J'ai remplaçé dans les énoncés les $\text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ par des $\text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et les $\text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ par des $\text{Inf}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Évidemment ce n'était pas possible dans les corrections déjà écrites à la main. De plus on trouve encore beaucoup de $\text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $\text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ aux concours...

CONVERGENCE EN PROBA

Exercice 1 **Convergence en probabilité.** **F1**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Sup}}\ X_k$.

Montrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine b. Et pour $\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Inf}}\ X_k\right)_{n\geqslant 1}$?

Exercice 2 **Convergence en probabilité.** **F1**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Inf}}\ X_k$.

Montrer que la suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine a.

Exercice 3 **Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $Y_n = e^{F_n}$.

Q1. a) n est dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

b) Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Q2. Retrouver ce résultat en deux lignes avec le cours.

Exercice 4 **Convergence en loi et probabilité.** **F1$^+$**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi et mutuellement indépendantes. F est la fonction de répartition des variables de cette suite.

On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x(1 - F(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (xF(-x)) = 0$.

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\ \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $m_n = \dfrac{1}{n}\ \text{Inf}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 1}$ (resp.$(m_n)_{n\geqslant 1}$) converge en loi et en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Exercice 5 **Convergence en probabilité. Loi de Cauchy.** **F1**

Q1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n : t \to \dfrac{1}{\pi}\ \dfrac{n}{1 + n^2\, t^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_n.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.

Facultatif ! Pour n dans $\mathbb{N}^*$, X_n possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

Exercice 6 **Loi faible des grands nombres.** **QSP HEC 2006-9** **F1**

On considére deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ X_n et Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que X_1, X_2, ..., X_n, ..., Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sont mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, N_n est la variable aléatoire égale au nombre d'indices i de $[\![1, n]\!]$ tels que l'événement $\{X_i \leqslant Y_i\}$ se réalise.

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 7 **Convergence en probabilité.** **QSP HEC 2008 S6** **F1**

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement positif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\,\theta}\sum_{k\leqslant n\,x}\frac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$! !

Exercice 8 **Convergence en probabilité.** **QSP HEC 2009-4** **F1**

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\,\mathrm{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 9 **Convergence en probabilité.** **QSP HEC 2011 S 1152** **F1**

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence (? ?) de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 10 **Loi faible des grands nombres.** **QSP HEC 2011 C. DAUDET** **F1**

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4n\,t}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Exercice 11 **Une condition suffisante pour avoir convergence en probabilité.** **F1**

Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Q1. Un cas très particulier mais usuel.

On suppose que $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ E(X_n-X)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n-X)=0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Q2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n-X)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n-X)=0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Cette condition est suffisante mais n'est pas nécessaire. Voir plus bas.

Même thème pour les deux exercices suivants. Le deuxième ne contient pas d'indication.

Exercice 12 **Convergence en probabilité.** **F1**

Pour tout élement n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que :

$$X_n(\Omega)=\left\{\frac{1}{n},n\right\},\ p\left(X_n=\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1} \text{ et } P(\{X_n=n\})=\frac{1}{n+1}.$$

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine X égale à 0.

Q2. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n-X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n-X)$.

Exercice 13 **Convergence en probabilité.** **QSP HEC 2007-13-S107** **F2**

Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable nulle mais telle que la suite $\big(E(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\big(V(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

Exercice 14 **Convergence en probabilité.** **F1**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n=X_n+X_{n+1}$. On pose encore, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n=\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}$.

Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $2p$.

Exercice 15 **Convergence en probabilité.** **ESCP 1999 3.2** **F1$^+$**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi binômiale de paramètres 1 et p. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n=X_nX_{n+1}$.

Montrer que $\left(\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à p^2.

Exercice 16 **Convergence en probabilité.** **F1$^-$**

f est une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n : t\to n\,f(nt)$ est une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$.

Q2. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ de densité f_n.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.

Exercice 17 **Convergence en loi et convergence en probabilité.** **F1**

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $Y = e^{-X}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = e^{-X+\frac{1}{n}}$.

Étudier Y. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y. La suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle en probabilité vers Y ?

Exercice 18 **Convergence en probabilité et convergence "véloce".** **Oral ESCP 2007 3.15** **F1$^+$**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \mathrm{Inf}(U_1, U_2, ..., U_n)$.

