II CONVERGENCE EN LOI

Exercice 1 **Convergence en loi. Du discret "presque connu" au continu "connu" .** **F1**

a et b sont deux réels tels que $a < b$. n est un élémentde $\mathbb{N}^*$.

Pour tout k dans $[\![0, n]\!]$ on pose $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$. On choisit au hasard un élément de l'ensemble $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

X_n est la variable aléatoire réelle égale au point choisi.

Q1. Trouver la loi de X_n, son espérance et sa fonction de répartition.

Q2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 2 **Convergence en loi. Du discret "presque connu" au discret "connu".**

QSP ESCP 2010 E. JARDIN **F1⁻**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

Vu en QSP à l'ESCP en 2011, 2013, à HEC en 2010.

Exercice 3 **Convergence en loi. Du discret "connu" au discret "connu".**

QSP ESCP 2011 E. PHILIP **$\mathbf{F1^-}$**

α est un élément de $]0, 1]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ (*hum...*), X_n suit la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}\cdot$

Montrer que la suite (X_n) converge en loi et trouver la loi limite.

Deux énoncés sur le même thème. Je corrige les deux.

Exercice 4 **Convergence en loi. Du discret "presque connu"au continu "connu".**

QSP HEC 2008 S1 **F1**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i, $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Exercice 5 **Convergence en loi. Du discret "presque connu" au continu "connu".**

QSP ESCP 2009 **F1**

Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $a/n\cdot$

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}\cdot$

Exercice 6 **Convergence en loi. Du continu "inconnu" vers le discret "continu".** **F1**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_n = \operatorname*{Inf}_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$.

Montrer que la suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine a.

Exercice 7 **Convergence en loi. Du continu "inconnu" vers le continu "inconnu" .**

QSP ESCP 2012 S. TEIAR **F1**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Déja vu en QSP à l'ESCP en 2010. Vu à l'oral de l'ESCP en 2003 3.13, 2005 3.4.

Dans l'oral HEC 2002, 2006 on trouve la même chose avec $Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $(\lambda\, M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 **Convergence en loi. Du continu "inconu" au continu "connu". Partie décimale d'une variable à densité.** **F1**

Q1. X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Étudier la variable aléatoire réelle $Y = [X]$ (ou $Y = \mathrm{Ent}\,(X)$ ou $Y = \lfloor X \rfloor$) égale à la partie entière de X.

b) Étudier la variable aléatoire réelle $Z = X - Y$.

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}\cdot$

Montrer que la suite de terme général $X_n - [X_n]$ converge en loi (on précisera cette loi).

Thème également abordé dans oral ESCP 2006 3.27, QSP HEC 2013

Exercice 9 **Convergence en loi. Vers le continu "inconu".** **QSP HEC 2009 M. DESSUGES**

F2

a et b sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}}\ \mathrm{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ converge en loi.

Vu à HEC en 2010.

Maintenant j'arrête les connus et les inconnus ! Surprise ! !

Exercice 10 **Convergence en loi.** **QSP ESCP 2003** **F1$^-$**

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X.

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$?

Exercice 11 **Convergence en loi.** **QSP ESCP 2004** **F1$^-$**

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

Vu en 2005 à l'ESCP.

Exercice 12 **Convergence en loi.** **QSP HEC 2011 S 1152** **F1$^+$**

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence (? ?) de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 13 **Convergence en loi. Du discret au discret.** **D'après ESCP 1995 3.7** **F1$^+$**

N joueurs numérotés de 1 à N ($N \geqslant 2$) se lancent une balle au hasard. Au départ, c'est le joueur numéro 1 qui a la balle. Pour p dans N, X_p désigne la variable aléatoire égale au numéro du joueur qui possède la balle avant le $(p+1)^{\text{ème}}$ lancer.

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14 **Convergence en loi. Du continu vers le continu.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que la suite de terme général $Z_n = n \,\text{Inf}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

Thème abordé dans ESCP 2002 3.24.

