. Soit E l'espace vectoriel engendré par $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_N)$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, \ldots, e_N)$. est une base de E. En déduire la dimension de E.

Q2. Les éléments de E sont en particulier des applications dérivables.

On notera Δ l'opérateur de dérivation dans E. Ainsi : $\forall f \in E,\ \Delta(f) = f'$.

a) Démontrer que Δ est un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que Δ est un automorphisme de E.

c) Trouver les (!) valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ. Δ est-il diagonalisable ? !

Q3. a) Soit k un élément de $[\![0, N]\!]$ et x un élément de $[0, +\infty[$.

Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.

b) f est un élément de E. Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout élément x de $[0, +\infty[$. On note alors $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$.

Vérifier que $F \in E$, et que l'application $\Phi : f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E.

c) Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ (on pourra poser $\forall j \in [\![0, N]\!],\ A_j = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell^j\, e^{-\ell}$)

d) Démontrer que $\Phi \circ \Delta = \Delta \circ \Phi$.

Thème abordé dans EDHEC 1999 Pb (sans réduction), oral ESCP 2001 2.19.

Thème analogue dans oral ESCP 2010 2.17 avec $e_k(x) = x^k\, e^{\alpha x}$.

Dans une QSP HEC 2010 on trouve $D(f) = f' - f''$ dans $E = $ $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$

EN PLUS

Dans oral ESCP 2009 2.4, 2012 2.3 on étudie l'endomorphisme $f \to \left[x \to \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ sur l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$

Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de suites.

Exercice 48 **N1** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 1. Contenu dans oral ESCP 2007 2.1**

E est l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées. T est l'application qui a tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et que T est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Thème que l'on trouve dans oral ESCP 1996 1.8 pour des suites périodiques.

Exercice 49 **N1** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 2.**

E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On considère l'application f de E dans E qui à tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de f.

Thème abordé dans oral ESCP 2006 2.5 avec des suites périodiques.

Exercice 50 **N1** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 3.**

E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On considère l'application f de E dans E qui à tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{u_{n-1} + u_n}{2}$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de f.

Exercice 51 **N2** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 4. Oral ESCP 1998 2-15**

E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On définit pour tout élément $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ de E la suite $v = \Delta(u)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)\cdot$$

Q1 Montrer que l'application Δ ainsi définie est un endomorphisme de E.

Q2 On considère un réel λ n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{1}{p+1}\ ;\ p \in \mathbb{N} \right\}$.

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda\ \mathrm{Id}_E)$. Montrer par une récurrence adaptée que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Qu'en déduire pour le spectre de Δ ? Δ est-il injectif ?

Q3 On rappelle que si r et s sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $s \geqslant r$: $\dbinom{r}{r} + \dbinom{r+1}{r} + \dbinom{r+2}{r} + \cdots + \dbinom{s}{r} = \dbinom{s+1}{r+1}$.

a) Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose $\lambda = \dfrac{1}{p+1}$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{p} & \text{si } n \geqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que $\Delta(u) = \lambda u$.

b) Préciser le spectre de Δ.

Q4 Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose $\lambda = \dfrac{1}{p+1}\cdot$ Déterminer SEP (Δ, λ).

Q5 **Facultatif** Étudier la surjectivité de Δ.

Exercice 52 N2 **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 4 ESCP 2010 2.3.**

On note $\mathcal{S} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}},$ avec $x_n \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n, \lim\limits_{n\to-\infty} x_n$ existent$\}$.

Nous comprendrons que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées pas $\mathbb{Z}$ telles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes (donc de limites finies...).

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$.

Soit T l'application définie sur $\mathcal{S}$ par $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{Z} : y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$.

Q2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer son noyau.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux valeurs propres réelles de T, c'est-à-dire aux réels λ tels que

$\text{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$, *où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{S}$ et on pose* $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Q3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que $x \in \text{Ker}(T - \lambda Id)$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, $U_{k+1} = A_\lambda U_k$.

En déduire que pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a alors : $U_k = A_\lambda^k U_0$ (*si* $x \in \text{Ker}(T - \lambda\, Id)$ *non ?*).

