CONDUCTEUR 2

I CONVOLUTION

a) Premières convolutions

Exercice 1 **Différences de deux uniformes indépendantes.** **F1$^-$**

X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

Étudier $X - Y$.

Exercice 2 **Somme de deux bilatérales indépendantes.** **F1**

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$. Montrer que f est une densité de probabilité.

X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant f pour densité. Étudier $S = X + Y$.

► *On retrouve ce thème dans EDHEC 1998 Ex 3.*

Exercice 3 **Différence de deux Gompertz indépendantes.** **F1**

Q1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x-e^{-x}}$. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de densité f.

a) Trouver rapidement une densité de $-Y$.

b) Montrer que $X - Y$ est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité (on pourra poser directement $u = e^t$ et utiliser l'espérance d'une loi exponentielle).

Exercice 4 **Produit et quotient de deux Pareto indépendantes.** **ESCP 1998 3.19**

F1

f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f.

a) Trouver la fonction de répartition F de X.

b) On pose $Y = \ln X$. Étudier Y. Donner directement une densité de $-Y$.

Q3. U est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction f_U, définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est fini.

Montrer que $V = e^U$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Q4. X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X_1 et X_2 ont pour densité f.

a) Déterminer une densité de $Z = \ln X_1 - \ln X_2$. Étudier $T = \dfrac{X_1}{X_2}$.

Notons que $\dfrac{1}{X}$ *suit la loi uniforme sur* $]0,1]$*. Alors la loi de* T *est encore la loi du quotient de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur* $]0,1]$*. Voir, dans la suite, les exercices oral ESCP 2001 3.14 et 1998 3.31.*

b) Donner, sans calcul, une densité de $\ln X_1 + \ln X_2$. Étudier $S = X_1 X_2$.

Exercice 5 **Quotient d'uniformes sur $]0,1]$ indépendantes.** **ESCP 2001 3.11** **F1**

Q1. Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $]0,1]$.

On considère la variables aléatoire $Y = -\ln X$. Déterminer la loi de Y.

Q2. Soit (a,b) deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $]0,1]$.

A tout $\omega \in \Omega$, on associe l'équation : $a(\omega)\, x^2 - b(\omega)\, x + 1 = 0$. On note $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ les racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

Déterminer la loi de la variable aléatoire S définie par : $S(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega)$.

Exercice 6 **Produit de deux Pareto indépendantes.** **ESCP 1999 3.26** **F1**

Soient a et b deux réels positifs distincts. On considère X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant des lois de Pareto de densités respectives f_a et f_b définies par :

$$f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}, \qquad f_b(t) = \begin{cases} bt^{-b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

Q1. Trouver les lois de $\ln(X)$, de $\ln(Y)$ et de $\ln(XY)$.

Q2. En déduire la loi de $Z = XY$.

Remarque La loi de Pareto n'étant pas du programme on pourra commencer par monter que f_a *est une densité de probabilité.*

Exercice 7 **Quotient de deux uniformes indépendantes sur $]0,r]$.** **Oral ESCP 1998 3.31**

F1

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $]0,r]$. On pose $U = \ln(X/r)$ et $V = -\ln(Y/r)$.

Q1. a) Étudier U et V.

b) Trouver une densité de $U + V$.

c) Étudier $Q = X/Y$ et $Q' = 1/Q$.

Q2. Z_1, Z_2, ..., Z_n sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $]0,r]$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ on note W_i la variable aléatoire $1/Z_i$.

a) Étudier W_1 (ou montrer que W_1 suit une loi de Pareto...).

b) Même chose pour $W = \mathrm{Min}(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ (ou montrer que W suit une loi de Pareto...). Trouver l'espérance et la variance de W.

---

b) Stabilités

Exercice 8 **Somme de lois normales indépendantes.** **F1$^+$**

Ceci est du cours mais la démonstration est intéressante. La demandait dans HEC MII 2004.

X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2\right)$ (on pourra commencer par le cas $m_1 = m_2 = 0$).

