# RÉDUCTION 2

**P** mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de la réduction...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

**SF** mentionne des savoirs faire.

**N1** repère un exercice relativement simple.

**N2** repère des exercices un peu plus plus difficiles.

Sauf mention du contraire dans la suite $E$ est un espace sur $\mathbb{K}$.

## Des compléments basiques et usuels.

**Complément 1 : Valeurs propres et des sous-espaces propres de $A^{-1}$.**

**Complément 2 : Valeurs propres et des sous-espaces propres de ${}^tA$.**

**Complément 3 : CNS pour qu'une matrice ou un endomorphisme n'ayant qu'une valeur propre soit diagonalisable.**

**Complément 4 : Projecteurs spectraux.**

**Exercice 1** **N1** **Valeurs propres et des sous-espaces propres de $A^{-1}$.**

► *À savoir faite par cœur.*

$A$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Comparer les sous-espaces propres de $A^{-1}$ avec ceux de $A$.

Montrer que $A^{-1}$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

▲ *Ceci vaut aussi pour un automorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle.*

**Exercice 2** **N1** **Valeurs propres et des sous-espaces propres de ${}^tA$.**

► *À savoir faite par cœur.*

$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.

Comparer les dimensions des sous-espaces propres de ${}^tA$ et de $A$.

Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

**Exercice 3** **N1** **Endomorphisme (resp. matrice) diagonalisable n'ayant qu'une valeur propre**.

► *À savoir faite par cœur.*

Q1. $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n'ayant qu'une seule valeur propre $\lambda$.

Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

Q2. $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre $\lambda$ et une seule.

Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

**Exercice 4** **N1** **Projecteur spectraux**.

$f$ est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de $f$. On suppose que $s \geqslant 2$.

Pour tout $i$ dans $[\![1, s]\!]$, on note $p_i$ la projection sur SEP $(f, \lambda_i)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}$ SEP $(f, \lambda_j)$.

Q1. $i$ est un élément de $[\![1, s]\!]$. Justifier la définition de $p_i$.

Q2. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N},\ f^r = \lambda_1^r\, p_1 + \lambda_2^r\, p_2 + \cdots + \lambda_p^r\, p_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r\, p_i$.

*Les puristes valideront ce qui précède avec $r \in \mathbb{N}^*$ mais devront faire attention dans la question suivante...*

Montrer que si $Q$ est un éléments de $\mathbb{K}[X]$, $Q(f) = \sum\limits_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\, p_i$.

Q3. Soit $j$ un éléments de $[\![1, s]\!]$.

Justifier l'existence et l'unicité d'un élément $L_j$ de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, s]\!],\ L_j(\lambda_i) \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $p_j = L_j(f)$.

*Thème abordé dans ESCP 2003 2.7, 2011 2.15.*

## Réduction et polynôme ou polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme.

**Complément $\boxed{5}$ : Si $A$ est diagonalisable $P(A)$ est diagonalisable.**

**Complément $\boxed{6}$ : Polynôme minimal.**

**Complément $\boxed{7}$ : Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.**

**Thème classique $\boxed{1}$ : Comparaison de $\mathrm{Sp}\, P(A)$ et $P\,(\mathrm{Sp}\, A)$.**

**Thème classique $\boxed{2}$ : Dimension de l'espace vectoriel des polynômes d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisable.**

**Thème classique $\boxed{3}$ : Toute matrice de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.**

**Thème classique $\boxed{4}$ : Endomorphisme cyclique.**

---

Quelques rappels.

$P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Si $f$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, f^k$.

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ : $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, A^k$.

**P** $\lambda$ est un éléments de $\mathbb{K}$ et, $P$ et $Q$ sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Si $f$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $\boxed{(\lambda\, P + Q)(f) = \lambda\, P(f) + Q(f)}$ et $\boxed{(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)}$

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ : $\boxed{(\lambda\, P + Q)(A) = \lambda\, P(A) + Q(A)}$ et $\boxed{(PQ)(A) = P(A)\, Q(A)}$ .

