RÉDUCTION 2

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de la réduction...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SF mentionne des savoirs faire.

N1 repère un exercice relativement simple.

N2 repère des exercices un peu plus plus difficiles.

Sauf mention du contraire dans la suite E est un espace sur $\mathbb{K}$.

Des compléments basiques et usuels.

Complément 1 : Valeurs propres et des sous-espaces propres de A^{-1}.

Complément 2 : Valeurs propres et des sous-espaces propres de ${}^tA$.

Complément 3 : CNS pour qu'une matrice ou un endomorphisme n'ayant qu'une valeur propre soit diagonalisable.

Complément 4 : Projecteurs spectraux.

Exercice 1 **N1** **Valeurs propres et des sous-espaces propres de A^{-1}.**

► *À savoir faite par cœur.*

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Comparer les sous-espaces propres de A^{-1} avec ceux de A.

Montrer que A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

▲ *Ceci vaut aussi pour un automorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle.*

Exercice 2 **N1** **Valeurs propres et des sous-espaces propres de ${}^tA$.**

► *À savoir faite par cœur.*

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.

Comparer les dimensions des sous-espaces propres de ${}^tA$ et de A.

Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 3 **N1** **Endomorphisme (resp. matrice) diagonalisable n'ayant qu'une valeur propre**.

► *À savoir faite par cœur.*

Q1. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n'ayant qu'une seule valeur propre λ.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.

Q2. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre λ et une seule.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

Exercice 4 **N1** **Projecteur spectraux**.

f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. λ_1, λ_2, ..., λ_s sont les valeurs propres distinctes de f. On suppose que $s \geqslant 2$.

Pour tout i dans $[\![1,s]\!]$, on note p_i la projection sur SEP (f,λ_i) parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \text{SEP }(f,\lambda_j)$.

Q1. i est un élément de $[\![1,s]\!]$. Justifier la définition de p_i.

Q2. Montrer que $\forall r\in\mathbb{N},\ f^r = \lambda_1^r\,p_1 + \lambda_2^r\,p_2 + \cdots + \lambda_p^r\,p_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r\,p_i$.

Les puristes valideront ce qui précède avec $r \in \mathbb{N}^*$ mais devront faire attention dans la question suivante...

Montrer que si Q est un éléments de $\mathbb{K}[X]$, $Q(f) = \sum\limits_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\,p_i$.

Q3. Soit j un éléments de $[\![1,s]\!]$.

Justifier l'existence et l'unicité d'un élément L_j de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ tel que $\forall i\in[\![1,s]\!],\ L_j(\lambda_i)\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Montrer que $p_j = L_j(f)$.

Thème abordé dans ESCP 2001 2.28, 2003 2.7, 2009 2.15, 2011 2.15.

En plus $N\in[\![2,+\infty[\![$ et $E=\mathbb{C}^N$.

p_1, p_2, ..., p_n sont n endomorphismes non nuls de E. x_1, x_2, ..., x_n sont n nombres complexes distincts.

f est un endomorphisme de E tel que :

$$\forall r\in\mathbb{N},\ f^r = \sum_{k=1}^{n} x_k^r\,p_k = x_1^r\,p_1 + x_2^r\,p_2 + \cdots + x_n^r\,p_n \quad (1)$$

Q1 Montrer que pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$: $\quad P(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(x_k)\ p_k$.

Q2 $U = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, U_i est le quotient de U par $X-x_i$ ($U_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}(X-x_k)$).

Enfin pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on pose $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)}\ U_i$.

a) Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Montrer que : $L_i(x_j) = \begin{cases}1 & \text{si } j=i\\ 0 & \text{si } j\neq i\end{cases}$

b) Montrer en utilisant Q1 que $U(f)$ est l'endomorphisme nul. Qu'en déduire pour $\text{Sp}(f)$?

c) Montrer que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $p_i = L_i(f)$ (utiliser Q1). En déduire que si i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$:

$$p_j\circ p_i = \begin{cases}0 & \text{si } j\neq i\\ p_i & \text{si } j=i\end{cases}$$

(on rappelle que si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{C}[X]$: $(PQ)(f) = P(f)\circ Q(f)$

Par des considérations analogues prouver que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$: $(f-x_ie)\circ p_i = 0$.

Q3 a) Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ on pose $F_i = \text{Ker}(f-x_ie)$.

$i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\operatorname{Im} p_i \subset F_i$ (utiliser Q2.c). En déduire que x_i est valeur propre de f.

Justifier alors que $\operatorname{Sp} f = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

b) En utilisant (1) pour $r = 0$, montrer que $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \cdots + \operatorname{Im} p_n$.

Montrer encore que : $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \cdots + \operatorname{Im} p_n \subset F_1 + F_2 + \cdots + F_n \subset E$.

En déduire que f est diagonalisable et que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\operatorname{Im} p_i = F_i$.

Montrer enfin que si i est élément de $[\![1, n]\!]$, p_i est la projection sur $\operatorname{Im} p_i = F_i$ parallèlement à $G_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} F_k$

Thème abordé dans oral ESCP 2011 2.15.

Réduction et polynôme ou polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Complément $\boxed{5}$: Si A est diagonalisable $P(A)$ est diagonalisable.

Complément $\boxed{6}$: Polynôme minimal.

Complément $\boxed{7}$: Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Thème classique $\boxed{1}$: Comparaison de $\mathrm{Sp}\, P(A)$ et $P(\mathrm{Sp}\, A)$.

Thème classique $\boxed{2}$: Dimension de l'espace vectoriel des polynômes d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisable.

Thème classique $\boxed{3}$: Toute matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

Thème classique $\boxed{4}$: Endomorphisme cyclique.

Quelques rappels.

$P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, f^k$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, A^k$.

P λ est un éléments de $\mathbb{K}$ et, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $\boxed{(\lambda\, P + Q)(f) = \lambda\, P(f) + Q(f)}$ et $\boxed{(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)}$

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\boxed{(\lambda\, P + Q)(A) = \lambda\, P(A) + Q(A)}$ et $\boxed{(PQ)(A) = P(A)\, Q(A)}$.

P A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{\text{Si } B = P^{-1}AP \text{ alors } Q(B) = P^{-1}Q(A)P} \; .$$

P Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Si } D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ alors } Q(D) = \mathrm{Diag}\,\big(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \dots, Q(\alpha_n)\big)} \; .$$

P f est un endomorphisme de E, u est un élément de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

   - $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } Q(f)(u) = Q(\lambda)\, u}$.
   - Si u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors u est un vecteur propre de $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

P A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

- $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } Q(A)X = Q(\lambda)\, X}$.

- Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors X est un vecteur propre de $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

P f est un endomorphisme de E et Q un polynôme annulateur de f.

L'ensemble des valeurs propres de f est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

P A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un polynôme annulateur de A.

L'ensemble des valeurs propres de A est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associées aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n alors $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si A est diagonalisable, $Q(A)$ est diagonalisable.