Exercice 15 **Convergence en loi. Du continu vers le continu.** **QSP ESCP 1997 3.5** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $Z_n = \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (X_k) - \ln n$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Thème abordé dans ESCP 2002 3.24.

Exercice 16 **Convergence en loi. Du continu vers le continu.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi exponentielle de paramètre 2.

Montrer que la suite de terme général $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, \text{Sup}(e^{X_1}, e^{X_2}, \ldots, e^{X_n})$ converge en loi.

Exercice 17 **Convergence en loi. Du continu vers le continu.** **F2**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer que la suite de terme général $Z_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{\lambda}}}\, \text{Sup}(e^{X_1}, e^{X_2}, \ldots, e^{X_n})$ converge en loi.

Exercice 18 **Convergence en loi. Du continu au continu** **F2**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général $Y_n = n^{1/\lambda}\ \mathrm{Inf}(e^{-X_1}, \ldots, e^{-X_n})$.

Exercice 19 **Convergence en loi. Du discret au continu.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et qu'il existe un réel λ_n tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_n = k) = \lambda_n k$.

Q1. n est élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer λ_n et déterminer la fonction de répartition de $Y_n = \dfrac{X_n}{n}\cdot$

Q2. Montrer que la suite de terme général Y_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Exercice 20 **Convergence en loi. Du continu au continu. Inf aléatoire.** **D'après oral ESCP 2006 3.13.** **F2**

Soient n un élément de N^* et p un réel appartenant à $]0, 1[$

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur le segment $[0, n]$.

Soit N_n une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_i, suivant la loi binômiale de paramètres n et p.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général $W_n = \mathrm{Inf}(X_0, X_1, \ldots, X_{N_n})$.

Deux énoncés pour un même exercice. Je corrige le premier.

Exercice 21 **Convergence en loi. Du discret au discret.** **F2**

Pour p entier naturel non nul, on considère p urnes notées $U_1, U_2, \ldots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules ; pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires.

Q1. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

a) Trouver la loi de N_p et déterminer l'espérance $E(N_p)$ de N_p.

b) Montrer que la suite de terme général N_p converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Thème abordé dans ORAL ESCP 2000 3.27, 2004 3.25, 2013 2.25

Q2. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue des tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir une boule blanche. On note G_p la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a) Trouver la loi de G_p et déterminer son espérance.

b) Montrer que la suite de terme général G_p converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 22 **Convergence en loi. Du discret au discret.** **F2**

r est un élément de $\mathbb{N}^*$, U_r est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$ et $V_r = \dfrac{U_r}{r}$.

Q1. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Y_r est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout k dans $[\![1, r]\!]$, la loi conditionnelle de Y_r sachant que $\{V_r = \dfrac{k}{r}\}$ est binômiale de paramètres n et $\frac{k}{r}$. On suppose également que Y_r prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de Y_r. Montrer que Y_r converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Thème abordé dans ORAL ESCP 2000 3.27, 2013 2.25

Q2. X_r est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout k dans $[\![1, r]\!]$, la loi conditionnelle de X_r sachant que $\{V_r = \dfrac{k}{r}\}$ est géométrique de paramètre $\frac{k}{r}$. On suppose également que X_r prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Trouver la loi de X_r. Montrer que X_r converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q3. Trouver $E(Y_r)$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} E(Y_r)$. Même chose avec X_r.

Exercice 23 **Convergence en loi. Du continu au continu.** **QSP HEC 2011** **F1$^+$**

$(U_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Sup}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que $\big(n\,(\theta - X_n)\big)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q2. **Facultatif** Montrer que la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Vu en QSP à HEC en 2011. Thème abordé dans oral ESCP 2003 3.2.

Exercice 24 **Convergence en loi. Du discret au discret. Temps d'attente d'un numéro supérieur ou égale au précédent dans un tirage avec remise. D'après oral ESCP 2005 3.30** **F2**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire une à une des boules de l'urne avec remise et on s'arrête lorsque l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Q1. Trouver, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P(X_n > k)$. En déduire la loi de X_n.