Q4. a) On suppose que $\lambda \notin \{-2, 2\}$. Montrer que A_λ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

En déduire que si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \text{Ker}(T - \lambda Id)$, il existe des nombres complexes $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ tels que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on ait : $x_k = \alpha\mu_1^k + \beta\mu_2^k$.

En distinguant les deux cas $|\lambda| > 2$ et $|\lambda| < 2$, montrer que $\text{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$.

b) Que peut-on dire de $\text{Ker}(T - 2Id)$?

c) Montrer que $\text{Ker}(T + 2Id) = \{0\}$.

Conclure.

D'autres exercices.

Exercice 53 **N1** **Un marronnier !**

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non nulle. a et b sont deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

f est un endomorphisme de E tel que $(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que f est diagonalisable.

Thème abordé dans LYON 1993 MI Pb 1, EDHEC 2006 ex 1, oral ESCP 1994 2.23, oral ESCP 2005 2.9. Thème implicitement contenu dans ESCP 2006 2.17.

Dans une QSP ESCP 2008 on trouve $A(A - \alpha\, I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ *avec* $\alpha \neq 0$*...*

Dans oral ESCP 2003 on trouve $f \circ (f - \alpha\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$*, puis* $f \circ (f - \alpha\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \beta\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$*...*

Dans une QSP HEC 2010 on trouve $(f - \mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ *avec* $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 54 **N1** **Un marronnier encore !**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes de E tel que : $f \circ g - g \circ f = g$.

Q1. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $f \circ g^k - g^k \circ f = k g^k$.

Q2. Pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$ on pose : $\varphi(u) = f \circ u - u \circ f$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que g est nilpotent (c'est à dire qu'il existe r dans $\mathbb{N}$ tel que $g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Figure dans ESCP 2004 2.5. On retrouve le même thème traité matriciellement dans oral ESCP 2012 2.17.

Exercice 55 **N1** **Une QSP classique.**

A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $A^p = I_n$.

Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 56 **N1** **QSP ESCP 2007, QSP HEC 2009**

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que si $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Exercice 57 **N1$^+$** **Une QSP HEC 2011**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Dans une QSP ESCP 2012 on trouve Q2 et Q3 avec $x = y = 1$.

Exercice 58 **PC** **Endomorphisme égal à la somme de deux projecteurs qui commutent. LYON 1989 MI Pb 1 Partie A**

p et q sont deux projecteurs du $\mathbb{K}$−espace vectoriel E tels que : $p \circ q = q \circ p$. $f = p + q$.

Q0 Justifier les inclusions $\mathrm{Sp}\, p \subset \{0,1\}$ et $\mathrm{Sp}\, q \subset \{0,1\}$

Q1. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.

a) Montrer que $p\big(q(x)\big) = q\big(p(x)\big) = (\lambda - 1)\, p(x) = (\lambda - 1)\, q(x) \quad (1)$.

b) En utilisant Q0 et (1) montrer que $\lambda \in \{0,1,2\}$.

Q2. Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si : $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0_E\}$ (un sens clair ; pour l'autre Q0+(1)).

Q3. Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si : $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$ (again).

Q4. Ils ont oublié 1, toi pas , hein ?

On retrouve ce thème dans ESCP 2007 2.10.

Exercice 59 **N2** **Transvection ou presque... QSP ESCP 2007**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \geqslant 2$). φ est une forme linéaire sur E et a est un élément de E.

On considère l'application f définie sur E par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\, a$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.6, 2005 2.1 (à un coefficient $1/2$ *près), 2.15, 2007 2.17, EDHEC 2010 ex 2 (mais avec une forme linéaire définie par un produit scalaire).*

On fait une petite étude des tranvections dans oral ESCP 2005 2.10, mais il n'y a pas de réduction

---

Exercice 60 **N1** **Endomorphisme cyclique. Oral ESCP 1998 2-26**

Nous reviendrons sur ce sujet dans le conducteur 2.

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n ($n \in [\![2, +\infty[\![$). Un endomorphisme f de E est dit cyclique si l'on peut trouver x_0 élément de E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Q1. Dans cette question on suppose que f est un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que f est cyclique. Préciser son noyau et son image. f est-il diagonalisable ?