3. Si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ alors $Q(D)$ est diagonale et $Q(D) = P^{-1}Q(A)P$.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n. Soit f un endomorphisme de E et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associées aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n alors $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $Q(f)$ respectivement associées aux valeurs propres $Q(\lambda_1)$, $Q(\lambda_2)$, ..., $Q(\lambda_n)$.

2. Si f est diagonalisable, $Q(f)$ est diagonalisable.

Exercice 5 **N1** **Construction d'un polynôme annulateur.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in E,\ T(M) = M - \text{tr}(M)\, A$ ($\text{tr}(M)$ est la trace de M donc la somme de ses éléments diagonaux).

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Q2. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(A)$ pour que T soit bijectif.

Déterminer T^{-1} lorsque T est bijectif.

b) Caractériser T lorsque T n'est pas bijectif.

Q3. a) Trouver un polynôme annulateur de T de degré 2.

b) Retrouver alors le résultat de Q2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de T. T est-il diagonalisable ?

Thème abordé dans EDHEC 2005 ex 1.

Exercice 6 N1$^-$ **Polynôme minimal. ESCP 2009 2.13**

$E = \mathbb{R}^3$. f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et déterminer P^{-1}.

Q3. a) Montrer que $Q = (X-1)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur de A'.

b) Montrer que A' n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.

c) Montrer que A et A' ont mêmes polynômes annulateurs.

d) Déterminer un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

Exercice 7 N1 **Cours : existence d'un polynôme annulateur non nul pour une matrice**.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.*

Exercice 8 N1 **Dans C au moins une racine d'un polynôme annulateur non nul est valeur propres**.

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

Montrer que l'une au moins des racines de P est une valeur propre de A.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

L'exercice qui suit n'est autre que la concaténation des deux précédents mais je préfère le rendre autonome.

Exercice 9 N1 **Existence d'une valeur propre pour une matrice à coefficients complexes**.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

Exercice 10 N1 **Polynôme d'une matrice diagonalisable**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que si $B = P^{-1}AP$ alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.

Application. Montrer que si A est diagonalisable $Q(A)$ est diagonalisable et $\operatorname{Sp} Q(A) = Q(\operatorname{Sp} A)$.

▲ *Ce dernier résultat vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

Exercice 11 **Comparaison entre $\mathbf{P}(\operatorname{Sp}\mathbf{A})$ et $\operatorname{Sp}\mathbf{P}(\mathbf{A})$**.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

N1 Q1. Montrer que $P(\operatorname{Sp} A) \subset \operatorname{Sp} P(A)$.

N2 Q2. Ici $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$. Montrer que $P(\operatorname{Sp} A) = \operatorname{Sp} P(A)$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{K}$ dans Q1 et sur $\mathbb{C}$ dans Q2.*

Exercice 12 **N1** **Comparaison entre $\mathbf{P}(\operatorname{Sp} \mathbf{A})$ et $\operatorname{Sp} \mathbf{P}(\mathbf{A})$ suite et fin...**

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A = E_{1,2} - E_{2,1}$ et $P = X^2$.

Montrer que $P(\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} A)$ est strictement contenu dans $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} P(A)$.

Exercice 13 **N2** **Polynôme minimal**.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P et le spectre de A coïncide avec l'ensemble des zéros de P.

Q2. Montrer que A possède un polynôme annulateur unitaire P_0 et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.

Notons que le spectre de A est l'ensemble des zéros de P_0.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

Thème abordé dans oral ESCP 2010 2.11

Exercice 14 **N2** **Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 1).**

$n \in \mathbb{N}^*$. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Q1. On suppose que f est diagonalisable. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f et $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.

P est donc un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(f)(e_i) = P(\alpha_i)\, e_i = 0_E$. En déduire que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Morale ?

Q2. Un petit résultat préliminaire pour la réciproque.

a) g et h sont deux endomorphismes de E. On pose $\forall x \in \operatorname{Ker}(h \circ g),\ \varphi(x) = g(x)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} h$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(h \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Ker} g$.

b) Généraliser ce dernier résultat à r endomorphismes de E.

Q3. On suppose que f possède un polynôme annulateur Q scindé à racines simples.

Ainsi il existe λ dans $\mathbb{K}^*$, il existe r dans $\mathbb{N}^*$ et il existe r éléments γ_1, γ_2, ..., γ_r de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que $Q = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \gamma_k)$.

a) Montrer que $T = \prod_{k=1}^{r} (X - \gamma_k)$ est encore un polynôme annulateur de f.

En déduire, à l'aide de Q2, que $\dim E \leqslant \sum_{k=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(f-\gamma_k \,\mathrm{Id}_E)$.

b) I est l'ensemble des éléments i de $[\![1,r]\!]$ tels $\mathrm{Ker}(f-\gamma_i \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Montrer par double inclusion que $\mathrm{Sp}\, f = \{\gamma_i\,, i \in I\}$. Prouver enfin que f est diagonalisable et conclure l'exercice.

▲ *Ceci vaut aussi pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Thème abordé dans oral ESCP 2011 2.5.

Exercice 15 **N2** **Lemme des noyaux. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 2).**

f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Q1. A et B sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que les seuls éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui divisent A et B sont les polynômes de degré 0 c'est à dire les polynômes constants et non nuls. On dira que A et B sont étrangers ou premiers entre eux.

a) On pose $\mathcal{S} = \{AU+BV\,; (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$. D est un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimum.

Dire pourquoi un tel D existe et montrer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de D (on procédera par double inclusion et on pourra utiliser la division euclidienne).

b) En remarquant que A et B sont dans $\mathcal{S}$, montrer que D est constant et en déduire qu'il existe deux éléments U_0 et V_0 de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que $\mathrm{Ker}(AB)(f) = \mathrm{Ker}\, A(f) \oplus \mathrm{Ker}\, B(f)$.

Q2. a) r est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. P_1, P_2, ..., P_r sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux étrangers. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(P_1P_2\cdots P_r)(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_r(f).$$

b) r est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. λ_1, λ_2, ..., λ_r sont r éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Montrer que : $\mathrm{Ker}\,\big((X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)\big)(f) = \mathrm{Ker}(f-\lambda_1\, Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda_r\, Id_E)$.

Q3. On suppose ici que E est de dimension finie non nulle.

Déduire de ce qui précède que si f admet un polynômes annulateur scindé à racines simples alors f est diagonalisable.

Montrer la réciproque.

▲ *Ce dernier résultat vaut encore pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 16 **N1** **Espace vectoriel des polynômes d'une matrice carrée A diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de A.

On suppose que A est diagonalisable. Ainsi il existe un matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q1. Montrer que si S est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors $S(A) = PS(D)P^{-1}$.

Q2. On pose $T = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$.

a) Montrer que $T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) Montrer que $\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$ est l'ensemble des multiples de T.

Q3. $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'il est engendré par $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$.

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension p.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non nulle.*

Exercice 17 **N2** **Endomorphisme cyclique again.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in [\![3, +\infty[\![$).