Généraliser.

Exercice 9 **Somme de deux lois gamma indépendantes.** **F1$^+$**

Ceci est du cours mais la démonstration est intéressante car elle utilise le théorème de convolution dans toute sa généralité.

X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.

Pour être conforme au programme on pourra supposer que $b = 1$ c'est à dire que $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ et montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

Généraliser.

Exercice 10 **Somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ.** **F1$^-$**

Le résultat de Q1 est au programme. Le programme demande aussi d'obtenir le résultat de Q2 en utilisant le résultat de Q1.

Q1. X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Montrer $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi gamma de paramètre n $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \gamma(n))$.

Q2. X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est une variable aléatoire réelle à densité et en trouver une densité.

Exercice 11 **Produit de deux uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes.** **F1**

X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Éudier la variable aléatoire $-\ln X$. Étudier XY.

Exercice 12 **Produit de n uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes.** **Oral ESCP 1998 3.9** **F1**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires rélles mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on considére les variables aléatoires : $Y_n = -\ln X_n$ et $Z_n = X_1 X_2 \cdots X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_1.

Q2. n appartient à $\mathbb{N}^*$. Montrer que Z_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

► *Thème abordé dans oral ESCP 2001 3.1, 3.26.*

Exercice 13 **Utilisation de la stabilité** **ESCP 2006 3.7** **F1$^+$**

Un point se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé. Il part de l'origine O des coordonnées à l'instant 0.

Si à l'instant $t = k, k \in \mathbb{N}$ il se situe au point de coordonnées (X_k, Y_k), alors à l'instant $t = k+1$ il se trouve au point de coordonnées (X_{k+1}, Y_{k+1}) de sorte que $A_{k+1} = X_{k+1} - X_k$ et $B_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$ suivent la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

On suppose les A_i et les B_j mutuellement indépendantes.

On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (on peut aussi s'en passer et le retrouver...).

Q1. a) Donner la loi suivie par X_n ?

b) Soit M_n le point de coordonnées (X_n, Y_n). Exprimer, à l'aide de la fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, la probabilité qu'à l'instant n le point M_n se trouve dans le carré $C = [-1, 1]^2$.

Q2. Soit D_n la distance de M_n à l'origine : $D_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$.

a) Donner la loi de $\dfrac{X_n^2}{2n}$, puis celle de D_n^2. En déduire la loi de D_n et calculer son espérance.

Les gens qui connaissent la loi gamma à deux paramètres peuvent garder X_n^2.

b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant n le point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1 ?

On trouve un exercice du même type dans oral ESCP 2000 3.25.

c) D'autres convolutions.

Exercice 14 **EDHEC 1998 Ex 3** **F1**

Q1 On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer la fonction de répartition de Z.

c) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

Q2 Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.

a) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.

b) Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.

c) Déterminer l'espérance de Z.

d) On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 15 **ECRICOME 2001 Ex 1** **F1**

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

Q1 Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

Q2 Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h, définie par

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{-bt} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{at} \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Soit s un réel positif. Etablir l'égalité : $P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\,e^{-as} + a\,e^{-bs}}{a+b}$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 16 **EDHEC 2010 Ex 3** **F1**

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.

b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.