Q2. Montrer que la suite de terme général X_n converge en loi vers une variable alátoires dont on précisera la loi.

Exercice 25 **Convergence en loi. Du discret au discret. Temps d'attente d'un numéro supérieur ou égal au premier résultat dans un tirage avec remise.** **F1$^+$**

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ($n \in [\![2, +\infty[\![$) On tire avec remise une boule de l'urne jusqu'à obtenir un numéro supérieur ou égal au premier numéro tiré. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effecués.

Montrer que la suites de terme général X_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Thème abordé dans l'oral HEC 2012 S9

Exercice 26 **Convergence en loi. Du discret au discret. Temps d'attente de la $r^{\text{ème}}$ boule blanche dans un tirage sans remise.** **F1$^+$**

Q1. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. r est un élément de $[\![1, a]\!]$.

On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. X est la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la $r^{\text{ème}}$ boule blanche.

Q1. Montrer que $X(\Omega) = [\![r, b + r]\!]$ et que, pour tout élément k de $[\![r, b + r]\!] : P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}\binom{a+b-k}{a-r}}{\binom{a+b}{a}}$.

Q2. r est un élément $[\![1, +\infty[\![$. $(N_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'élements de $\mathbb{N}^*$ et p un élément de $]0, 1[$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_n = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ pN_n \in [\![r, +\infty[\![$.

Pour tout élement n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire qui a la même loi que X lorsque $a = pN_n$ et $b = (1-p)N_n$.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi de Pascal de paramètres r et p.

Exercice 27 **Convergence en loi. Du continu au continu** **F1$^+$**

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \dfrac{\text{Ent}\,(nX)}{n}\cdot$ Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Thème abordé dans PB ECRICOME 2013.

Exercice 28 **Convergence en loi. Du continu au continu** **F1$^+$**

X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $[0, 1]$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$ on pose : $X_n = \dfrac{\text{Ent}\,(2^n X)}{2^n}$. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers X.

Exercice 29 **Convergence en loi. Du continu au continu** **F1 !**

X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant une densité f. On suppose f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\text{Ent}\,(nX)}{n}$ converge en loi vers X.

Exercice 30 **Convergence en loi. Du discret au discret. Les coïncidences.** **F2**

Q1. n est dans $\mathbb{N}^*$. $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ c'est à dire l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

a) Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ on note A_i l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ qui laissent fixe i. Calculer Card $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

En déduire que le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ n'ayant pas de point fixe est $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On pose par convention $D_0 = 1$.

Q2. n est élément de $\mathbb{N}^*$. On considère une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement toutes les boules de l'urne sans remise. On obtient une coïncidence au $i^{\text{ème}}$ tirage si la boule numéro i sort à ce tirage.

a) Trouver la loi de la variable aléatoire X_n 'egale au nombre de coïncidences obtenues.

b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Thème abordé dans l'oral d'ESCP 2013.

Exercice 31 **Convergence en loi. Du discret au discret.** **ESCP 2013 3.18** **F2**

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

Q1. On note F_n l'ensemble des **permutations** de $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.

a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut : $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot$

b) Déterminer la loi de Y_n.

c) Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Q2. On note E_n l'ensemble des **applications** de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

a) Déterminer la loi de X_n.

b) Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Exercice 32 **Convergence en loi. Du discret au discret. D'après ESSEC 81.** **F1$^+$**

N est un élément de $[\![3, +\infty[\![$. On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

On tire au hasard, successivement et SANS REMISE tous les jetons de l'urne et l'on note $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ la suite des num'eros obtenus.

X_N est la variable aléatoire égale au plus petit entier non nul r, s'il existe, tel que $u_r > u_{r+1}$ et à N si un tel r n'existe pas.

