Exercice 1 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}\, X_k$.

Q1. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine b.

Q2. Et $\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}\, X_k\right)_{n\geqslant 1}$?

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(\{M_n-b\geqslant\varepsilon\}\cup\{M_n-b\leqslant-\varepsilon\})$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n-b\geqslant\varepsilon)+P(M_n-b\leqslant-\varepsilon)$ par incompatibilité.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n\geqslant b+\varepsilon)+P(M_n\leqslant b-\varepsilon) = P(M_n\leqslant b-\varepsilon)$ car M_n prend ses valeurs dans $[a,b]$.

1er cas. $b-\varepsilon<a$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n\leqslant b-\varepsilon)=0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon)=0$.

2ème cas. $b-\varepsilon\geqslant a$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n\leqslant b-\varepsilon) = P(\{X_1\leqslant b-\varepsilon\}\cap\dots\cap\{X_n\leqslant b-\varepsilon\})$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(X_1\leqslant b-\varepsilon)\cdots P(X_n\leqslant b-\varepsilon)$ par indépendance.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(X_1\leqslant b-\varepsilon)\cdots P(X_n\leqslant b-\varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ b-\varepsilon\in[a,b]}}{=} \left(\dfrac{b-\varepsilon-a}{b-a}\right)^n$

Or $\left|\dfrac{b-\varepsilon-a}{b-a}\right| = \dfrac{b-a-\varepsilon}{b-a} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon)=0$.

Finalement $(M_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine b.

Q2 Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $m_n=\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\min} X_k$. Montrons que $(m_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à a.

V1 On utilise des arguments analogues à ceux de Q1

V2 On utilise Q1.. en remarquant que $m_n = -\max(-X_1,-X_2,\dots,-X_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([-b,-a])$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $(-X_n)_{n\geqslant1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors $(-m_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $-a$ donc $(m_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à a...

Exercice 2 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à a.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de M_n.

M_n prend ses valeurs dans $[a,b]$ donc $\forall x \in]-\infty, a[$, $F_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [b, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [a,b[$. $F_n(x) = P(M_n \leqslant x) = 1 - P(M_n > x) = 1 - P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k > x)$.

$F_n(x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) = 1 - P(X_1 > x) \dots P(X_n > x)$.

$F_n(x) = 1 - (1 - P(X_1 \leqslant x)) \cdots (1 - P(X_n \leqslant x)) = 1 - \left(1 - \dfrac{x-a}{b-a}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ 1 - \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^n & \text{si } x \in [a,b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, +\infty[\end{cases}$$

$\forall x \in]-\infty, a[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

$\forall x \in]a,b[$, $\left|\dfrac{b-x}{b-a}\right| < 1$ donc $\forall x \in]a,b[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - 0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(a) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a) = 0$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \\ 1 & \text{si } x \in]a, +\infty[\end{cases}$

Posons $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$. X est la variable aléatoire certaine égale à a.

Notons F sa fonction de répartition.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ 1 & \text{si } x \in [a, +\infty[\end{cases}.$$

1) F est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en a.

2) $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$

Alors $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine X égale à a.

Exercice 3 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et qu'il existe un réel λ_n tel que :

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(\{X_n = k\}) = \lambda_n k.$

Q1 n est élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer λ_n et déterminer la fonction de répartition F_n de $Y_n = X_n/n = \dfrac{X_n}{n}$.

Q2 a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ pour tout réel x (on s'efforcera dans une deuxième étape de donner une conclusion qui fait intervenir les intervalles $]-\infty, 0[$, $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$.).

b) Montrer que la fonction F qui à tout réel x associe $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Q1) $n \in \mathbb{N}^*$. $1 = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_n k = \lambda_n \sum_{k=1}^{n} k = \lambda_n \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\underline{\lambda_n = \dfrac{2}{n(n+1)}}$.