Q1. a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.

b) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

c) Étudier la convergence en probabilité de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q2. On définit les variables aléatoires U et V par : $U = \mathrm{Inf}(U_1, 1-U_1)$ et $V = \mathrm{Sup}(U_1, 1-U_1)$. Enfin on pose $Q = \dfrac{V}{U}\cdot$

a) Déterminer la loi de Q.

b) Étudier l'existence de l'espérance de Q.

Q3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit X_n la variable aléatoire définie sur Ω par : $X_n(\omega) = \sqrt{n}$ si $U_1(\omega) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $X_n(\omega) = 0$ si $U_1(\omega) > \dfrac{1}{n}\cdot$

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X_n est effectivement une variable aléatoire.

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge "vélocement" vers Z si pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $P(\{\omega \in \Omega / |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \alpha\})$ converge.

b) En utilisant la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, comparer la convergence en probabilité et la convergence "véloce".

Exercice 19 **La convergence en loi vers une variable constante donne la convergente en probabilité.** **F2$^-$**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en loi vers la variable certaine égale à c.

Montrer que cette suite converge en probabilité vers c.

Exercice 20 **Une condition nécessaire et suffisante de convergence en probabilité.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists p \in [\![n_0, +\infty [\![,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ n \geqslant p \Rightarrow P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) < \varepsilon.$$

La convergence en probabilité donne la convergence en loi. C'est un exercice corrigé dans le partie convergence en loi.

Dans la suite nous allons illustrer le fait que la réciproque est fausse.

Exercice 21 **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité.** **F1$^-$**

Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. On pose : $X = -Y$. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on pose encore : $X_n = Y$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers X sans converger en probabilité vers X.

Exercice 22 **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité again.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$ ($r \in [\![2, +\infty[\![$) et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la même loi.

a) Montrer que converge $(X_n)_{n \geqslant 0}$ en loi vers X.

b) Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas en probabilité vers X

(on pourra montrer que $1 - \dfrac{1}{r} = P(|X_p - X_q| \geqslant 1) \leqslant P(|X_p - X| \geqslant \dfrac{1}{2}) + P(|X_q - X| \geqslant \dfrac{1}{2})$ et raisonner par l'absurde).

Exercice 23 **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité again.** **F1$^-$**

$(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$). $q = 1 - p$.
Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers X_0 mais ne converge pas en probabilité vers cette variable.

Exercice 24 **Convergence en probabilité.** **ESCP 2010** D. ATTIAS **F1$^-$**

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0, 1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Deux énoncés pour un même résultat. Le premier est sans indication. Je corrige le second.

Exercice 25 **De "l'unicité" de la limite dans une convergence en loi.** **F2**

$(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge vers deux variables aléatoires réelles X et X' de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que X' est presque sûrement égale à X, c'est à dire que $P(X = X') = 1$ (ou que $P(X \neq X') = 0$).

Exercice 26 **De "l'unicité" de la limite dans une convergence en loi.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X et X' sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que la suite $(X_n)_{n \geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X et X' et on se propose de montrer que X est presque sûrement égale à X'.

Q1. Soit ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.

Comparer les événements $\{|X - X'| \geqslant \varepsilon\}$ et $\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{|X_n - X'| \geqslant \varepsilon/2\}$ pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$.

En déduire que $P\big(\{|X - X'| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0$

Q2. Comparer les événements $\{X \neq X'\}$ et $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*}^{+\infty} \left\{|X - X'| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$. Conclure.

Exercice 27 **Convergence en moyenne et convergence en probabilité.** **EDHEC 2009 Ex 1**

• On admet que si une suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique.

Plus précisément, si l'on a $T_n \xrightarrow{P} T$ et $T_n \xrightarrow{P} T'$, alors $P(T = T') = 1$.

• On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire U si et seulement si : pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire $|U_n - U|$ possède une espérance et $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|U_n - U|\big) = 0$.

• On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable V à valeurs positives ou nulles et possédant une espérance mathématique :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ P(V > \varepsilon) \leqslant \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

Q1. Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.

Montrer que, si la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.

Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 1$).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} Z_k$.

Q2. a) Pour tout entier naturel non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Comparer les événements $\{Y_n > \varepsilon\}$ et $\{Y_n = 0\}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

Q3. a) Montrer que, si la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait en moyenne vers la variable aléatoire Y, alors on aurait

$P(Y = 0) = 1$.

b) $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de Y_n.

c) Établir que si n est dans $\mathbb{N}^*$, $E\big(|Y_n - Y|\big) \geqslant E(Y_n) - E(Y)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|Y_n - Y|\big)$.