On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Compléter la déclaration de la fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
Function z (a : real) : real ;
Var x, y : real ;
Begin
x : = .......... ; y : = .......... ; z : = .......... ;
End ;
```

Exercice 17 **Somme de variables aléatoires indépendantes à densité.** **Oral ESCP 1997 3.14** **F1**

Trois personnes notées A, B et C sont simultanément dans un bureau de poste muni de deux cabines téléphoniques. Une unité de temps étant choisie, A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux cabines. C attend et occupe ensuite la première cabine disponible, lorsque l'une ou l'autre des deux personnes A ou B a terminé sa communication.

On suppose que les durées des communications des trois personnes A B, C sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[0, 1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

Q1. On pose $V = \text{Inf}(X, Y)$. Montrer que V est une variable aléatoire à densité et en donner une densité. Calculer son espérance.

Q2. On note T le temps total passé par C dans le bureau de poste. Trouver une densité pour T et la représenter graphiquement. Calculer $E(T)$.

► *On retrouve ce thème dans ECRICOME 1997 PB, oral ESCP 2007 3.9. On retrouve ce thème dans oral ESCP 1997 3.34, 2005 3.11 avec des lois exponentielles.*

Exercice 18 $\dfrac{\mathrm{Min}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\mathrm{Max}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}$ **avec X et Y uniformes et indépendantes. ESCP 2005 3.3** **F1**

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $]0,r[$, r étant un nombre réel strictement positif donné.

On considère les variables aléatoires suivantes : $T=\mathrm{Min}(X,Y)$, $U=\mathrm{Max}(X,Y)$ et $Z=\dfrac{T}{U}\cdot$

Q1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $\ln X$, puis de la variable aléatoire $\ln X-\ln Y$.

Q2. Exprimer $\ln Z$ en fonction de $\ln X$ et $\ln Y$.

Q3. Déterminer une densité pour chacune des variables aléatoires $Z'=-\ln Z$, Z et $V=\dfrac{1}{Z}\cdot$

Reconnaître la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires Z' et Z et préciser pour chacune des trois variables aléatoires Z', Z et V son espérance et sa variance.

► *Exercice déjà donné sous forme pratique et sans convolution... Oral HEC 1996, ESCP 1998 3.13.*

Au choix l'un des exercices suivants. Le second est plus difficile que le premier.

Exercice 19 **Quotient de variables aléatoires à densité. Oral HEC 1999** **F1**

X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1. t est un réel strictement positif. Montrer que $-t\,Y$ est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité.

Montrer que $X-t\,Y$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\[2mm] \dfrac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x\in]-\infty,0]\end{cases}$$

Q2. Utiliser ce qui précède pour montrer que $Z=\dfrac{X}{Y}$ est une variable aléatoire à densité et pour en donner une densité.

Q3. Montrer que $U=\dfrac{X}{X+Y}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

► *Thème abordé dans oral ESCP 1999 3.20, 2009 3.1.*

► *Thème généralisé dans oral ESCP 2009 3.10, 2010 3.1, EDHEC 2012 ex 2.*

Exercice 20 **Quotient de variables aléatoires à densité indépendantes. ESCP 2010 3.1** **F1^{+}**

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes, X suivant la loi exponentielle de paramètre λ et Y la loi exponentielle de paramètre μ, avec $\lambda>0$ et $\mu>0$.

Q1. Quelle est la loi de la variable aléatoire λX ?

Q2. Soit u un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $S = Y - uX$ est à densité et qu'une densité de S est l'application h vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u}\, e^{-\mu x} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u}\, e^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Q3. a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}\cdot$

b) Montrer que la variable aléatoire R est à densité et préciser une densité de R.

c) La variable aléatoire R admet-elle une espérance ?

Q4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{X+Y}\cdot$

Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, reconnaître la loi de U et préciser, s'il y a lieu, son espérance et sa variance.

► *Thème voisin dans voisin de oral ESCP 1999 3.20, 2009 3.1, 2009 3.10, Oral HEC 1999, EDHEC 2012 ex 2.*

Au choix l'un des exercices suivants. Le premier ne contient pas d'algèbre linéaire.

Exercice 21 **Différence de variables aléatoires à densité indépendantes.** **Oral ESCP 1998 3.6** **F1**

Z et T sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes suivant toutes les deux une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q1. Donner la fonction de répartition et une densité de la variable $-T$.

Q2. Donner la fonction de répartition et une densité de la variable Z^2.

Q3. Donner une densité et la fonction de répartition de la variable $Z^2 - T$. Représenter graphiquement cette densité.

Exercice 22 **Différence de variables aléatoires à densité indépendantes.** **EDHEC 2008 Ex 1** **F1**

Q1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2\,x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Dans la suite X et Y sont deux variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \cdot$$