Q1 Montrer que si n est un élément de $[\![0, N-1]\!] : P(X_N > n) = \dfrac{1}{(n+1)!}\cdot$

Calculer $P(X_N > n)$ pour tout élément n de $[\![N, +\infty[\![$.

Q2 Déduire, avec soin, de ce qui pr'ecède la loi de X_N (il est conseillé de faire une "vérification").

Montrer que : $E(X_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\cdot$ Déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} E(X_N)$.

Q3 Montrer que la suite de terme général X_N converge en loi vers une variable aléatoire **discrète** dont on précisera la loi.

Montrer que X possède une espérance, et la comparer à $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} E(X_N)$.

Deux énoncés pour un même thème. Je corrige le second !

Exercice 33 **Convergence en loi. Du discret au continu.** **F2$^+$**

On tire deux fois de suite avec remise dans une urne contenant n boules ($n \in [\![2, +\infty[\![$) numérotées de 1 à n.

X_n (resp. Y_n) est la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du premier (resp. second) tirage.

Montrer que la suite de terme général $S_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$ converge en loi.

Exercice 34 **Convergence en loi. Du discret au continu.** **F2**

On tire deux fois de suite avec remise dans une urne contenant n boules ($n \in [\![2, +\infty[\![$) numérotées de 1 à n.
X_n (resp. Y_n) est la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du premier (resp. second) tirage.

Q1 Montrer que (X_n/n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q2 $S_n = X_n + Y_n$.

a) Montrer que si k est dans $[\![2, n]\!]$, $P(S_n = k) = \dfrac{k-1}{n^2}\cdot$

Montrer que si k est dans $[\![n+1, 2n]\!]$ alors $P(S_n = k) = \dfrac{2n+1-k}{n^2}\cdot$

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{i} P(S_n = k)$ pour i dans $[\![2, n]\!]$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{i} P(S_n = k) = \frac{1}{2n^2}\Big[(4n+1)i - i^2 - 2n^2 - 2n\Big]$ si i appartient à $[\![n+1, 2n]\!]$.

Q3 $T_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$ et F_n est la fonction de répartition de T_n.

a) Préciser $F_n(x)$ pour x élément de $\left]-\infty, \dfrac{2}{n}\right[$ et pour x dans $[2, +\infty[$.

b) Montrer que si x est élément de $\left[\dfrac{2}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right[$:

$$F_n(x) = \frac{\text{Ent}\,(nx)\ (\text{Ent}\,(nx) - 1)}{2n^2}$$

(on pourra utiliser Q2).

Montrer que ceci vaut encore pour x élément de $\left[0, \dfrac{2}{n}\right[$

c) Calculer $F_n(x)$ pour x élément de $\left[1 + \dfrac{1}{n}, 2\right[$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$ pour tout réel x.

e) Montrer très proprement que la suite de terme général T_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité

Q4 U et V sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que W est une variable aléatoire à densité et en donner une densité. Commenter.

Exercice 35 **Convergence en loi. Du discret au continu.** **Oral HEC 1996** **F2**

Certains disent qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}$ de paramètre p ($p \in]0, 1[$) si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ p(X = n) = pq^n \quad \text{où} \quad q = 1 - p$$

Q1. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de parmètre p à valeurs dans $\mathbb{N}$. Étudier la loi de $X + Y$.

Q2. n est élément de $[\![2, +\infty[\![$. X_n et Y_n sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de paramètre $1/n$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Étudier la loi de $Z_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$. Calculer $E(Z_n)$.

b) Calculer pour tout réel t différent de 1 et pout tout élément i de $\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{i} (k+1)t^k$.

Trouver la fonction de répartition F_n de Z_n.

c) $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - (x+1)\,e^{-x}$ si x est un réel positif ou nul. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

d) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité Z dont on précisera la loi. Calculer $E(Z)$.

Exercice 36 **Convergence en loi. Du continu au continu. Loi de Gumbel**. **ESCP 2002 3.24**

F1$^+$

Q1. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U.