**P** $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $P$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $Q$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{\text{Si } B = P^{-1}AP \text{ alors } Q(B) = P^{-1}Q(A)P} \ .$$

**P** $Q$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et $D$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Si } D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ alors } Q(D) = \mathrm{Diag}\,\big(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n)\big)} \ .$$

**P** $f$ est un endomorphisme de $E$, $u$ est un élément de $E$ et $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u}$
2. Soit $Q$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$
   - $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } Q(f)(u) = Q(\lambda)\, u}$.
   - Si $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors $u$ est un vecteur propre de $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

**P** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X}$

2. Soit $Q$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

- $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } Q(A)X = Q(\lambda)\, X}$.

- Si $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors $X$ est un vecteur propre de $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

**P** $f$ est un endomorphisme de $E$ et $Q$ un polynôme annulateur de $f$.

L'ensemble des valeurs propres de $f$ est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de $Q$.

**P** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q$ un polynôme annulateur de $A$.

L'ensemble des valeurs propres de $A$ est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de $Q$.

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ alors $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si $A$ est diagonalisable, $Q(A)$ est diagonalisable.

3. Si $D$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ alors $Q(D)$ est diagonale et $Q(D) = P^{-1}Q(A)P$.

$E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle $n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $Q$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$ respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $Q(f)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si $f$ est diagonalisable, $Q(f)$ est diagonalisable.

**Exercice 5** **N1** **Construction d'un polynôme annulateur.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$ et $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in E,\ T(M) = M - \mathrm{tr}(M)\, A$ ($\mathrm{tr}(M)$ est la trace de $M$ donc la somme de ses éléments diagonaux).

Q1. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.

Q2. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que $T$ soit bijectif.

Déterminer $T^{-1}$ lorsque $T$ est bijectif.

b) Caractériser $T$ lorsque $T$ n'est pas bijectif.

Q3. a) Trouver un polynôme annulateur de $T$ de degré 2.

b) Retrouver alors le résultat de Q2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $T$. $T$ est-il diagonalisable ?

*Thème abordé dans EDHEC 2005 ex 1.*

---

**Exercice 6** **N1$^-$** **Polynôme minimal. ESCP 2009 2.13**

$E = \mathbb{R}^3$. $f$ est l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Préciser la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et déterminer $P^{-1}$.

Q3. a) Montrer que $Q = (X-1)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur de $A'$.

b) Montrer que $A'$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.

c) Montrer que $A$ et $A'$ ont mêmes polynômes annulateurs.

d) Déterminer un polynôme annulateur non nul de $A$ de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

---

**Exercice 7** **N1** **Cours : existence d'un polynôme annulateur non nul pour une matrice**.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.*

---

**Exercice 8** **N1** **Dans C au moins une racine d'un polynôme annulateur non nul est valeur propres**.

Soient $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P$ un polynôme annulateur non nul de $A$.

Montrer que l'une au moins des racines de $P$ est une valeur propre de $A$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

---

*L'exercice qui suit n'est autre que la concaténation des deux précédents mais je préfère le rendre autonome.*

---

**Exercice 9** **N1** **Existence d'une valeur propre pour une matrice à coefficients complexes**.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

---

**Exercice 10** **N1** **Polynôme d'une matrice diagonalisable**

$A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $P$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $Q$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que si $B = P^{-1}AP$ alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.

Application. Montrer que si $A$ est diagonalisable $Q(A)$ est diagonalisable et $\operatorname{Sp} Q(A) = Q(\operatorname{Sp} A)$.

▲ *Ce dernier résultat vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

---

**Exercice 11** **Comparaison entre $\mathbf{P}(\operatorname{Sp}\mathbf{A})$ et $\operatorname{Sp}\mathbf{P}(\mathbf{A})$**.

$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

**N1** Q1. Montrer que $P(\operatorname{Sp} A) \subset \operatorname{Sp} P(A)$.

**N2** Q2. Ici $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$. Montrer que $P(\operatorname{Sp} A) = \operatorname{Sp} P(A)$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{K}$ dans Q1 et sur $\mathbb{C}$ dans Q2.*

---

**Exercice 12** **N1** **Comparaison entre $\mathbf{P}(\operatorname{Sp} \mathbf{A})$ et $\operatorname{Sp} \mathbf{P}(\mathbf{A})$ suite et fin...**

$n$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A = E_{1,2} - E_{2,1}$ et $P = X^2$.

Montrer que $P(\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} A)$ est strictement contenu dans $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} P(A)$.