d) Déterminer la probabilité pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2\,X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23 **Différence de variables aléatoires à densité indépendantes.** **ESCP 2002 3.12** **S**

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} C\, e^{-|x|} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1. a) Déterminer la constante C pour que f soit une densité de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi admettant f pour densité.

Q2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X admette f pour densité et telles que Y suive une loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Déterminer la loi suivie par la variable $X - Y$.

Q3. Le livreur L d'un supermarché décide de passer livrer chez Madame M entre 9h et 11h du matin ; il attendra M pendant 15 minutes (si elle n'est pas là !). Pour sa part M rentrera chez elle entre 9h et 11h et y restera pendant une demi-heure. On prend comme origine des temps 10h et comme unité l'heure. On suppose que L et M agissent indépendamment et que leurs instants d'arrivée chez M sont des variables aléatoires qui suivent respectivement une loi de densité f, et une loi uniforme sur le segment $[-1, 1]$.

Calculer la probabilité que M soit livrée par L.

Exercice 24 **Différence de variables aléatoires à densité indépendantes.** **ESCP 1997 3.33** **S**

Q1. On pose $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,\ f(x) = 0$ et $\forall x \in [-1, 1]\ f(x) = 1 - |x|$.

Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X et Y sont deux variables alátoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, telles que X admette pour densité f et Y suive une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Trouver une densité pour $-Y$ et pour $X - Y$ (on pourra d'abord etudier la parité de h...).

Q3. Pierre et Simone se rendent chaque jour, indépendamment l'un de l'autre, dans le même restaurant entre 12 heures et 14 heures. En prenant comme origine des temps 13h, l'heure d'arrivée de Pierre est une variable aléatoire admettant pour densité f et celle de Simone suit une loi uniforme sur le segment $[-1, 1]$. Pierre prend son repas en 45 minutes et Simone en 30 minutes.

Quelle est la probabilité que Pierre et Simone se rencontrent un jour donné au restaurant ?

Au choix l'un des exercices suivants.

Exercice 25 **ESCP 2010 3.11** **F1**

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus que, pour tout $i \geqslant 1$, la variable Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\alpha$.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q1. a) Rappeler l'expression de g_1 et calculer g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\alpha\, e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{n-1}$.

c) Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini (on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$).

d) Exprimer la variance $V(Z_n)$ de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

Q2. a) Calculer la fonction de répartition G_n de Z_n.

b) On définit $U_n = \dfrac{Z_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

c) Étudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$. Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$?

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(U_n)$.

Exercice 26 **ECRICOME 2011 PB Partie I** **F1**

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies par $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (ou plutôt $Y_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)\,!$) et $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}\cdot$

Pour tout n dans F_{Y_n} (resp F_{Z_n}) est la fonction de répartition de Y_n (resp Z_n).

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f_n est la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} n\,e^{-t}\,(1-e^{-t})^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q1. (*Question calamiteuse*)

On considére un tableau X de nombres réels de taille 2011 (c'est à dire "X=array[1..2011] of real") préalablement rempli.

a) Écrire un programme en Pascal calculant et affichant les réels $\text{Max}(X[1], X[2])$ et $\text{Max}(X[1], X[2], X[3])$.

b) Écrire un programme en Pascal calculant et affichant le réel $\text{Max}(X[1], X[2], \dots, X[n])$.

Q2. a) Pour tout réel t, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ en fonction de $F_{X_1}(t)$, ..., $F_{X_n}(t)$.

b) Pour tout réel t, donner l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geqslant 0$.

c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variables alétaoire Y_n.

Q3. a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}\cdot$

b) Démontrer que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1}.

Q4. Pour tout réel x, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n\,e^{nt}\,(1-e^{-t})^{n-1}\,\mathrm{d}t = (e^x-1)^n$.

Q5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f est une densité.

► *On trouve un thème analogue dans oral ESCP 2000 3.8, 2008 3.7, 2010 3.11, 2011 3.7, HEC 2008 S8.*

exe**Autour de la somme aléatoire de variables uniformes indépendantes sur** $[0,1]$. **S** **Rédigé**