Soit, d'autre part, Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \text{Inf}(U_1, \dots, U_n)$.

Montrer que la suite de variables (nZ_n) converge en loi vers Y.

Q2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = e^{-\lambda X}$.

Q3. On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :

a) $A_n = n \ \text{Inf}(e^{-\lambda X_1}, \dots, e^{-\lambda X_n})$.

b) $D_n = \text{Sup}(X_1, \dots, X_n) - \ln n$, dans le cas où $\lambda = 1$.

Exercice 37 **Convergence en loi. Loi de Cauchy.** **D'après HEC 2006** **F2**

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Q2. c est un réel strictement positif. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \dfrac{c}{\pi\,(c^2 + t^2)}$. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q3. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendates sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall \omega \in \Omega, \ M_n(\omega) = \text{Sup}(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ et $Z_n = \dfrac{\pi}{n\,c}\, M_n$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 38 **Convergence en probabilité et en loi. Loi de Pareto. Stabilité au niveau de la loi exponentielle.** **ESCP 2006 3.32** **F2⁺**

Soit α un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Étudier l'existence des moments (non centrés) de X. Les calculer lorsqu'ils existent.

Q3. On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi, de densité commune f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $Y_i = \ln(X_i)$, $\quad Z_n = \frac{1}{X_1 X_2 \cdots X_n}$.

a) Déterminer une densité de Y_i, $i \in [\![1, n]\!]$.

b) En déduire une densité de Z_n.

Q4. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $U_n = (Z_n)^{1/n}$.

a) Montrer que la suite $(\ln(U_n))_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante C que l'on déterminera.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers e^C.

Exercice 39 **Convergence en loi.** **ESCP 2010 3.11** **F2**

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus que, pour tout $i \geqslant 1$, la variable Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\alpha$.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q1. a) Rappeler l'expression de g_1 et calculer g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\alpha\, e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{n-1}$.

c) Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini (on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$).

d) Exprimer la variance $V(Z_n)$ de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

Q2. a) Calculer la fonction de répartition G_n de Z_n.

b) On définit $U_n = \dfrac{Z_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

c) Étudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$. Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$?

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(U_n)$.

Exercice 40 **Convergence en loi. Variable aléatoire réelle définie par une intégrale.**

Oral ESCP 2013 3.13 **F2**

Q1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x - t|\, dt$.

Donner, suivant les valeurs de x, l'expression explicite de $g(x)$ en fonction de x et vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, X est une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit sur Ω l'application Y par : $\forall\, \omega \in \Omega, Y(\omega) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big|X(\omega) - t\big|\, dt$.

On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q2. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

a) Exprimer Y en fonction de X.

b) Donner la fonction de répartition de Y.

c) Vérifier que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

d) Calculer l'espérance de Y.

Q3. On considère dans cette question une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, X_n suit la loi normale d'espérance nulle et d'écart-type $1/n$.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, l'application Y_n par : $\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big|X_n(\omega) - t\big|\, dt$.

On admet que, pour tout entier naturel non nul, Y_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n et Φ celle de la loi normale centrée réduite.

a) Exprimer, pour tout réel y, $F_{Y_n}(y)$ en fonction de $\Phi(y)$ et de n.

b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Exercice 41 **Convergence en loi. Loi de cauchy.** **Oral ESCP 2012 3.3** **F2**

Q1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}\cdot$

Montrer que g est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant g pour densité (on dit que X suit la loi d'Euler).

Q2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Q3. Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

Q4. On pose $Y = e^X$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Q5. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la même loi que Y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \text{Sup}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Thème abordé l'oral ESCP 2013 3.9

Exercice 42 **Convergence en loi** **EDHEC 2013 Ex 3** **F1$^+$**

1) On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
Dans la suite, on considére une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléaoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}\cdot$ On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléaoires X_k.

3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x.