---

**Exercice 13** **N2** **Polynôme minimal**.

$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que si $P$ est un polynôme annulateur non nul de $A$, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de $A$ est l'ensemble des multiples de $P$ et le spectre de $A$ coïncide avec l'ensemble des zéros de $P$.

Q2. Montrer que $A$ possède un polynôme annulateur unitaire $P_0$ et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de $A$ soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.

Notons que le spectre de $A$ est l'ensemble des zéros de $P_0$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

*Thème abordé dans oral ESCP 2010 2.11*

---

**Exercice 14** **N2** **Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 1).**

$n \in \mathbb{N}^*$. $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$.

Q1. On suppose que $f$ est diagonalisable. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de $f$ et $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

$P$ est donc un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ constituée de vecteurs de $f$ respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$.

Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(f)(e_i) = P(\alpha_i)\, e_i = 0_E$. En déduire que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Morale ?

Q2. Un petit résultat préliminaire pour la réciproque.

a) $g$ et $h$ sont deux endomorphismes de $E$. On pose $\forall x \in \operatorname{Ker}(h \circ g),\ \varphi(x) = g(x)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} h$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(h \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Ker} g$.

b) Généraliser ce dernier résultat à $r$ endomorphismes de $E$.

Q3. On suppose que $f$ possède un polynôme annulateur $Q$ scindé à racines simples.

Ainsi il existe $\lambda$ dans $\mathbb{K}^*$, il existe $r$ dans $\mathbb{N}^*$ et il existe $r$ éléments $\gamma_1$, $\gamma_2$, ..., $\gamma_r$ de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que $Q = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \gamma_k)$.

a) Montrer que $T = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \gamma_k)$ est encore un polynôme annulateur de $f$.

En déduire, à l'aide de Q2, que $\dim E \leqslant \sum_{k=1}^{r} \dim \operatorname{Ker}(f - \gamma_k \operatorname{Id}_E)$.

b) $I$ est l'ensemble des éléments $i$ de $[\![1, r]\!]$ tels $\operatorname{Ker}(f - \gamma_i \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Montrer par double inclusion que $\operatorname{Sp} f = \{\gamma_i\,, i \in I\}$. Prouver enfin que $f$ est diagonalisable et conclure l'exercice.

▲ *Ceci vaut aussi pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

*Thème abordé dans oral ESCP 2011 2.5.*

---

**Exercice 15** **N2** **Lemme des noyaux. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 2).**

$f$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

Q1. $A$ et $B$ sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que les seuls éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui divisent $A$ et $B$ sont les polynômes de degré 0 c'est à dire les polynômes constants et non nuls. On dira que $A$ et $B$ sont étrangers ou premiers entre eux.

a) On pose $\mathcal{S} = \{AU + BV\,; (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$. $D$ est un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimum.

Dire pourquoi un tel $D$ existe et montrer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de $D$ (on procédera par double inclusion et on pourra utiliser la division euclidienne).

b) En remarquant que $A$ et $B$ sont dans $\mathcal{S}$, montrer que $D$ est constant et en déduire qu'il existe deux éléments $U_0$ et $V_0$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) \oplus \operatorname{Ker} B(f)$.

Q2. a) $r$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $P_1$, $P_2$, ..., $P_r$ sont $r$ éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux étrangers. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_r)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f).$$

b) $r$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_r$ sont $r$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Montrer que : $\operatorname{Ker}\big((X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)\big)(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1\, Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_r\, Id_E)$.

Q3. On suppose ici que $E$ est de dimension finie non nulle.

Déduire de ce qui précède que si $f$ admet un polynômes annulateur scindé à racines simples alors $f$ est diagonalisable.

Montrer la réciproque.

▲ *Ce dernier résultat vaut encore pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

---

**Exercice 16** **N1** **Espace vectoriel des polynômes d'une matrice carrée $A$ diagonalisable.**

$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de $A$.

On suppose que $A$ est diagonalisable. Ainsi il existe un matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q1. Montrer que si $S$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors $S(A) = PS(D)P^{-1}$.

Q2. On pose $T = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.

a) Montrer que $T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) Montrer que $\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$ est l'ensemble des multiples de $T$.

Q3. $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'il est engendré par $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$.

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension $p$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

---

**Exercice 17** **N2** **Endomorphisme cyclique again.**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ ($n \in [\![3, +\infty[\![$).