$Y_n(\Omega) = \left\{ \dfrac{k}{n} ; k \in [\![1, n]\!] \right\} = \left\{ \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}, \dots, \dfrac{n}{n} \right\}$.

$\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = 0$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \leqslant x\}) = 1$.

Soit $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right[$. $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \sum\limits_{k \in [\![1,n]\!] \text{ et } \frac{k}{n} \leqslant x} P\left(\dfrac{X_n}{n} = \dfrac{k}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{Ent(nx)} P(X_n = k)$.

$F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{Ent(nx)} \dfrac{2k}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n(n+1)} \dfrac{Ent(nx)(Ent(nx)+1)}{2} = \dfrac{Ent(nx)(Ent(nx)+1)}{n(n+1)}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, \frac{1}{n}\right[\\ \dfrac{Ent(nx)(Ent(nx)+1)}{n(n+1)} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Notons que si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$, $Ent(nx) = 0$ donc $\dfrac{Ent(nx)(Ent(nx)+1)}{n(n+1)} = 0 = F_n(x)$.

On peut donc encore écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{Ent(nx)(Ent(nx)+1)}{n(n+1)} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Q2 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in]-\infty,0[,\ F_n(x)=0$ donc $\forall x\in]-\infty,0[,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x)=0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in [1,+\infty[,\ F_n(x)=1$ donc $\forall x\in [1,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x)=1$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_n(0)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(0)=0$. (*)

Soit $x\in]0,1[$. $\mathrm{Ent}(nx) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$

... jusque si $x=0$ (*)

$1 = \underset{n\to+\infty}{o}(\mathrm{Ent}(nx))$ car $\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{Ent}(nx))=+\infty$ donc $\mathrm{Ent}(nx)+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{Ent}(nx) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$

Ainsi $F_n(x) = \dfrac{\mathrm{Ent}(nx)(\mathrm{Ent}(nx)+1)}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(nx)(nx)}{n(n)} = x^2$

donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)=x^2$ ... ce qui vaut pour $x=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ x^2 & \text{si } x\in [0,1[\\ 1 & \text{si } x\in [1,+\infty[\end{cases}$.

b) Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\lim_{n\to+\infty}F_n(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ x^2 & \text{si } x\in [0,1[\\ 1 & \text{si } x\in [1,+\infty[\end{cases}$.

Notons que $F(1)=1=1^2$ et $F(0)=0^2=0$.

Alors $\forall x\in]-\infty,0]$, $F(x)=0$, $\forall x\in [0,1]$, $F(x)=x^2$, $\forall x\in [1,+\infty[$, $F(x)=1$.

Ainsi :
1.. F prend ses valeurs dans $[0,1]$
2.. $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$ et $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$

Mais clairement, et à méditer :

3.. F est continue sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$; en particulier F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

4.. F est croissante sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

1, 2, 3 et 4 montrent que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Ainsi $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y.

Exercice 4 Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ($n \in [\![2,+\infty[\![$) On tire avec remise une boule de l'urne jusqu'à obtenir un numéro supérieur ou égal au premier numéro tiré. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effecués.

Montrer que la suite de terme général X_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ nous noterons T_i la variable aléatoire égale au résultat du $i$ème tirage. $(\{T_1=j\})_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

$X_n(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$.

$\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ P(X_n=k)=\sum_{j=1}^{n} P(\{T_1=j\}\cap\{X_n=k\})$

$\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ P(X_n=k)=\sum_{j=1}^{n} P(\{T_1=j\}\cap\{T_2<j\}\cap\dots\cap\{T_{k-1}<j\}\cap\{T_k\geq j\})$

$\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ P(X_n=k)=\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{j-1}{n}\right)^{k-2}\times\frac{n-(j-1)}{n}$.

$\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ P(X_n=k)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{j-1}{n}\right)^{k-2}-\left(\frac{j-1}{n}\right)^{k-1}\right]=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^{k-2}-\left(\frac{j}{n}\right)^{k-1}\right]$.

Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. Posons $\forall t\in[0,1]$, $g_k(t)=t^{k-2}-t^{k-1}$. g_k est continue sur $[0,1]$ donc

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(\frac{j}{n}\right)\right)=\int_0^1\left(t^{k-2}-t^{k-1}\right)dt=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ et ceci pour tout k dans $[\![2,+\infty[\![$.

Posons $\forall k\in[\![2,+\infty[\![$, $f(k)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

- $[\![2,+\infty[\![$ est dénombrable
- $\forall k\in[\![2,+\infty[\![$, $f(k)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.
- $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} f(k)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$

Ainsi la série de terme général $f(k)$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)=1$.

Ceci achève de montrer que f est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Donc la suite $(X_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète dont la loi est f.

Exercice. Montrer que $E(X_n)=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ (on donnera au moins 3 versions dont une avec des espérances conditionnelles).

Exercice 5 X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \dfrac{\text{Ent}\,(nX)}{n}$.

Trouver la loi de Y_n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ (c'est du discret...). Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers X.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. nX prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ Ent(nX) prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors Y_n prend ses valeurs dans $\left\{ \frac{k}{n} ; k \in \mathbb{N} \right\}$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_n = \frac{k}{n}) = P(\text{Ent}(nX) = k) = P(k \leq nX < k+1) \overset{X \text{ a une densité}}{=} P(\frac{k}{n} < X \leq \frac{k+1}{n})$.

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_n = \frac{k}{n}) = F_X(\frac{k+1}{n}) - F_X(\frac{k}{n}) = 1 - e^{-\lambda \frac{k+1}{n}} - (1 - e^{-\lambda\frac{k}{n}}) = (1 - e^{-\lambda/n}) e^{-\lambda \frac{k}{n}}$.

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_n = \tfrac{k}{n}) = F_X(\tfrac{k+1}{n}) - F_X(\tfrac{k}{n}) = (1 - e^{-\lambda/n})(e^{-\frac{\lambda}{n}})^k.}}$$

__Remarque__.– $nY_n + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda/n})$.

Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{Y_n}(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = \displaystyle\sum_{\text{“}\frac{k}{n} \leq x\text{”}} P(Y_n = \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{\text{Ent}(nx)} \left(F_X(\frac{k+1}{n}) - F_X(\frac{k}{n})\right)$.

$F_{Y_n}(x) = F_X\left(\dfrac{\text{Ent}(nx)+1}{n}\right) - F_X(0) = F_X\left(\dfrac{\text{Ent}(nx)+1}{n}\right)$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ F_X\left(\dfrac{\text{Ent}(nx)+1}{n}\right) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.}}$$

- $\forall x \in]-\infty, 0[,\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = 0 = F_X(0)$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(\frac{1}{n}) = F_X(0)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et F_X est continue en 0.
- Soit $x \in]0, +\infty[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Ent}(nx)}{n} = x$ car $\dfrac{\text{Ent}(nx)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{nx}{n} = x$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Ent}(nx)+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\text{Ent}(nx)}{n} + \dfrac{1}{n}\right) = x$. Comme F_X est continue en x :

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X\left(\dfrac{\text{Ent}(nx)+1}{n}\right) = F_X(x)$. $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x).\ (Y_n)_{n\geq 1} \text{ converge en loi vers } X.}}$

Exercice 6 Q1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n : t \to \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{n}{1+n^2t^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_n.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

→ f_n est continue et paire sur $\mathbb{R}$.

→ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{n}{1+n^2t^2}\,dt$. La fonction $t \mapsto nt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = nt$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x f_n(t)\,dt \underset{u=nt}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{nx}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan u\Big]_0^{nx} = \frac{1}{\pi}\arctan nx \qquad (*)$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\arctan nx\right) = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut $1/2$.

f_n étant paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_n(t)\,dt$ converge et vaut $1/2$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que <u>f_n est une densité de probabilité.</u>

Q2 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 1 - P(|X_n| < \varepsilon) = 1 - \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(t)\,dt$.

$$P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) \underset{f_n \text{ est paire}}{=} 1 - 2\int_0^{\varepsilon} f_n(t)\,dt \underset{(*)}{=} 1 - 2\times\frac{1}{\pi}\arctan(n\varepsilon).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - 2\times\frac{1}{\pi}\arctan(n\varepsilon)\right) \underset{\varepsilon>0}{=} 1 - 2\times\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0.$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$.