Un endomorphisme f de E est cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E tel que $(f_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Q1. Soit f un endomorphisme cyclique de f et x_0 un élément de E tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est la famille des coordonnées de $f^n(x_0)$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. a) Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

b) Montrer que ce type de matrice caractérise les endomorphismes cycliques.

Q2. a) Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

En déduire que tout polynôme annulateur non nul de f a un degré supérieur ou égal à n.

b) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^n\big(f^k(x_0)\big) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, f^i\big(f^k(x_0)\big)$.

En déduire que $P = X^n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, X^i$ est un polynôme annulateur non nul de f.

Q3. a) Soit λ une racine de P et Q le quotient de P par $X - \lambda$.

Montrer que si λ n'est pas valeur propre de f, $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et en déduire une contradiction. Conclusion ?

b) Montrer que les valeurs propres de f sont les racines de P. Que dire de f si P admet n racines distinctes ?

c) On suppose que f est diagonalisable et on note α_1, α_2, ..., α_p ses valeur propres distinctes.

Montrer que $S = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$ est un polynôme annulateur non nul de f et en déduire que $p = n$.

d) Conclure cette question.

Q4. g est un endomorphisme diagonalisable de E ayant n valeurs propres distinctes λ_1, ..., λ_n.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, e_i est un vecteur propre de g associé à la valeur propre α_i. On pose $x_0 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

On considère n éléments γ_0, γ_1, ..., γ_{n-1} de $\mathbb{K}$ tels que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k\, g^k(x_0) = 0_E$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k\, \lambda_i^k\right) e_i = 0_E$. En déduire que $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$... et que g est cyclique.

Thème abordé dans LYON MI 2001 Pb 1, LYON 2006 Pb 2, oral ESCP 1998 2-3, 2-26, 2000 2-10, 2003 2.20, 2010 2.12, 2012 2.10.

Les deux exercices qui suivent traitent le même thème. Le second est sans indication... Cela donne aussi deux versions de la preuve du résultat principal. On trouvera à la fin dans les exercices cupplémentaires un exercice montrant qu'une *matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé.*

Exercice 18 **N2$^+$** **Toute matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire. Application. Oral ESCP 2012 2.11**

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$) et f un endomorphisme de E.

Q1. a) Soit P un polynôme annulateur de f de la forme $P = (X - \lambda)Q$. Montrer que si λ n'est pas valeur propre de f, alors Q est un polynôme annulateur de f.

Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de f tel que toute racine de R est une valeur propre de f.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f, montrer qu'il existe un hyperplan H de E contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que la restriction de f à H est un endomorphisme de H.

d) Montrer par récurrence sur n, que tout endomorphisme de E admet une base dans laquelle la matrice associée est triangulaire supérieure.

Q2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, p complexes distincts. Soit i un élément de $[\![1, p]\!]$.

Justifier l'existence de polynômes Q_i tels que, pour $\forall j \in [\![1, p]\!],\ Q_i(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Q_i(0) = 0$.

Q3. La trace $\mathrm{tr}(M)$ d'une matrice carrée M est par definition la somme de ses coefficients diagonaux. On admet que deux matrices semblables ont la même trace.

On suppose dans la suite que la matrice M de f dans une base $\mathcal{B}$ de E est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(M^k) = 0$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de f.

Montrer qu'il existe p entiers non nuls m_1, m_2, ..., m_p, indépendants de P, tels que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_j P(\lambda_j) = 0$.

b) En prenant pour P des polynômes introduits dans la question 2, montrer que M est nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ (et même $m \in \mathbb{N}^*$) tel que $M^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Exercice 19 **N2$^+$** **Toute matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire. Version 2.**

Q1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A a au moins une valeur propre.

Q2. Montrer par récurrence sur n que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

En plus 1 it Exercice repris à la fin.

N2$^+$ **Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice (resp. un endomorphisme) soit trigonalisable.**

► *Cet exercice est repris et corrigé à la fin.*

Q1. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice triangulaire supérieure T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose $T = (t_{i,j})$, et pour tout r dans $[\![1, n]\!]$, $Q_r = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - t_{k,k})$.

$(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer par récurrence que $\forall r \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, r]\!],\ Q_r(T)\, E_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

b) En déduire que Q_n est un polynôme annulateur scindé de A.

Q2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$) et f un endomorphisme de E.

On suppose que f possède un polynôme annulateur scindé S.

a) Montrer qu'il existe au moins une racine de S qui soit une valeur propre de f. Soit λ une telle racine.

b) Montrer qu'il existe un hyperplan H de E contenant $\text{Im}(f - \lambda \,\text{Id}_E)$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que H est stable par f. Soit h l'application de H dans H définie par : $\forall x \in H,\ h(x) = f(x)$.

Montrer que h est un endomorphisme de H et que S est est un polynôme annulateur scindé.

d) Montrer par récurrence sur n, que tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n qui admet un polynôme annulateur scindé possède une matrice triangulaire supérieure.

Q3. Montrer les propriétés suivantes.

P1 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé.

P2 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 1$). Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si f possède un polynôme annulateur scindé.

P3 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

P4 Si f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 1$), il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

En plus 2 *QSP ESCP 2010*

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant exactement p valeur propres distinctes. Donner le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

En plus . *EDHEC 2011 ex 1.*

Cet exercice est corrigé dans le fichier sur les exercices "EDHEC-réduction".

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in N^*$) et u un endomorphisme de E.

On note Id_E l'identité de E.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant :

$P(u) = a_0 \,\text{Id}_E + a_1\, u + ... + a_p\, u^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = \text{Id}_E$ par convention).

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$.

Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X - 1)\, Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

Q1. Montrer que l'image de $(u - \text{Id}_E)$ est contenue dans $\text{Ker}(Q_1(u))$.

Q2. On note $E_1 = Ker(u - \text{Id}_E)$.

a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$.

b) En déduire que $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.

c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$.

Q3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.

Q4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

En plus 4*ECRICOME 2004 ex 1*

Cet exercice est corrigé dans le fichier sur les exercices "ECRICOME-rduction".

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$!

On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S. Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

Dans toute la suite k est un entier naturel impair fixé.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale (on expliquera la manière dont on construit P).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \big(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, , T(\lambda_n^k)\big)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Prouver que le polynôme R, défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

$\boxed{JF}$ Ainsi $S = U(S^k)$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $\quad AS^{pk} = S^{pk}A$.

b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $\quad AS = SA$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

En plus 5 ESCP 2010 2.11

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. On rappelle que tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ se factorise sous la forme $P(X) = a \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement deux à deux distinctes.

Q1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, Q un polynôme non nul tel que $Q(M) = 0_n$, de degré aussi petit que possible (il n'est pas nécessaire de redémontrer qu'un tel polynôme existe).

a) Montrer que si λ est valeur propre de M, alors $Q(\lambda) = 0$.

b) Soit λ une racine du polynôme Q ; on note alors $Q(X) = Q_1(X)(X - \lambda)$. Montrer que $Q_1(M) \neq 0_n$; en déduire que $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

c) En déduire que $\sigma(M)$ est l'ensemble des racines du polynôme Q.