Un endomorphisme $f$ de $E$ est cyclique s'il existe un vecteur $x_0$ de $E$ tel que $(f_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

Q1. Soit $f$ un endomorphisme cyclique de $f$ et $x_0$ un élément de $E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est la famille des coordonnées de $f^n(x_0)$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. a) Écrire la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

b) Montrer que ce type de matrice caractérise les endomorphismes cycliques.

Q2. a) Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

En déduire que tout polynôme annulateur non nul de $f$ a un degré supérieur ou égal à $n$.

b) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^n\big(f^k(x_0)\big) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, f^i\big(f^k(x_0)\big)$.

En déduire que $P = X^n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, X^i$ est un polynôme annulateur non nul de $f$.

Q3. a) Soit $\lambda$ une racine de $P$ et $Q$ le quotient de $P$ par $X - \lambda$.

Montrer que si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et en déduire une contradiction. Conclusion ?

b) Montrer que les valeurs propres de $f$ sont les racines de $P$. Que dire de $f$ si $P$ admet $n$ racines distinctes ?

c) On suppose que $f$ est diagonalisable et on note $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_p$ ses valeur propres distinctes.

Montrer que $S = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$ est un polynôme annulateur non nul de $f$ et en déduire que $p = n$.

d) Conclure cette question.

Q4. $g$ est un endomorphisme diagonalisable de $E$ ayant $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$.

Pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, $e_i$ est un vecteur propre de $g$ associé à la valeur propre $\alpha_i$. On pose $x_0 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

On considère $n$ éléments $\gamma_0$, $\gamma_1$, ..., $\gamma_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k\, g^k(x_0) = 0_E$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k\, \lambda_i^k \right) e_i = 0_E$. En déduire que $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$... et que $g$ est cyclique.

*Thème abordé dans LYON MI 2001 Pb 1, LYON 2006 Pb 2, oral ESCP 1998 2-26, 2000 2-10, 2003 2.20, 2010 2.12, 2012 2.10.*

---

*Les deux exercices qui suivent traitent le même thème. Le second est sans indication...*

**Exercice 18** **N2$^+$** **Toute matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire. Application. Oral ESCP 2012 2.11**

Soit $E$ un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $f$ un endomorphisme de $E$.

Q1. a) Soit $P$ un polynôme annulateur de $f$ de la forme $P = (X - \lambda)Q$. Montrer que si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, alors $Q$ est un polynôme annulateur de $f$.

Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de $f$ tel que toute racine de $R$ est une valeur propre de $f$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f$, montrer qu'il existe un hyperplan $H$ de $E$ contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$, où $\mathrm{Id}_E$ désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que la restriction de $f$ à $H$ est un endomorphisme de $H$.

d) Montrer par récurrence sur $n$, que tout endomorphisme de $E$ admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

Q2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $p$ complexes distincts. Soit $i$ un élément de $[\![1, p]\!]$.

Justifier l'existence de polynômes $Q_i$ tels que, pour $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Q_i(0) = 0$.

Q3. La trace $\mathrm{tr}(M)$ d'une matrice carrée $M$ est par definition la somme de ses coefficients diagonaux. On admet que deux matrices semblables ont la même trace.

On suppose dans la suite que la matrice $M$ de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$ est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^k) = 0$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f$.

Montrer qu'il existe $p$ entiers non nuls $m_1$, $m_2$, ..., $m_p$, indépendants de $P$, tels que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_j P(\lambda_j) = 0$.

b) En prenant pour $P$ des polynômes introduits dans la question 2, montrer que $M$ est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $M^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

---

**Exercice 19** **N2$^+$** **Toute matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire. Version 2.**

Q1. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ a au moins une valeur propre.

Q2. Montrer par récurrence sur $n$ que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

## Localisation des valeurs propres.

**Complément** $\boxed{8}$ : **Disque de Gershgorin.**

**Complément** $\boxed{9}$ : **Valeurs propres d'une matrice stochastique.**

**Exercice 20** **N1⁺** **Disques de Gerschgorin.**

*À savoir faire par cœur.*

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $i$ élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ (partir de $AX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul et considérer $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$).

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-7, ESSEC 2009

**Exercice 21** **N2** **Ovales de Cassini.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $i$ élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Pour tout $(i, j)$ élément de $[\![1, n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}|\,|z - a_{jj}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} C_{ij}$.