4) a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}\cdot$

En déduire que : $\forall x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n\cdot$

5) a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 43 **Convergence en loi, en probabilité, théorème de la limite centrée.**

D'après ESCP 2010 2.4 **F2$^+$**

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées) de densité : $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q1. Donner la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X_0.

Q2. Soit a un réel de $]0,1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose, sous réserve d'existence : $S_a(\omega) = \text{Min}\{i \in \mathbb{N} \;/\; X_i(\omega) \geqslant \sqrt{a}\}$.

Donner sa loi.

Q3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $0 < a_n < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Déterminer la convergence en loi de la suite $((1-a_n)S_{a_n})_n$.

Q4. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \geqslant \frac{2n}{3} + \varepsilon n\big)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant \frac{2n}{3} + \sqrt{n}\big)$.

Q5. Soit α un réel. On pose $R_n = \text{Inf}(n^\alpha X_0, n^\alpha X_1, \ldots, n^\alpha X_{n-1})$. Étudier en fonction de α la convergence en loi de la suite (R_n).

Exercice 44 **Convergence en loi. Du continu au continu.** **HEC 2001 Prob. 3** **F2$^+$**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite.

Q1. Donner la loi de $\dfrac{1}{2}X_1^2$. En déduire $E(X_1^2)$ et $V(X_1^2)$.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$. Montrer que $P(|S_n - 1| \geqslant n^{-\frac{1}{3}}) \leqslant 2\,n^{-\frac{1}{3}}$.

Q3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \dfrac{X_0}{\sqrt{S_n}}\cdot$

Rappelons que X_0 et $-X_0$ ont même loi. On admet alors que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire réelle à densité ayant même loi que $-T_n$.

a) x est réel strictement positif et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que : $P(T_n \leqslant x) \leqslant P\left(X_0 \leqslant x\sqrt{1+n^{-\frac{1}{3}}}\right) + 2\,n^{-\frac{1}{3}}$

(on pourra utiliser le système complet $(A, \overline{A})$ avec $A = \{X_0 \leqslant x\sqrt{1+n^{-\frac{1}{3}}}\}$)

Montrer que $P(T_n \leqslant x) \geqslant (1 - 2\,n^{-\frac{1}{3}})\,P\left(X_0 \leqslant x\sqrt{1-n^{-\frac{1}{3}}}\right)$

b) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Exercice 45 **La convergence en probabilité donne la convergence en loi** **F2$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X et on se propose de montrer que cette suite converge en loi vers X.

On note F la fonction de répartition de X et pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, F_n la fonction de répartition de X_n.

Soit x un réel oû F est continue. On se propose donc de montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists r \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ n \geqslant r \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Soit ε un réel strictement positif.

Q1. Montrer que l'on peut trouver un réel α strictement positif tel que : $|F(x-\alpha) - F(x)| < \varepsilon/2$ et $|F(x+\alpha) - F(x)| < \varepsilon/2$.

Q2. Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. Montrer que $\{X_n \leqslant x\} \subset \{X \leqslant x + \alpha\} \cup \{|X - X_n| \geqslant \alpha\}$ (prendre ω dans Ω tel que $X_n(\omega) \leqslant x$ et distinguer deux cas : $X(\omega) \leqslant x + \alpha$ et $X(\omega) > x + \alpha$).

En déduire que : $F_n(x) - F(x) \leqslant \varepsilon/2 + P(|X_n - X| \geqslant \alpha)$.

Montrer que $F_n(x) - F(x) \geqslant -\varepsilon/2 - P(|X_n - X| \geqslant \alpha)$. Conclure.

EN PLUS

---

1. **Convergente en loi. Du continu au continu.**

Q1. n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} c_n \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Trouver c_n pour que f_n soit une densité de probabilité.

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire réelle de densité f_n.

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Thème abordé dans ESCP 2003 3.37.

2. **Convergente en loi. Du continu au continu. Oral ESCP 2005 3.31**

Texte ESCP ! !