<u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.</u>

Exercice Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Q2. c est un réel strictement positif. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{c}{\pi\,(c^2+t^2)}$. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q3. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendates sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \omega \in \Omega$, $M_n(\omega) = \mathrm{Max}(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ et $Z_n = \dfrac{\pi}{n\,c}\, M_n$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q1 <u>V1</u> Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$

φ' est nulle sur <u>l'intervalle</u> $\mathbb{R}_+^*$ donc φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = d$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $d = \frac{\pi}{2}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$. cqfd

<u>V2</u> Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\alpha = \arctan x$ et $\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$.

$x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan \frac{1}{x} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan \alpha = \tan(\arctan x) = x$

$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\arctan \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{1/x} = x$.

Alors $\tan \alpha = \tan \beta$ et $(\alpha, \beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$. Ainsi $\alpha = \beta$ car $\tan$ est injective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.}$$

<u>Remarque</u>.. arctan étant impaire sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_{2n}(x) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{\pi} + \frac{1}{2}\right)^n.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1er Cas $x \in]-\infty, 0]$. $\frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{\pi} \in]-\frac{1}{2}, 0]$

Alors $0 \leq \frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{\pi} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

donc $0 \leq F_{2n}(x) \leq \frac{1}{2^n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ par encadrement

il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{2n}(x) = 0$.

2e Cas $x \in]0, +\infty[$. $F_{2n}(x) = e^{u_n}$ avec $u_n = n\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{\pi} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Q1

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left[\frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{\pi} + \frac{1}{2} - 1\right] = \frac{n}{\pi}\left[\arctan\frac{nx}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right] \overset{\downarrow}{=} -\frac{n}{\pi}\arctan\frac{\pi}{nx}$.

Rappelons que $\arctan z \underset{0}{\sim} z$.

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{\pi}\times\frac{\pi}{nx} = -\frac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{x}$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{2n}(x) = e^{-1/x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_{2n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ e^{-1/x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ e^{-1/x} \text{ si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_{2n}(x) = F(x)$.

Montrons alors que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

* Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.
  - → Si $x < y \leq 0$: $F(x) = 0 \leq 0 = F(y)$.
  - → Si $x \leq 0 < y$: $F(x) = 0 \leq e^{-1/y} = F(y)$.
  - → Si $0 < x < y$: $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ donc $F(x) = e^{-1/x} \leq e^{-1/y} = F(y)$.

(Q2) * f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

* Rappelons que $x \mapsto \frac{1}{c} \arctan \frac{x}{c}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+c^2}$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{c}{\pi} \frac{dt}{c^2+t^2} = \frac{c}{\pi}\left[\frac{1}{c}\arctan \frac{t}{c}\right]_0^x = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{c}$ (*)

$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\arctan \frac{x}{c}\right) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$. Comme f est paire sur $\mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut 1.

Ceci achève de montrer que f est une densité de probabilité.

Remarque. Soit X une variable aléatoire de densité f. Notons F_X sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan \frac{x}{c}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan \frac{x}{c} + \frac{1}{2}$. (▲)

$x f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{xc}{\pi x^2} = \frac{c}{\pi} \times \frac{1}{x}$, $\forall x \in [1, +\infty[$, $x f(x) \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{c}{\pi}\frac{1}{t} dt$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} x f(x)dx$ diverge. Ceci suffit pour dire que X n'a pas d'espérance.