Q2. On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$.

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = XP(B)$.

b) En utilisant la question 1, montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de B tel que $Q(A)$ soit inversible.

c) Montrer que l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), X \mapsto AX - XB$ est injective.

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Prouver que l'équation $AX - XB = Y$ possède une unique solution X.

3. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $EE(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe une matrice non nulle X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = \lambda XA$.

a) Soit $A \in$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $EE(A) \subseteq \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \text{ tel que } (\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2 \right\}$.

b) Montrer que la transposée ${}^tA$ d'une matrice diagonalisable est diagonalisable. Déterminer $\sigma({}^tA)$.

c) On suppose que A est inversible et diagonalisable.

Montrer que $EE(A) = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2 \right\}$ (on pourra utiliser des matrices construites à l'aide de colonnes propres de A et de ${}^tA$).

Localisation des valeurs propres.

Complément $\boxed{8}$: Disque de Gershgorin.

Complément $\boxed{9}$: Valeurs propres d'une matrice stochastique.

Complément $\boxed{10}$: Rayon spectral.

Exercice 20 **N1$^+$** **Disques de Gerschgorin.**

À savoir faire par cœur.

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ (partir de $AX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul et considérer $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$).

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-7, ESSEC 2009

Exercice 21 **N2** **Ovales de Cassini.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Pour tout (i, j) élément de $[\![1, n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}|\,|z - a_{jj}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} C_{ij}$.

Exercice 22 **N1** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 1**.

À savoir faire par cœur.

Soit $A = (a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$.

A est une matrice **stochastique**.

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Q2. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

et soit k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Notons que X est un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1 et 2.16, 2010 2.6, 2011 2.18, LYON 2010 Pb1, HEC 1993 (qui traite de la limite de la suite des puissances d'une matrice stochastique ; on retrouve la seconde partie de ce problème dans oral ESCP 2010 2.9), HEC E 2011. On parle encore de matrice stochastique dans oral ESCP 2004 2.20, 2007 2.5, 2011 2.8 dans ESCP MI 1996 et elles sont très présentes dans les problèmes de probabilité.

Exercice 23 **N2** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2**.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments $A = (a_{k,\ell})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1.$$

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des matrices **stochastiques**.

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour le produit matriciel.

Q2. a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

et soit k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Notons que X est un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

★ Dans Q3 et Q4 A un élément de $\mathcal{S}$ tel que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} > 0$.

Soit λ une valeur propre de A de module 1. On se propose de montrer que $\lambda = 1$ et que $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1$.

Q3 et Q4 donnent deux preuves de ce résultat.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \underset{1 \leqslant \ell \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_\ell|$.

Ici encore $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Au choix Q3 ou Q4.

Q3. a) Montrer que $|x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right|$. en déduire qu'il existe un réel θ tel que : $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left(\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} - 1\right) = 0$.

b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\, x_k$ (prendre la partie réelle au niveau de l'égalité précédente et remarquer que $\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$ a une partie réelle inférieure ou égale à 1).

c) Conclure.

Q4. a) Soient r un éléments de $[\![2,+\infty[\![$ et z_1, z_2, ..., z_r r complexes.

Montrer que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$ si et seulement si il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r tels que $\forall k \in [\![1,r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$.

b) Montrer que $|x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k|$. Conséquence ?

c) Montrer que $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$, puis que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

d) Conclure.

Remarque Si A est stochastique (et donc si on ne suppose plus que les coefficients de A sont strictement positifs), toute valeur propre de A de module 1 distincte de 1 est une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité avec $1 \leqslant q \leqslant n$. Voir l'exercice suivant.

Q5. On suppose ici que A appartient à $\mathcal{S}$ est que l'une des puissances de A à des coefficients strictement positifs.

Montrer que le résultat précédent vaut encore.

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1. et 2.16, 2011 2.18.

Exercice 24 **N2$^+$** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2^+. ESCP 2011 2.18.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, alors $a_{k,\ell} \geqslant 0$, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$. *Formulation ESCP ! !*

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des matrices **stochastiques**.

Q1. a) Montrer que le produit de deux élément de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. *Question ajoutée*

b) $\mathcal{S}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q2. Soit $A = (a_{k,\ell})$ un élément de $\mathcal{S}$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

En considérant une coordonnée de module maximal de X, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Q3. Soit $z_1, \ldots, z_p$, p nombres complexes ($p \geqslant 2$) vérifiant : $\left|\sum_{k=1}^{p} z_k\right| = \sum_{k=1}^{p} |z_k|$.

Montrer qu'il existe des réels positifs ou nuls $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et un réel θ, tels que pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on a : $z_k = \rho_j\, e^{i\theta}$.

Question légèrement modifiée pour obtenir un résultat plus standard.

Q4. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = 1$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose :

$|x_k| = \underset{\ell \in [\![1,n]\!]}{\text{Max}} |x_\ell|$

a) Montrer qu'il existe $r \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_r = \lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $\lambda^q = 1$.

J'ajoute cet exercice car je l'avais déjà rédigé même si'il n'apporte rien de plus. Il peut se substituer au premier exercice sur les matrices stochastiques.

Exercice 25 **N1** **Matrice stochastique again. HEC E 2011.**

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur colonne propre associé.

c) Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

Dans la suite de l'exercice n est un entier supérieur ou égal à deux.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$;
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

Q2. L'ensemble, $\mathcal{S}_n$ muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?

Q3. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.

Q4. Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$ et λ une valeur propre de A.

a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur λ de A, pour lequel il existe un entier k de $[\![1,n]\!]$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $|v_i| \leqslant 1$.

b) En déduire que l'on a : $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.

Q5. Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de $\mathcal{S}_n$ sont tous strictement supérieurs à $1/2$ la matrice A est inversible.

Exercice 26 **N2$^+$** **Rayon spectral.**

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Si A une matrice de E, on rappelle que A possède au moins une valeur propre et on appelle **rayon spectral** de A le réel noté $\rho(A)$ et égal à $\underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A}{\text{Max}} |\lambda|$.

On appelle norme sous-multiplicative sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

A1 $\forall A \in E,\ N(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_E$.

A2 $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall A \in E,\ N(\lambda\, A) = |\lambda|\, N(A)$.

A3 $\forall (A,B) \in E^2,\ N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$.

A4 $\forall (A,B) \in E^2,\ N(AB) \leqslant N(A)\, N(B)$.

Q1. a) Pour tout élément $A = (a_{i,j})$ de E on pose $\|A\| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

Montrer que $\|.\|$ est une norme sous-multiplicative sur E.

b) Pour tout élément $A = (a_{i,j})$ de E on pose $N_1(A) = \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\text{Max}} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

Déduire de a) que N_1 est une norme sous-multiplicative sur E.

► Dans toute la suite $A = (a_{i,j})$ est une matrice de E.