Q4. Conclure.

Deux textes pour le même exercice. Je corrige le premier...

Exercice 28 **Convergence en probailité.** **QSP HEC 2010** J. DIAZ

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

Exercice 29 **Convergence en probabilité.**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1. Justifier l'existence de l'espérance de $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$.

Q2. Soit ε un réel strictement positif. Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$.

a) Montrer que : $0 \leqslant \dfrac{|X_n|}{1+|X_n|} \leqslant \mathbb{1}_{\{|X_n|\geqslant \varepsilon\}} + \varepsilon$.

b) Montrer que : $0 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, \mathbb{1}_{\{|X_n|\geqslant \varepsilon\}} \leqslant \dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}$.

Q3. a) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle si et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) = 0$.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X si et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\dfrac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = 0$.

Exercice 30 **Convergence en probabilité d'une somme et d'un produit.**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ (resp. $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$) est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en probabilité vers la variable aléatoire X (resp. Y).

Q1. Montrer que la suite $(X_n + Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers $X+Y$ (on pourra remarquer que : $\{|X_n + Y_n - X - Y| \geqslant \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geqslant \varepsilon/2\}$).

Q2. On se propose de montrer que la suite $(X_n\, Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers $X\,Y$.

a) On suppose ici que $X = Y = 0$.

Montrer que, pour tout réel strictement positif ε : $P(|X_n\, Y_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|X_n| \geqslant \sqrt{\varepsilon}) + P(|Y_n| \geqslant \sqrt{\varepsilon})$. Conclure.

b) On revient au cas général. Dans une première étape on fixe ε dans $\mathbb{R}^{+*}$ et on se propose de montrer que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|(X_n - X)\, Y| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Soit α un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'on peut trouver un réel A strictement positif tel que :

$$P(|(X_n - X)Y| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{A}\right) + P(|Y| \geqslant A) \leqslant P\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{A}\right) + \frac{\alpha}{2}\cdot$$

Achever la preuve du résultat proposé.

En écrivant $X_n\, Y_n - X\, Y = (X_n - X)\, Y + (Y_n - Y)\, X + (X_n - X)\,(Y_n - Y)$ et en coupant les ε en trois montrer que la suite $(X_n\, Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers $X\,Y$.

Exercice 31 **La convergence presque sûre donne la convergence en probabilité**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X si la probabilité de $\left\{\omega \in \Omega \mid \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$ est 1.

On suppose que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X et on se propose de montrer qu'elle converge en probabilité vers X.

Soit ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On pose pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, $A_n = \{|X - X_n| \geqslant \varepsilon\}$.

On pose encore $S = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$

Q1. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \subset \overline{S}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0$.

Q2. Conclure.

Exercice 32 **La convergence en probabilité ne donne pas néssairement la convergence presque sûre**

F2

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note α_n la partie entière de $\dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est l'indicatrice de l'événement $A_n = X^{-1}\left(\left]\dfrac{n-2^{\alpha_n}}{2^{\alpha_n}}, \dfrac{n-2^{\alpha_n}+1}{2^{\alpha_n}}\right]\right)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2. Soit ω un élément de Ω. Montrer que pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$ il existe deux élément k et k' de $[\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$ tels que $X_k(\omega) = 1$ et $X_{k'}(\omega) = 0$.

En déduire que pour tout élément ω de Ω, la suite de terme général $X_n(\omega)$ diverge. Conclure.

Exercice 33 **La convergence en probabilité et convergente presque sûre.** **Oral ESCP 2004 3.27**

Dans cet exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes à valeurs dans $[0,1]$ et de même loi uniforme sur cet intervalle.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, on pose : $Y_n(\omega) = \mathrm{Max}(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Q1. Montrer que Y_n est une variable aléatoire, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

Q2. a) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon)$.

Q3. a) Montrer que pour tout ω de Ω, la suite $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $Y(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} Y_n(\omega)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n,\varepsilon} = \big(|Y_n - 1| \leqslant \varepsilon\big) = \{\omega \in \Omega \,/\, |Y_n(\omega) - 1| \leqslant \varepsilon\}$ et $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} B_{n,\varepsilon}$.

Calculer $P(B_\varepsilon)$ puis $P\Big(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} B_{\frac{1}{k}}\Big)$.

c) En déduire qu'il existe $\Omega' \in \mathcal{B}$ de probabilité égale à 1 tel que : $\forall \omega \in \Omega',\ Y(\omega) = 1$.