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_{Z_n}(x) = P\left(\frac{\pi}{nc} M_n \leq x\right) = P\left(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \frac{ncx}{\pi}\right)$

$F_{Z_n}(x) = P\left(\{X_1 \leq \frac{ncx}{\pi}\} \cap \dots \cap \{X_n \leq \frac{ncx}{\pi}\}\right)$. Par indépendance on obtient

$F_{Z_n}(x) = P(X_1 \leq \frac{ncx}{\pi}) \cdots P(X_n \leq \frac{ncx}{\pi}) \underset{▲}{=} \left(\frac{1}{\pi}\arctan \frac{nx}{\pi} + \frac{1}{2}\right)^n$.

donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

* $x \mapsto 0$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-1/x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Alors F est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$.

F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et elle est continue à gauche en 0.

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = F(0)$. F est continue à droite en 0.

Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points

ceci achève de montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire

Alors $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui admet F comme fonction de répartition.

Exercice 2 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire une à une des boules de l'urne avec remise et on s'arrête lorsque l'on obtient un numéro supérieur ou égal au précédent. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Q1. Trouver, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P(X_n > k)$. En déduire la loi de X_n (attention $X_n(\Omega)$ est fini ! !).

Q2. Montrer que la suite de terme général X_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Q1.- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\{X_n > k\}$ se réalise si et seulement si les numéros obtenus au cours des k premiers tirages donnent une suite strictement décroissante. Rappelons qu'il y $\binom{n}{k}$ suites strictement décroissantes constituées d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

Alors $P(X_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Si $k = 0$: $P(X_n > k) = P(X_n > 0) = 1 = \dfrac{\binom{n}{0}}{n^0}$.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Notons que si X_n prend la valeur k alors $k \geqslant 2$ et les $k-1$ premiers tirages donnent une suite strictement décroissante et ainsi $k-1 \leqslant n$.

Donc X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.

Par conséquent $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $P(X_n > k) = 0$.

$X_n(\Omega) \subset [\![2, n+1]\!]$.

$\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - P(X_n > k)$

Observons que $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $P(X_n > k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } k < n+1 \\ 0 & \text{si } k = n+1 \end{cases}$.

Donc $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $P(X_n = k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } k < n+1 \\ \dfrac{\binom{n}{n+1-1}}{n^{n+1-1}} & \text{si } k = n+1 \end{cases}$.

ce qui précède donne finalement :

$X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$ et $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $P(X_n = k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } k < n+1 \\ \dfrac{1}{n^n} & \text{si } k = n+1 \end{cases}$.

Exercice 1. Montrer que $E(X) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

2. Montrer que $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Q2 Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$.

$\forall n \in [\![k, +\infty[\![$, $P(X_n = k) = \dfrac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

$\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\frac{n^k}{k!}}{n^k} = \dfrac{1}{k!}$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} = \dfrac{1}{k!}$. De même $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} = \dfrac{1}{(k-1)!}$.

Ainsi $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$.

Posons $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $f(k) = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$ et montrons que f est la loi d'une variable aléatoire discrète.

- $[\![2, +\infty[\![$ est dénombrable
- $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $f(k) \geqslant 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{n!}\right) = 1$. Alors la série de terme général $f(k)$ converge et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} f(k) = 1$.

ceci achève de montrer que f est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Ainsi (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire discrète de loi f.

Remarque... $X_n - 1$ est la longueur de la première suite strictement décroissante lorsque les tirages se font avec remise ... à comparer avec l'exercice suivant

Exercice 9 D'après ESSEC 81 N est un élément de $[\![3,+\infty[\![$. On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

On tire au hasard, successivement et $\boxed{\text{SANS REMISE}}$ tous les jetons de l'urne et l'on note $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ la suite des numéros obtenus.

X_N est la variable aléatoire égale au plus petit entier non nul r, s'il existe, tel que $u_r > u_{r+1}$ et à N si un tel r n'existe pas.