Q2. Ici N est une norme sous-multiplicative quelconque sur E.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

Montrer que $|\lambda| \leqslant N(A)$ (on pourra considérer la matrice B de E dont toutes les colonnes sont égales à X).

En déduire que $\rho(A) \leqslant N(A)$.

b) k un éléments de $[\![2, +\infty[\![$. Soit μ une valeur propre de A^k.

Montrer qu'il existe k éléments λ_1, λ_2, ..., λ_k de $\mathbb{C}$ tels que $X^k - \mu = (X - \lambda_2)(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$.

En remarquant que $A^k - \mu\, I_n$ n'est pas inversible montrer que $\mu \in \{\lambda^k\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$.

Montrer que $\mathrm{Sp}\, A^k = \{\lambda^k\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$.

c) Soit k dans $[\![2, +\infty[\![$. Déduire de ce qui précède que $\rho(A^k) = \big(\rho(A)\big)^k$ et que $0 \leqslant \rho(A) \leqslant \big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}}$.

Q3. On "rappelle" qu'une suite complexe $(z_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers 0 si et seulement si la suite réelle $(|z_k|)_{k \geqslant k_0}$ converge vers 0.

$(M_k)_{k \geqslant k_0}$ est une suite d'éléments de E. On pose $\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![,\ M_k = (m_{i,j}(k))$.

On dit que la suite $(M_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers la matrice nulle de E si, pour tout (i,j) dans $[\![1, n]\!]^2 : \displaystyle\lim_{k \to +\infty} m_{i,j}(k) = 0$.

Il est clair que si S est une matrice quelconque de E et si la suite $(M_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers la matrice nulle de E alors les suites $(S\, M_k)_{k \geqslant k_0}$ et $(M_k\, S)_{k \geqslant k_0}$ convergent vers la matrice nulle de E.

a) Montrer que la suite $(M_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers la matrice nulle de E si et seulement si $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \|M_k\| = 0$.

b) En déduire que si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $E : \rho(A) < 1$.

Q4. On se propose de montrer la réciproque de Q3 b). On suppose $\rho(A) < 1$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(A)}{2}$.

Ainsi ε est un réel strictement positif et $\rho(A) + \varepsilon < 1$.

On "rappelle" que comme A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est elle semblable à une matrice triangulaire $T = (t_{i,j})$ de E.

Donc il existe une matrice inversible P de E telle que $P^{-1}AP = T$ ou $T = PAP^{-1}$.

Soit d un réel strictement positif et D la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,(d, d^2, \dots, d^n)$ de E.

Notons que D est inversible et que $D^{-1} = \mathrm{Diag}\,(d^{-1}, d^{-2}, \dots, d^{-n})$.

a) Calculer $D^{-1}TD$. Montrer que l'on peut trouver d dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} |d^{i-j}\, t_{i,j}| \leqslant \varepsilon$.

Dans la suite nous supposerons que d est tel que l'inégalité précédente soit vraie.

En déduire alors que $\|DTD^{-1}\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|DP^{-1}A^kPD^{-1}\| \leqslant \big(\rho(A)+\varepsilon\big)^k$. Conclure.

Q5. N est une norme sous-multiplicative sur E. On se propose de montrer que $\rho(A) = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} \big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}}$.

a) $(M_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite d'éléments de E. On pose $\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![,\ M_k = (m_{i,j}(k))$.

$(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que : $\forall (p,q,r,s) \in [\![1,n]\!]^4,\ E_{p,q}\, E_{r,s} = \begin{cases} E_{p,s} & \text{si } q = r \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![,\ N(M_k) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{i,k}(k)|\, N(E_{i,j})$.

En déduire que si $(M_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers 0_E : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} N(M_k) = 0$.

Établir la réciproque (on pourra considérer $N(E_{p,q}\, M_k\, E_{p,q})$).

b) Soit ε un réel strictement positif. On pose $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(a)+\varepsilon} A$.

Montrer que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire qu'il existe un élément k_1 de $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![k_1, +\infty[\![,\ N\big(A_\varepsilon^k\big) < 1$.

En déduire que $\forall k \in [\![k_1, +\infty[\![,\ \rho(A) \leqslant \big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}} < \rho(A) + \varepsilon$ et conclure.

Ce thème est abordé dans HEC MI 2011 mais les résultats importants sont établis pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A diagonalisable...

Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme.

Complément $\boxed{11}$: **Caractérisation des droites stables par un endomorphisme.**

Complément $\boxed{12}$: **Caractérisation des hyperplans stables par un endomorphisme en dimension finie.**

Thème classique $\boxed{5}$: **Caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme en dimension finie.**

Sur ces sujets on pourra voir avec profit ESCP 2001 MI

Exercice 27 **N1** **Oral HEC 1996.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1 Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Q2 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

On pose $u_1 = e_2 - e_3$ et $u_2 = e_1 + e_2 - e_3$.

Q3 On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels F de E stables par f $(f(F) \subset F)$.

a) Déterminer les droites vectorielles de E stables par f.

b) On pose $P_1 = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $P_2 = \operatorname{Im} f$. Montrer que P_1 et P_2 sont stables par f.

c) Soit P un plan de E stable par f différent de P_2. Montrer que $P \cap P_2$ est une droite vectorielle de E stable par f. En déduire que u_2 appartient à P.

Montrer que $f(P) \neq P$. En déduire que u_1 appartient à P.

d) Donner tous les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

On recherche les sous-espaces stables par f avec ;

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ *dans oral ESCP 1996 1.21 ;*

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *dans oral ESCP 2001 2.13 ;*

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *dans oral ESCP 2002 2.7 ;*

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *dans oral ESCP 2003 2.3 ;*

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *dans oral ESCP 2004 2.10 (avec des arguments de bilinéaire)*

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *dans une QSP HEC 2007 ;*

.

Exercice 28 **N1** **Oral ESCP 2009 2.3.**

Q1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces stables par f.

b) Soit k est un réel quelconque ; montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f si et seulement si F est stable par $f - kI$, où I représente l'endomorphisme identité de E.

Dans la suite E désigne un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{E}$ par la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On pose $g = f - 2I$.

Q2. a) Calculer g^3.

b) Déterminer $\operatorname{Im}(g), \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g^2)$ et $\operatorname{Ker}(g^2)$.

Q3. Déterminer toutes les droites vectorielles stables par f.

Q4. a) Soit P un plan tel que $\operatorname{Im}(g^2) \subset P \subset \operatorname{Ker}(g^2)$. Montrer que P est stable par g.

b) Soit F un plan stable par g et v l'endomorphisme induit par g sur F.

i) Montrer que $v^2 = 0$.

ii) Si $v = 0$, montrer que $F = \operatorname{Ker} g$.

iii) Si $v \neq 0$ et si x est un vecteur de F tel que $v(x) \neq 0$, montrer que $v(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

c) En déduire une caractérisation des plans vectoriels de E stables par f.

Les deux exercices qui suivent conduisent au même résultat. Le premier contient beaucoup d'indications.