Q2. f est un endomorphisme cyclique de E et x_0 est un élément de E tel que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

a) Soit g un élément de $\mathcal{C}$. En écrivant $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$, montrer qu'il existe un élément P de $\mathbb{C}_n[X]$ (et même de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$) tel que $g = P(f)$.

b) Achever la détermination de $\mathcal{C}$.

Q3. f est un endomorphisme cyclique de E et x_0 est un élément de E tel que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E. On suppose que $f^n(x_0) = x_0$.

a) Montrer que $f^n = Id_E$.

b) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Thème abordé dans LYON MI 2001 Pb 2 LYON 2006 Pb 2, oral ESCP 1998 2-3, 2000 2-10, 2003 2.20, 2010 2.12, 2012 2.10.

Exercice 61 **N1$^+$** **Inversion d'une "matrice de passage de vecteurs propres".**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes λ_1, λ_2,..., λ_n.

$\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2,..., λ_n. Notons que SEP $(A, \lambda_j) = \text{Vect}(X_j)$

Soit P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$. On pose $P = (p_{i,j})$.

Alors P est inversible et $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = \text{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Q1 Montrer que ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que A.

En déduire l'existence d'une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}\,{}^tAQ = D$. On pose $Q = (q_{i,j})$.

Q2. a) Montrer que $A\big({}^tQ\big)^{-1} = \big({}^tQ\big)^{-1}D$.

En déduire que pour tout j dans $[\![1, n]\!]$ il existe un élément δ_j de $\mathbb{K}$ tel que $\big({}^tQ\big)^{-1}E_j = \delta_j\, PE_j$.

b) On considère la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \Delta = \text{Diag}\,(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

Montrer que $P^{-1} = \Delta\, {}^tQ$ et que $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \delta_j = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j}\, q_{k,j}}$.

Q3. On suppose ici que A est inversible. On pose $A^{-1} = (b_{i,j})$. Montrer que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\delta_k\, \dfrac{p_{i,k}\, q_{j,k}}{\lambda_k}\right)$.

Exercice 62 **N2$^+$** **Réduction de E défini par sa donnée sur deux supplémentaires de E. ESCP 2005 2.2.**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note u l'endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} \forall\, x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall\, x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$.

Q1. Donner la forme de la matrice de u dans une base de E obtenue en mettant "bout à bout" une base de E_1 et une base de E_2.

Q2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$.

Montrer que : $u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.

b) Montrer que si que λ est valeur propre de u alors λ est valeur propre de u_1 ou de u_2.

Montrer que si λ est valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

Montrer que si λ est valeur propre de u_2 sans être valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

c) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_1 mais pas de u_2. Comparer les sous-espaces propres de u et de u_1 associés à λ.

d) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_2 mais pas de u_1. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de u et de u_2 associés à λ.

Q3. On suppose dans cette question que u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 le sont.

Exercice 63 **N1** **Éléments propres d'une matrice de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$. ESCP 94 2.13**

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, 2p+1]\!]^2,\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i + j = 2p + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1. A est-elle inversible ?

Q2. A est-elle Diagonalisable ?

Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice 64 **$N1^+$**. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes. D'après oral ESCP 2001 2.26, lui même adapté d'ESSEC MII 1991. On retrouve la même adaptation, ou presque, dans oral ESCP 2.14**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$.

Soit T l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$Q(X) = P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X)$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

On pourra écrire indifféremment P ou $P(X)$, donc on pourra écrire $Q = P + \dfrac{1-X}{n} P'$.

Q1 Montrer que T est un endomorphisme de E.

Q2 Donner la matrice associée à T dans la base canonique de E.

Q3 Montrer que T admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ (*formulation ECSP...*). Qu'en déduire ?

JF Attention à ne pas faire d'erreur sur la valeur de λ_k...

Q4 a) Déterminer le sous–espace propre associé à la valeur propre λ_n.

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. Montrer que $P(1) = 0$.