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On définit deux suites de variables (Y_n) et (Z_n) par $Y_1 = Z_1 = X_1$ et : $\forall n \geqslant 1, Y_{n+1} = \mathrm{Sup}(X_{n+1}, Z_n), Z_{n+1} = \mathrm{Inf}(X_{n+1}, Y_n)$.

Enfin on note G_n (resp H_n) la fonction de répartition de Y_n (resp. Z_n).

Q1. Exprimer G_{n+1} et H_{n+1} en fonction de G_n et H_n. Calculer $G_n(x)$ et $H_n(x)$ quand $x \notin [0, 1]$.

Q2. Soit $x \in [0, 1]$. On pose $V_n(x) = \begin{pmatrix} G_n(x) \\ H_n(x) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U(x) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que : $V_{n+1}(x) = A(x)V_n(x) + U(x)$.

En déduire que : $V_n(x) = A^{n-1}(x)V_1(x) + \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} A^k(x)\Big)U(x)$ pour $n \geqslant 2$.

Q3. a) Soit $x \in [0, 1]$. Calculer $A^k(x)$ et montrer que pour tout $p \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1} A^k(x) = \frac{1 - x^p(1-x)^p}{1 - x + x^2}\big(I + A(x)\big)$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} : G_{2p+1}(x) = \dfrac{x^2}{1-x(1-x)} + (x(1-x))^{p+1}\dfrac{1-x}{1-x(1-x)}$ et

$H_{2p+1}(x) = \dfrac{x}{1-x(1-x)} - (x(1-x))^{p+1}\dfrac{x}{1-x(1-x)}$.

On montre de même, et on admettra que : $G_{2p}(x) = \dfrac{x^2}{1-x(1-x)} - (x(1-x))^{p}\dfrac{x^2}{1-x(1-x)}$ et

$H_{2p}(x) = \dfrac{x}{1-x(1-x)}(x(1-x))^{p}\dfrac{(1-x)^2}{1-x(1-x)}$.

Q4. En déduire que (Y_n) et (Z_n) convergent en loi.

3. **Convergente en loi. Du continu au continu. ESCP 2002 3.5**

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune.

1. Pour tout $n > 0$, on pose $M_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F et n.

2. Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln n$

Déterminer la limite en loi de la suite (Z_n).

3. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et on suppose que X_1 admet pour fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = n^{1/a}(M_n - 1)$. Déterminer la limite en loi de la suite (Z_n).

Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$?

4. **Convergente en loi. Du discret fini au discret infini. ESCP 2002 3.29**

On considère une population dont l'effectif aléatoire à chaque instant $n = 0, 1, 2, \ldots$ est noté X_n. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, la taille de la population est égale à 1 soit $X_0 = 1$. Entre l'instant n et l'instant $n+1$, et indépendamment pour chaque n, la population entière double ou est totalement détruite, chacune de ces éventualités se produisant avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, puis un individu s'ajoute à la population. On note Y_n la variable aléatoire égale à 1 ou à 0 selon que c'est la première ou la seconde des deux éventualités précédentes qui se produit entre les instants n et $n+1$.

Q1. Préciser la loi des variables aléatoires Y_n. Que peut-on dire de ces variables aléatoires ?

Q2. a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_{n+1} en fonction de X_n et Y_n.

b) En déduire l'ensemble E_n des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.

Q3. a) Déterminer la loi des variables aléatoires X_1, X_2, X_3.

b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n en fonction de n.

Q4. Montrer que la suite (X_n) converge en loi quand n tend vers l'infini et préciser sa limite.

5. **Convergente en loi. Du discret infini au discret infini. Records. ESCP 2001 3.27**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et on appelle H_n le nombre $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, que l'on ne cherchera pas à simplifier.

On dispose dans une urne n jetons numérotés de 1 à n.

Q1. Dans un premier temps, on prélève au hasard ces n jetons, un par un et sans remise.

On note $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ les numéros des jetons dans l'ordre dans lequel ils ont étés tirés.