Exercice 29 **N1** **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme. Énoncé 1.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. a) Soit u un vecteur propre de f. Montrer que la droite vectorielle D engendrée par u est stable par f.

b) Réciproquement soit D une droite vectorielle de E stable par f. Montrer qu'elle engendrée par un vecteur propre de f.

On se propose maintenant de caractériser les hyperplans de E stables par f.

On rappelle que deux hyperplans sont égaux si et seulement si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.

Q2. A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

On pose $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $W = {}^tAV = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On pose encore $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0\}$

a) Préciser la dimension de H' (deux cas).

b) Montrer qu'un élément u de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si ${}^tXV = 0$. Donner un résultat analogue pour H'.

c) On suppose que V est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. Montrer que H est stable par f (on pourra utiliser b))

d) Réciproquement on suppose que H est stable par f. Montrer alors que $H \subset H'$. En déduire, en faisant deux cas que V est un vecteur propre de ${}^tA$.

Q3. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.3 (avec n = 3), ESCP MI 2001.

Exercice 30 **N2** **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme. Énoncé 2.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer qu'une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Q2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Montrer qu'un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.3 (avec n = 3), ESCP MI 2001.

Les deux exercices qui suivent conduisent au même résultat. Le premier contient des indications. Cela donne aussi deux versions de la preuve du résultat contenant deux idées différentes.

Exercice 31 **N1$^+$** **Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme diagonalisable. Énoncé 1.**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme diagonalisable de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

Pour tout élément k de $[\![1, p]\!]$ on pose $F_k = \text{SEP}\ (f, \lambda_k)$.

Q1. Montrer que si G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces vectoriels respectivement de F_1, F_2, ..., F_p alors la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et stable par f.

Q2. Soit G un sous espace vectoriel de E stable par f. On pose pour tout élément k de $[\![1, p]\!]$, $G_k = G \cap F_k$.

On se propose de montrer que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, si x_1, x_2, ..., x_k sont k éléments appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_k et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in G$ alors ces éléments appartiennent également à G.

b) Achever la démonstration du résultat proposé et conclure.

Q3. Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f et non réduit à $\{0_E\}$. Montrer que la restriction g de f à G est un endomorphisme diagonalisable de G (il faut entendre que g est l'application de G dans G définie par $\forall x \in G,\ g(x) = f(x)$).

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.22, ESCP MI 2001.

Exercice 32 **N2** **Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme diagonalisable. Énoncé 2.**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme diagonalisable de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

Pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$ on pose $F_k = \text{SEP}\ (f, \lambda_k)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E.

Montrer que G est stable par f si et seulement si $G = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ où G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces respectifs de F_1, F_2, ..., F_p.

Comparaison entre $\mathbf{f \circ g}$ et $\mathbf{g \circ f}$ (ou $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$).

Complément $\boxed{13}$: **Si $\mathbf{f \circ g = g \circ f}$ les sous-espaces propres de f sont stables par g et réciproquement.**

Complément $\boxed{14}$: $\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{BA})$ **pour des matrices carrées et** $\mathrm{Sp}(\mathbf{f \circ g}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{g \circ f})$ **pour des endomorphismes.**

Complément $\boxed{15}$: **Comparaison des dimensions des sous-espaces propres de AB et BA ou de $\mathbf{f \circ g}$ et $\mathbf{g \circ f}$.**

Complément $\boxed{16}$: **CNS pour que deux endomorphismes (resp. matrices) diagonalisables commutent.**

Thème classique $\boxed{6}$: **Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisable.**

Exercice 33 **N2** **Comparaison des spectres de AB et BA.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Q2. Montrer que si $n = p : \mathrm{Sp}\, AB = \mathrm{Sp}\, BA$. Et si $n \neq p$?

▲ *On a des résultats analogues pour les applications linéaires et les endomorphismes.*

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-4 (exercice intégralement repris en 2010 (2.1)). Thème abordé en termes d'applications linéaires dans une QSP ESCP 2007.

Exercice 34 **N1** **Comparaison entre la diagonalisibilité de $f \circ g$ et de $g \circ f$. Oral HEC 1996.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. f et g sont deux **automorphismes** de E.

Q1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Q2. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. On pose $F_\lambda = \mathrm{Ker}(f \circ g - \lambda Id_E)$ et $G_\lambda = \mathrm{Ker}(g \circ f - \lambda Id_E)$.

Montrer que : $g(F_\lambda) \subset G_\lambda$ et $f(G_\lambda) \subset F_\lambda$. En déduire que F_λ et G_λ ont même dimension.

Q3. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont simultanément diagonalisables.

Q4. Cela vaut-il encore pour deux endomorphismes ?

▲ *On a des résultats analogues pour les matrices.*

Exercice 35 **N1** **CNS pour que $f \circ g = g \circ f$ lorsque f un endomorphisme, d'un espace vectoriel de dimension n, ayant n valeur propres deux à deux distincts.**

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

On suppose que f a n valeurs propres distinctes. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Q1. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g. En déduire que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de g.

Q2. Montrer que : $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Autrement dit, $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.

Contenu ou presque dans oral ESCP 1998 2-29, 1999 2-18, 2012 2.7. On trouve cela dans ESCP 1996 1.2, 2004 2.17 (le second est une réécriture du premier...) à l'ordre 2.

▲ *On a des résultats analogues pour les matrices.*

Exercice 36 **N1** **Ensemble des matrices qui commutent avec une matrice diagonale à éléments diagonaux deux à deux distincts.**

D est matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux deux à deux distincts.

Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra donner deux preuves...

Exercice 37 **N2** **Une petite QSP ESCP 2003**

Soient A et B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et $AB = BA$.

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Thème abordé dans oral ESCP 2005 2.7 pour deux matrices particulières de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 38 **N2** **CNS pour que $f \circ g = g \circ f$ lorsque f sont deux endomorphismes diagonalisables.**

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes diagonalisables de E tels que : $f \circ g = g \circ f$.

$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et pour i dans $[\![1, p]\!]$, F_i est le sous-espace propre de f associé à λ_i.

$\mathrm{Sp}(g) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\}$ et pour i dans $[\![1, p]\!]$, pour j dans $[\![1, q]\!]$, G_j est le sous-espace propre de g associé à μ_j.

Q1. Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Q2. Montrer que pour i dans $[\![1, p]\!]$: $F_i = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q} (F_i \cap G_j)$.

Q3. En déduire que f et g se diagonalisent dans la même base.

Q4. Envisager une réciproque.

Exercice 39 **N1** **Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

Q1. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C}_D$ (resp. $\mathcal{C}_A$) est l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D (resp.A).

Q1. Montrer que $\mathcal{C}_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(I_3, D, D^2)$

Q2. Déterminer $\mathcal{C}_A$.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.11, 1996 1.23, 1999 2-17, 2008 2.21, 2010 2.18, 2012 2.1.

Exercice 40 **N1** **Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ again. D'après oral ESCP 2010 2.18.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

f est l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q1 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Q2 Construire une matrice inversible P dont tous les éléments de la seconde ligne valent 1 telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\alpha < \beta < \gamma$ (on justifiera avec précision la construction).