On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R(1) \neq 0$. Montrer que $r = n-k$ et que R est constant.

c) En déduire le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k

Q5 On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ U_{j+1}(X) = T(U_j)(X)$.

a) Montrer que : $U_1(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$.

b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \ldots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \in [\![2, +\infty[\![$... ou $j \in \mathbb{N}^*$.

En plus 1 ESCP 2010 2.8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On pose $F = E \times E$.

On rappelle que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ et } \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Q1. Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, Montrer que $B' = ((e_1, 0), (e_2, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, e_1), (0, e_2), \ldots, (0, e_n))$ est une base de F.

Q2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base B. Soit φ l'application de F dans F définie pour $(x, y) \in F$ par : $\varphi((x, y)) = (f(x) + f(y), f(y))$.

Montrer que φ est linéaire et donner sa matrice A' dans la base B' de F.

Q3. a) Montrer que f et φ possèdent les mêmes valeurs propres et que la dimension de l'espace propre de f associé à λ est inférieure ou égale à celle de φ associé à la même valeur propre.

b) On suppose que f est diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de f. Montrer que les sous-espaces propres de f et de φ associés à λ sont de même dimension.

(On pourra considérer une base B constituée de vecteurs propres de f et comparer les rangs des matrices associées à $f - \lambda Id_E$ et $\varphi - \lambda Id_F$ relativement aux bases B et B' associée à B.)

Par le même raisonnement, montrer que la dimension du noyau de φ est le double de celui de f.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable.

En plus 2 ESCP 2007 2.14.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère trois endomorphismes de E, notés f, g et h tels que :

$$\begin{cases} h \circ f - f \circ h &= 2f \\ h \circ g - g \circ h &= -2g \\ f \circ g - g \circ f &= h \end{cases}$$

On suppose de plus que si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable à la fois par f, g et h, alors $F = \{0_E\}$ ou $F = E$.

Soit λ une valeur propre de h.

Q1. Soit x un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ. Montrer que : $h\big(f(x)\big) = (\lambda + 2)f(x)$.

Q2. Montrer qu'il existe un vecteur non-nul x_0 et λ_0 un réel tels que : $h(x_0) = \lambda_0\, x_0$ et $f(x_0) = 0$.

Q3. On définit la famille de vecteurs $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ par le vecteur x_0 trouvé à la question précédente et la relation de récurrence : $\forall k \in [\![0, n-2]\!], x_{k+1} = g(x_k)$.

Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\begin{cases} h(x_k) = (\lambda_0 - 2k)x_k \\ g(x_k) = x_{k+1} \\ f(x_k) = k(\lambda_0 - k + 1)x_{k-1} \end{cases}$.

en posant $x_{-1} = 0$.

Q4. Montrer que la famille $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est une base de E.

En plus 3 Oral ESCP 2003 2.10

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Q1. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_1^j + \lambda_2^j + \cdots + \lambda_n^j = n$.

On se propose de déterminer les λ_k. Pour cela, on pose $S(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ et on note p le nombre de racines distinctes de S et $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ l'ensemble des racines de S.

Enfin, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note n_i l'ordre de multiplicité de la racine μ_i de S.

a) Montrer que la matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de terme général $m_{i,j} = \mu_j^{i-1}$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ est inversible.

b) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, donner la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^j$.

c) On note $X = \begin{pmatrix} n_1(\mu_1 - 1) \\ \vdots \\ n_p(\mu_p - 1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Calculer MX.

d) Déduire de ce qui précède que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i = 1$.

Q2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

a) Montrer que $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

b) En déduire que $\forall\,(A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{tr}(A^j) = n$.

Déterminer la matrice A.

En plus 4 Oral ESCP 2010 2.11

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre* p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(x_0) = x_0$,
- la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E,
- la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée *un cycle* de f.

Soit f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p et soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

Q1. Montrer que $p \geqslant n$.

Q2. Déterminer l'endomorphisme f^p. En déduire que f est inversible.

Q3. On note m le plus grand des entiers k tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$, et qu'il en est de même pour $f^k(x_0)$ pour tout $k > m$.

Q4. En déduire que $m = n$ et que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Q5. Déterminer la forme de la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$ précédente.

Q6. a) Soit λ une valeur propre de f. Montrer que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.