Q1 Montrer que si n est un élément de $[\![0, N-1]\!]$: $P(X_N > n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Calculer $P(X_N > n)$ pour tout élément n de $[\![N, +\infty[\![$.

Q2 Déduire, avec soin, de ce qui précède la loi de X_N (il est conseillé de faire une "vérification").

Montrer que : $E(X_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$.

Q3 Montrer que la suite de terme général X_N converge en loi vers une variable aléatoire **discrète** dont on précisera la loi.

Montrer que X possède une espérance, et la comparer à $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$.

Q1 Notons que X_N est la longueur de la première suite croissante et même strictement croissante car les tirages se font sans remise.

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. $\{X_N > n\}$ se réalise si et seulement si les $n+1$ premiers tirages donnent une suite strictement croissante.

Rappelons qu'il y a $\binom{N}{n+1}$ suites strictement croissantes de $n+1$ éléments de $[\![1,N]\!]$.

Ainsi $P(X_N > n) = \dfrac{\binom{N}{n+1}}{N(N-1)\cdots(N-(n+1)+1)} = \dfrac{\frac{N(N-1)\cdots(N-(n+1)+1)}{(n+1)!}}{N(N-1)\cdots(N-(n+1)+1)} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

$\forall n \in [\![0, N-1]\!],\ P(X_N > n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Clairement $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ P(X_N > n) = 0$.

Q2 $\forall n \in [\![1, N]\!],\ P(X_N = n) = P(X_N > n-1) - P(X_N > n) = \dfrac{1}{n!} - P(X_N > n)$

Notons que $\forall n \in [\![1, N]\!],\ P(X_N > n) = \begin{cases} & \text{si } n \leqslant N-1 \\ 0 & \text{si } n = N \end{cases}$

Alors $X_N(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et $\forall n \in [\![1, N]\!],\ P(X_N = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} & \text{si } n \leqslant N-1 \\ \dfrac{1}{N!} & \text{si } n = N \end{cases}$

X_N prend un nombre fini de valeurs donc X_N possède une espérance.

$$E(X_N) = \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) + \frac{N}{N!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$E(X_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} - \sum_{n=2\,(\text{ou } 1)}^{N} \frac{(n-1)}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}.$$

$$\underline{E(X_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}.} \qquad \lim_{N\to+\infty} E(X_N) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1\right) = e-1.$$

$$\underline{\lim_{N\to+\infty} E(X_N) = e-1.}$$

Q3 Soit $n \in [\![1,+\infty[\![$

$\forall N \in [\![n+1,+\infty[\![,\ P(X_N = n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$

donc $\underline{\lim_{N\to+\infty} P(X_N = n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}}$!!

Posons $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ f(n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Montrons que f est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

* $[\![1,+\infty[\![$ est dénombrable
* $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ f(n) \geq 0$
* $\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} f(n) = \lim_{r\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{(r+1)!}\right) = 1$. La série de terme général $f(n)$ converge

  et $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = 1$.

Ceci achève de montrer que f est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. Ainsi <u>(X_N) converge en loi vers une variable aléatoire qui ~~suit~~ a pour loi f.</u>

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{r} k f(k) = \sum_{k=1}^{r} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{r} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{r} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2\,(\text{ou } 1)}^{r+1} \frac{(k-1)}{k!} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} - \frac{r}{(r+1)!}.$

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{k=1}^{r} k f(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e-1.$$

La série de terme général $k\,f(k)$ est donc convergente et même absolument convergente car à termes positifs.

<u>Une variable aléatoire discrète de loi f possède une espérance qui vaut $e-1$.</u>

Notons que $e-1 = \lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$.

<u>Remarque</u>.- Dans l'exercice précédent $X_n - 1$ donnait le ~~rang~~ laquelle de la première suite décroissante. Le résultat aurait été le même pour une suite croissante. Dans cet exercice les tirages se faisaient avec remise. Ici les tirages se font ~~à la avec~~ SANS remise. Il est intéressant de noter que la loi limite est la même dans les deux cas.