Calculer P^{-1}

Q3 a) Montrer que tout polynôme annulateur de A est divisible par $S = X(X-1)(X-2)$.

b) Montrer que S est un polynôme annulateur de D puis de A.

c) En déduire l'ensemble des polynômes annulateurs de A

Q4 On pose $\mathcal{E} = \{Q(A)\,;\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$

Q5 Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_D$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Montrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(I_3, D, D^2)$.

En déduire l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.11, 1996 1.23, 1999 2-17, 2008 2.21, 2012 2.1.

Exercice 41 **N1$^+$** **Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.**

Q1. D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_D$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$.

Q2. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{C}_A$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A. $\mathbb{K}[A] = \big\{P(A)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\big\}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ et que $\dim \mathcal{C}_A = n$.

b) Soit λ_1, λ_2, .., λ_n les valeurs propres de A. Montrer que $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A.

Montrer que $\mathbb{K}[A] = \big\{P(A)\,;\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\big\}$ (on pourra diviser par Q), puis que $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}_A$.

▲ *On a un résultat analogue pour les endomorphismes.*

Cela est contenu dans oral ESCP 2012 2.1.

Thème abordé pour une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans oral ESCP 1999 2-17.

Thème abordé pour une matrice particulière de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans oral ESCP 1995 1.11, 2010 2-18.

Exercice 42 **N2** **Dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable**.

$p \in [\![2, +\infty[\![$. f est un endomorphisme diagonalisable de E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres (distinctes) de f. Pour tout i appartenant à $[\![1, p]\!]$ on pose $F_i = SEP(f, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E)$.

$\mathcal{S} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ est le commutant de f.

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. g est un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que pour tout élément i de $[\![1, p]\!]$, F_i est stable par g.

Si i appartient à $[\![1, p]\!]$, on note alors g_i, l'application de F_i dans F_i qui à x associe $g(x)$ et on pose

$$\varphi(g) = (g_1, g_2, \dots, g_p).$$

Q3. Montrer que φ est une application linéaire injective de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{H} = \mathcal{L}(F_1) \times \mathcal{L}(F_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(F_p)$.

Q4. On se propose de montrer que φ est surjective. Pour tout élément i de $[\![1, p]\!]$ on note p_i la projection de E sur F_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} F_k$.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ un élément de $\mathcal{H}$. On pose $\forall x \in E,\ g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i\big(p_i(x)\big)$ (on évitera d'écrire $u_i \circ p_i$).

Montrer que g est élément de $\mathcal{S}$ et que $\varphi(g) = (u_1, u_2, \dots, u_p)$. Conclure.

Q5. Déduire de ce qui précède que : $\dim \mathcal{S} = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \Big(\dim SEP(f, \lambda)\Big)^2$. Que dire si $p = n$?

Q6. On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes de f. $\mathbb{K}[f] = \{P(f)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $P_0 = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimum.

En déduire que $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ et que $\dim \mathbb{K}[f] = p$ (on pourra utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$).

b) Montrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{S}$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $\mathcal{S} = \mathbb{K}[f]$.

Q7. Examiner le cas $p = 1$...

Thème abordé dans ESSEC MI 2011.

▲ *On a un résultat analogue pour les matrices.*

D'autres thèmes classiques.

Complément $\boxed{17}$: CNS pour qu'un endomorphisme ou une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Thème classique $\boxed{7}$: Lien entre la diagonalisabilité de f et de f^2.

Thème classique $\boxed{8}$: Lien entre la diagonalisabilité de A et de $M \to AM$, ou de $g \to f \circ g$.

Thème classique $\boxed{9}$: Lien entre la diagonalisabilité de f et de $g \to f \circ g - g \circ f$, ou de A et de $M \to AM - MA$.

Exercice 43 **N1** **Diagonalisibilité d'une matrice de rang 1.**

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On pose $A = CL$ et $a = LC$.

Q1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Qu'en déduire pour le spectre de A ?

Q2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des coefficients de C et L).

Q3. Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, a\}$.

Q4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.2, 1.13, 1998 2-19, 2007 2.16, 2008 2.15, 2009 2.1.

Exercice 44 **N1** **Diagonalisibilité d'une matrice de rang 1 again.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 ($n \geqslant 2$).

Je propose de considérer les trois questions comme indépendantes.

Q1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Q2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq 0$.

Q3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A possède une valeur propre non nulle.

▲ *On a un résultat analogue pour les matrices.*

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.2, 1.13, 1998 2-19, 2007 2.16, 2008 2.15, 2009 2.1.

Exercice 45 **N2** **Lien entre la diagonalisibilité de u et celle de $\mathbf{u^2}$.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle. u est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

► Dans toute la suite on suppose u^2 diagonalisable.

Q2. On suppose que λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant $\alpha^2 = \lambda$.

Montrer que SEP $\left(u^2, \lambda\right) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

En déduire qu'il existe une base de SEP $\left(u^2, \lambda\right)$ constituée de vecteurs propres de u.

Q3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ alors u est diagonalisable. Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-1, 2005 2.6, 2012 2.2. Thème implicite dans oral ESCP 2006 2.17.

Exercice 46 **N1⁺** **Diagonalisibilité de l'endomorphisme $M \to AM$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Oral HEC 1997.**

A étant une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ F(M) = AM.$$

Q1. Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Montrer que F est bijectif si et seulement si A est inversible.

Q3. a) Soit μ une valeur propre de A et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé. Soient $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$. Montrer que ces matrices sont des vecteurs propres de F associés à μ.

b) Montrer que si μ est une valeur propre de F alors μ est une valeur propre de A.

Q4. Montrer que si A est diagonalisable alors F est diagonalisable.

Q5. Montrer que si F est diagonalisable alors A est diagonalisable.

▲ *On a un résultat analogue pour les endomorphismes.*

Thème abordé dans oral ESCP 1994 2.1, 2009 2.18.

On trouve dans oral ESCP 1994 2.5 $M \to AMB$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec des matrices A et B particulière.

Exercice 47 **N1$^+$** **Lien entre la diagonalisabilité de u et de "$v \to u \circ v$". ESCP 2005 2.14.**

Texte ESCP...

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$.

On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$\forall\, v \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(v) = u \circ v.$

Q1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors λ est une valeur propre de u.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

Q3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2.30.

Exercice 48 **N2** **Lien entre la diagonalisabilité de A et de $M \to AM$. ESCP 2009 2.18**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit T sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ T(M) = AM$.

Q1. a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de T en exhibant une matrice propre associée.

Q3. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A.

a) En considérant les matrice $X_i\,{}^tX_j$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, montrer que T est diagonalisable.

b) Déterminer le rang de $X_i\,{}^tX_j$.

On admet que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

Q4. On suppose dans cette question que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de T.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, définie par $\varphi(M) = MX$ est une application linéaire surjective.

b) En considérant la famille $\big(\varphi(M_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que A est diagonalisable.