Pour $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, on dit qu'il y a record en $i \geqslant 2$ si l'on a : $u_i > \mathrm{Max}(u_1, \dots, u_{i-1})$. On convient qu'il y a record en 1.

a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, montrer que si p_i est la probabilité qu'il y ait un record en i, on a $p_i = \dfrac{1}{i}$.

b) On appelle S_n le nombre de records obtenus au cours des n tirages. Calculer l'espérance de S_n.

Q2. Dans un deuxième temps, on prélève, toujours au hasard, successivement, mais cette fois avec remise, un jeton dont on note le numéro u_i pour le $i^{\text{ème}}$ tirage. On dit maintenant qu'il y a record en 1 et en tout $i \geqslant 2$ tel que $u_i \geqslant \mathrm{Max}(u_1, \dots, u_{i-1})$.

On note r la probabilité qu'il n'y ait qu'un record (en 1), c'est-à-dire que $u_j < u_1$ pour tout $j \geqslant 2$.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note r_k la probabilité de l'événement :

$$A_k = (u_2 < u_1) \cap (u_3 < u_1) \cap \ldots \cap (u_{k+1} < u_1)$$

S'il y a au moins deux records, on note t_n la durée de vie du premier record, c'est-à-dire $i - 1$ si le deuxième record est au rang i.

a) On pose $r_0 = 1$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $r_k = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{n}\Big)^k$. En déduire que la série de terme général r_k est convergente.

b) Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer la probabilité de l'événement $(t_n > k)$ à l'aide de r_k et de r. En déduire une expression de la probabilité de l'événement $(t_n = k)$ et montrer que $r = 0$.

c) Calculer l'espérance $E(t_n)$ de la durée de vie du premier record.

d) Montrer que $(t_n)_{n \geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

6. **Convergente en loi. Du continu au continu. ESCP 2000 3.34**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ et de fonction de répartition F. On pose :

$$U_n = \mathrm{Min}\{X_1, \dots, X_n\} \text{ et } V_n = \mathrm{Max}\{X_1, \dots, X_n\}$$

Q1. Déterminer la fonction de répartition F_n (resp. G_n) de la variable U_n (resp. V_n).

Q2. Soient a un nombre réel et b un réel strictement positif. On définit les variables Y_n et Z_n en posant :

$$Y_n = a + bnF(U_n) \quad \text{et} \quad Z_n = a + bn(1 - F(V_n))$$

a) Déterminer la fonction de répartition H_n (resp. L_n) de Y_n (resp. Z_n). Que constatez-vous ?

b) Pour x fixé, déterminer la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

Q3. Reprendre les questions précédentes en supposant que les variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ de fonction de répartition F. Que remarquez-vous ?

7. **Convergente en loi. Du continu au continu. ESCP 1999 3.23**

Q1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Soit $Y_n = nX_n$ où X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et qui admet f_n pour densité.

Pour $x \in [0, n]$, calculer $P[Y_n \leqslant x]$. En déduire que la suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable suivant une loi exponentielle.

Q2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(n+2)x(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Soit $Y_n = nX_n$ où X_n admet pour densité f_n. Pour $x \in [0, n]$, montrer que $P[Y_n \leqslant x] = 1 - \left(\dfrac{n+1}{n}x + 1\right)\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n+1}$.

En déduire que la suite de variables $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

8.

n est un élément de $\mathbb{N}$.
Pour tout réel positif on pose : $f_n(x) = \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

Q1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ (on pourra calculer I_0 et former une relation entre I_{n+1} et I_n).

Q2. $\forall x \in\,]-\infty, 0[,\ g_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{n!}$.
Montrer que g_n est une densit'e de probabilit'e. G_n est la fonction de r'epartition d'une variable al'eatoire de densit'e g_n. Exprimer G_{n+1} en fonction de G_n. En d'eduire l'expression de G_n sous forme d'une somme.

Q3. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$ pour tout r'eel x. Morale ?