On tire un nombre au hasard dans l'intervalle $[0,1]$ et on recommence jusqu'à ce que la somme des résultats obtenus soit strictement supérieure à 1. X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Pour tout élément i de $\mathbb{N}^*$, U_i est la variable aléatoire égale au résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Q1. Ecrire une fonction en TP4 qui simule cette expérience.

Q2. Faire des hypothèses raisonnables sur les U_i.

Q3. Trouver la loi de $U_1 + U_2$.

Q4. Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ est une variable aléatoire à densité et qu'il existe une densité f_n de cette variable vérifiant :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Q5. Déterminer, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $P(X > n)$. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

► *Thème abordé dans oral ESCP 2002 3.30, 2010 3.12 (ces deux exercices sont identiques).*

Exercice 27 **Différence de deux lois logistiques indénpendantes. Oral ESCP 2005 3.4** **S**

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}\cdot$

Q1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de cette loi, appelée loi logistique.

Q2. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant la loi logistique.

On pose $Y = \text{Sup}(X_1, \ldots, X_n)$, $Z = Y - \ln n$.

Déterminer les fonctions de répartition F_Y et F_Z de Y et Z.

Q3. a) Montrer qu'il existe une fonction Φ que l'on déterminera telle que : $\forall\, z \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_Z(z) = \Phi(z)$.

b) Vérifier que Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer une densité φ de cette loi.

Q4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de densité φ.

a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-V$.

b) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $U - V$?

Exercice 28 **Deux convolutions. A rédiger. ESCP 2008 3.21** **S**.

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La lettre a désigne un réel strictement positif donné.

Q1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité. Calculer l'espérance $E(X)$ de X.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+1)^n x^a}{\Gamma(n)} (-\ln x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx$.

b) montrer que g_n est une densité de probabilité.

Soit T_n une variable aléatoire réelle de densité g_n.

c) Vérifier que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.

Q3. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi que X. On pose $Z = \dfrac{X_1}{X_2}\cdot$

a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln X_1$ et $Y_2 = -\ln X_2$.

b) En déduire une densité de la variable $T = \ln Z$.

c) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{a+1}{2} x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{a+1}{2} x^{-(a+2)} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Montrer que h est une densité de Z.

Q4. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On pose $W_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la variable aléatoire W_n admet g_n comme densité.

Exercice 29 **ESCP 1997 3.22** **S** **Rédigé**

Q1. Soit x un élément de $]0,1]$. On considère l'intégrale $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer l'existence de I_x.

b) Calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable $t = x\sin^2\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Q2. On dessine dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le carré de centre O et de côté 2 (? !), c'est à dire l'ensemble des points de coordonnées (x,y) vérifiant $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

On choisit un point M au hasard dans ce carré et on cherche la probabilité que ce point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1.

Soit X la variable aléatoire égale à l'abscisse de M et Y la variable égale à son ordonnée.

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[-1,1]$.

a) Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

b) Donner sous forme intégrale simple une densité h de X^2+Y^2.

c) Préciser h sur l'intervalle $[0,1]$ et en déduire le calcul de $P(X^2+Y^2 \leqslant 1)$.

d) Justifier géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 30 **Stabilité de la loi exponentielle de paramètre.** **ESCP 2009 3.9** **S**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $n+1$ variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On pose : $Y_n = X_1X_2...X_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

Q1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $-\ln(X_1)$. En déduire une densité de $-\ln(Y_n)$.

Q2. Le but de cette question est de calculer $p = P(Y_n < X_{n+1})$.

a) Montrer que la variable aléatoire $\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n)$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2t}\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{e^x}{2^n} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) En déduire la valeur de p.

Q3. a) Déterminer un équivalent de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction h étant la fonction définie dans la question précédente.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