JFC : c) Montrer le résultat admis.

Thème abordé dans oral ESCP 1994 2.1 avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On trouve dans oral ESCP 1994 2.5 $M \to AMB$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec des matrices A et B particulière.

Exercice 49 **N1$^+$** **Diagonalisibilité de l'endomorphisme $M \to AM - MA$ de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$ lorsque A est diagonalisable.**

Q1 $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que la famille $(E_i{}^tE_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sont deux **bases** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Montrer que si i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$: $E_i{}^tE_j$ est combinaison linéaire de la famille $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$.

En déduire proprement et simplement que $(X_p{}^tY_q)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans la suite A est une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = AM - MA$.

Q2 Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3 Soit X est un vecteur propre de A associé à la valeur λ et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur μ

a) Montrer que X^tY est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que X^tY est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda - \mu$.

Q4 a) Montrer que toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^tA$. Comparer $\mathrm{Sp}\,A$ et $\mathrm{Sp}\,{}^tA$.

b) Montrer que ${}^tA$ est digonalisable (on pourra utiliser la semblablité... et retrouver les résultats de a) !)

Q5 a) Utiliser Q4 b), Q1 b) et Q3 b) pour montrer que φ est digonalisable.

b) Écrire le $\mathrm{Sp}\,\varphi$ avec les éléments de $\mathrm{Sp}\,A$. φ est-il un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

On trouve ce thème dans ECRICOME 2009 ex 1 pour A symétrique. On trouve aussi dans oral ESCP 2009 2.9, $M \to AM + MA$ toujours avec A symétrique.

Exercice 50 **N2** **Diagonalisibilité de l'endomorphisme $v \to v \circ u - u \circ v$ de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.**

Ce sont les deux dernières parties d'un problème qui figure dans les sujets proposés à la fin de cet article.

Notons que dans IV on retrouve la dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 1$). f est un endomorphisme de E.

On note Φ_f *l'application qui à tout élément* g *de* $\mathcal{L}(E)$ *associe* $f \circ g - g \circ f$. Φ_f *est clairement un endomorphisme de* $\mathcal{L}(E)$.

Partie IV

▶ *Ici* f *est diagonalisable. On se propose de montrer que* Φ_f *est diagonalisable.*

λ_1, λ_2, ..., λ_p *sont les valeurs propres distinctes de* f.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *est une base de* E *constituée de vecteurs propres de* f *respectivement associés aux valeurs propres* α_1, α_2, ..., α_n.

$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ *est la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Pour tout* (i,j) *dans* $[\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ *est l'endomorphisme de* E *de matrice* $E_{i,j}$ *dans* $\mathcal{B}$.

Q1. Calculer $\Phi_f(u_{i,j})$ *pour tout* (i,j) *dans* $[\![1,n]\!]^2$. *En déduire que* Φ_f *est diagonalisable et préciser son spectre.*

Q2. a) Montrer que $\operatorname{Ker} \Phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ g(\text{SEP }(f, \lambda_i)) \subset \text{SEP }(f, \lambda_i)\}$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} \Phi_f$ *est isomorphe à* $\mathcal{L}(\text{SEP }(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP }(f, \lambda_2)) \times \cdots \times \mathcal{L}(\text{SEP }(f, \lambda_p))$.

c) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker} \Phi_f$ *et le* $\operatorname{rg} \Phi_f$. *Et si* $p = n$ *?*

Partie V

Dans cette partie on suppose que Φ_f *est diagonalisable. On se propose de montrer que* f *est diagonalisable.*

Q1. On suppose que f *admet au moins une valeur propre* λ. $(g_1, g_2, \ldots, g_{n^2})$ *est une base de* $\mathcal{L}(E)$ *constituée de vecteurs propres de* Φ_f *respectivement associés aux valeurs propres* β_1, β_2, ..., β_{n^2} *et* x *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* λ.

a) Pour tout i *dans* $[\![1,n]\!]$, *calculer* $f\big(g_i(x)\big)$ *en fonction de* λ, β_i *et* $g_i(x)$.

b) On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(g) = g(x)$. *Montrer que* φ *est une application linéaire surjective de* $\mathcal{L}(E)$ *dans* E.

c) Montrer que f *est diagonalisable.*

On se propose de montrer que le spectre de f *n'est pas vide.*

Q2. Ici $K = \mathbb{C}$.

a) Montrer que f *possède un polynôme annulateur non nul* P.

b) En remarquant que P *est scindé montrer qu'au moins une des racines de* P *est une valeur propre de* f. *Conclure.*

Q3. Ici $K = \mathbb{R}$ *et on raisonne par l'absurde. Supposons que* f *n'a pas de valeur propre. Soit* A *la matrice de* f *dans une base de* E.

On considère l'endomorphisme ψ_A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par :* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \psi_A(M) = AM - MA$.

On considère également l'endomorphisme $\widehat{\psi_A}$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *défini par :* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \widehat{\psi_A}(M) = AM - MA$.

a) Montrer que ψ_A *est diagonalisable.*

Montrer que $\widehat{\psi_A}$ *est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.*

b) Montrer qu'il existe un complexe non réel γ *valeur propre de* A. *Montrer que* $\bar{\gamma}$ *est valeur propre de* A *et de* ${}^tA$.

Soit X *(resp.* Y*) un élément non nul de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *tel que* $AX = \gamma X$ *(*${}^tAY = \bar{\gamma} Y$*).*

Calculer $\widehat{\psi_A}(X\,{}^tY)$ *et en déduire une contradiction.*

Q4. Conclure.

D'autres exercices.

Exercice 51 **N2** **Caractérisation des matrices nilpotentes.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est nilpotent c'est à dire qu'il existe r dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

ii) 0 est la seule valeur propre de A.

Exercice 52 **N2$^+$** **Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice (resp. un endomorphisme) soit trigonalisable.**

Q1. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice triangulaire supérieure T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose $T = (t_{i,j})$, et pour tout r dans $[\![1,n]\!]$, $Q_r = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - t_{k,k})$.

$(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer par récurrence que $\forall r \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,r]\!],\ Q_r(T)\,E_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

b) En déduire que Q_n est un polynôme annulateur scindé de A.

Q2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$) et f un endomorphisme de E.

On suppose que f possède un polynôme annulateur scindé S.

a) Montrer qu'il existe au moins une racine de S qui soit une valeur propre de f. Soit λ une telle racine.

b) Montrer qu'il existe un hyperplan H de E contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité.

c) Montrer que H est stable par f. Soit h l'application de H dans H définie par : $\forall x \in H,\ h(x) = f(x)$.

Montrer que h est un endomorphisme de H et que S est est un polynôme annulateur scindé.

d) Montrer par récurrence sur n, que tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) qui admet un polynôme annulateur scindé possède une matrice triangulaire supérieure.

Q3. Montrer les propriétés suivantes.

P1 *A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé.*

P2 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 1$). Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si f possède un polynôme annulateur scindé.*

P3 *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

P4 *Si f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 1$), il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.*