---

**Exercice 22** **N1** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 1**.

*À savoir faire par cœur.*

Soit $A = (a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$.

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de $A$.

Q2. Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ et soit $k$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

*Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1 et 2.16, 2010 2.6, 2011 2.18, LYON 2010 Pb1, HEC 1993 (qui traite de la limite de la suite des puissances d'une matrice stochastique ; on retrouve la seconde partie de ce problème dans oral ESCP 2010 2.9). On parle encore de matrice stochastique dans oral ESCP 2004 2.20, 2007 2.5, 2011 2.8 dans ESCP MI 1996 et elles sont très présentes dans les problmes de probabilité.*

---

**Exercice 23** **N2** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2**.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments $A = (a_{k,\ell})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$$

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour le produit matriciel.

Q2. a) Montrer que 1 est valeur propre de $A$.

b) Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ et soit $k$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

★ Dans la suite $A$ un élément de $\mathcal{S}$ tel que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} > 0$.

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ de module 1. On se propose de montrer que $\lambda = 1$ et que $\dim \text{SEP}\ (A, \lambda) = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. $k$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \underset{1 \leqslant \ell \leqslant n}{\text{Max}} |x_\ell|$.

**Au choix Q3 ou Q4**.

Q3. a) Montrer que $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right|$. en déduire qu'il existe un réel $\theta$ tel que : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left(\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} - 1\right) = 0$.

b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\, x_k$ (prendre la partie réelle au niveau de l'égalité précédente et remarquer que $\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$ a une partie réelle inférieure ou égale à 1).

c) Conclure.

Q4. a) Soient $r$ un éléments de $[\![2,+\infty[\![$ et $z_1$, $z_2$, ..., $z_r$ $r$ complexes.

Montrer que $|z_1+z_2+\cdots+z_r| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|$ si et seulement si il existe un réel $\theta$ et des réels positifs ou nuls $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_r$ tels que $\forall k\in[\![1,r]\!],\ z_k=\rho_k\, e^{i\theta}$.

b) Montrer que $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k|$. Conséquence ?

c) Utiliser la dernière égalité pour montrer que $|x_1|=|x_2|=\cdots=|x_n|$.

d) Utiliser ce qui précède pour prouver que $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

e) Conclure.

*Remarque Si $A$ est stochastique (et donc si on ne suppose plus que les coefficients de $A$ sont strictement positifs), toute valeur propre de $A$ de module 1 distincte de 1 est une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité avec $1\leqslant q\leqslant n$. Voir l'exercice suivant.*

Q5. On suppose ici que $A$ appartient à $\mathcal{S}$ est que l'une des puissances de $A$ à des coefficients strictement positifs.

Montrer que le résultat précédent vaut encore.

*Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1. et 2.16, 2011 2.18.*

---

**Exercice 24** **N2$^+$** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2$^+$. ESCP 2011 2.18.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices $A$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A=(a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, alors $a_{k,\ell}\geqslant 0$, pour tout $(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$ ;

ii) si on note $U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU=U$. *Formulation ESCP !!*

Q1. a) Montrer que le produit de deux élément de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. *Question ajoutée*

b) $\mathcal{S}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

Q2. Soit $A=(a_{k,\ell})$ un élément de $\mathcal{S}$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de $A$.

b) Soit $\lambda$ une valeur propre (réelle ou complexe) de $A$. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

En considérant une coordonnée de module maximal de $X$, montrer que $|\lambda|\leqslant 1$.

Q3. Soit $z_1,\ldots,z_p$, $p$ nombres complexes ($p\geqslant 2$) vérifiant : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{p} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}|z_k|$.

Montrer qu'il existe des réels positifs ou nuls $\rho_1,\ldots,\rho_p$ et un réel $\theta$, tels que pour tout $k$ de $[\![1,p]\!]$, on a : $z_k=\rho_j\, e^{i\theta}$.

*Question légèrement modifiée pour obtenir un résultat plus standard.*

Q4. Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de $A$ telle que $|\lambda|=1$. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose :

$|x_k| = \operatorname*{Max}_{\ell\in[\![1,n]\!]}|x_\ell|$

a) Montrer qu'il existe $r\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_r=\lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul $q$ tel que $\lambda^q=1$.

---