Exercice 1 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. X et X' sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

On suppose que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X et X' et on se propose de montrer que $P(X\neq X')=0$.

Q1. Soit ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.

Comparer les événements $\{|X-X'|\geqslant\varepsilon\}$ et $\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon/2\}\cup\{|X_n-X'|\geqslant\varepsilon/2\}$ pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$.

En déduire que $P(\{|X-X'|\geqslant\varepsilon\})=0$

Q2. Comparer les événements $\{X\neq X'\}$ et $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}^{+\infty}\left\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$. Conclure.

Q1 Soit $\omega\in\{|X-X'|\geqslant\varepsilon\}$. $|X(\omega)-X'(\omega)|\geqslant\varepsilon$.

Soit $n\in[\![n_0,+\infty[\![$.

Si $|X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon/2$ et $|X_n(\omega)-X'(\omega)|<\varepsilon/2$ alors :

$|X(\omega)-X'(\omega)|\leqslant|X(\omega)-X_n(\omega)|+|X_n(\omega)-X'(\omega)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ce qui est impossible.

Alors ou $|X_n(\omega)-X(\omega)|\geqslant\varepsilon/2$ ou $|X_n(\omega)-X'(\omega)|\geqslant\varepsilon/2$ donc $\omega\in\{|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|X_n-X'|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\}$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \{|X-X'|\geqslant\varepsilon\}\subset\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon/2\}\cup\{|X_n-X'|\geqslant\varepsilon/2\}$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ P(|X-X'|\geqslant\varepsilon)=P(\{|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|X_n-X'|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\})\leqslant P(|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})+P(|X_n-X'|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leqslant P(|X-X'|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(|X_n-X|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})+P(|X_n-X'|\geqslant\frac{\varepsilon}{2})$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $0\leqslant P(|X-X'|\geqslant\varepsilon)\leqslant 0$.

Finalement $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ P(|X-X'|\geqslant\varepsilon)=0$.

Q2 $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\}\subset\{X\neq X'\}$ donc $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\}\subset\{X\neq X'\}$.

Soit $\omega\in\{X\neq X'\}$. $|X(\omega)-X'(\omega)|>0$.

Comme $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$ on peut trouver k_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $|X(\omega)-X'(\omega)|\geqslant\frac{1}{k_0}$.

Alors $\omega\in\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k_0}\}\subset\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\}$

Alors $\{X\neq X'\}\subset\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\}$. Finalement $\{X\neq X'\}=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\}$

La suite $(\{|X-X'|\geqslant\frac{1}{k}\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc $P(X\neq X')=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}P(|X-X'|\geqslant\frac{1}{k})$.

Or d'après Q1, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(|X-X'|\geqslant\frac{1}{k})=0$ donc $P(X\neq X')=0$. X et X' sont presque sûrement égales.

Exercice 2 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en loi vers la variable certaine égale à c.

Montrer que cette suite converge en probabilité vers c.

Posons $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = c$. Montrons que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = P(\{X_n - X \geqslant \varepsilon\} \cup \{X_n - X \leqslant -\varepsilon\})$. Par incompatibilité :

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = P(\{X_n - X \geqslant \varepsilon\}) + P(\{X_n - X \leqslant -\varepsilon\})$

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon + X) + P(X_n \leqslant X - \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon + c) + P(X_n \leqslant c - \varepsilon)$

Pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ notons F_n la fonction de répartition de X_n. Notons F celle de X.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = P(X \leqslant x) = P(c \leqslant x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [c, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que F est continue sur $\mathbb{R} - \{c\}$ et ainsi $\forall x \in \mathbb{R} - \{c\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon + c) + P(X_n \leqslant c - \varepsilon) = 1 - P(X_n < c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon)$.

$\{X_n \leqslant c + \varepsilon/2\} \subset \{X_n < c + \varepsilon\}$ donc $P(X_n \leqslant c + \frac{\varepsilon}{2}) \leqslant P(X_n < c + \varepsilon)$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $0 \leqslant P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - P(X_n \leqslant c + \frac{\varepsilon}{2}) + F_n(c - \varepsilon) = 1 - F_n(c + \frac{\varepsilon}{2}) + F_n(c - \varepsilon)$.

$c - \varepsilon < c$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(c - \varepsilon) = F(c - \varepsilon) = 0$.

$c + \frac{\varepsilon}{2} > c$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(c + \frac{\varepsilon}{2}) = F(c + \frac{\varepsilon}{2}) = 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - F_n(c + \frac{\varepsilon}{2}) + F_n(c - \varepsilon)\right) = 1 - 1 + 0 = 0$.

On obtient alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$, et ceci pour tout élément ε de $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers la variable certaine c.

<u>Exercice</u> .. Montrer que ceci vaut encore si l'on remplace "la variable certaine égale à c" par une variable presque sûrement égale à c ".

<u>Remarque</u> .. Ainsi dans la loi faible des grands nombres on peut remplacer convergence en probabilité par convergence en loi sans diminuer la portée du résultat.

Exercice 3 HEC 96 **Convergence en loi. Du discret à un continu pas très discret...**

Certains disent qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}$ de paramètre p ($p \in]0,1[$) si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ p(X = n) = pq^n \quad \text{où} \quad q = 1 - p$$

Q1. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de parmètre p à valeurs dans $\mathbb{N}$. Etudier la loi de $X + Y$.

Q2. n est élément de $[\![2, +\infty[\![$. X_n et Y_n sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de paramètre $1/n$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Etudier la loi de $Z_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$. Calculer $E(Z_n)$.

b) Calculer pour tout réel t différent de 1 et pout tout élément i de $\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{i} (k+1)t^k$.

Trouver la fonction de répartition F_n de Z_n.

c) $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$ si x est un réel positif ou nul. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

d) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité Z dont on précisera la loi. Calculer $E(Z)$.

Q1) $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. $(\{X=i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne : $P(X+Y=k) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(\{X+Y=k\}\cap\{X=i\})$

$P(X+Y=k) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(\{X=i\}\cap\{Y=k-i\}) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X=i)P(Y=k-i)$ car X et Y sont indépendantes.

$P(X+Y=k) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} pq^i P(Y=k-i) = \sum\limits_{i=0}^{k} pq^i pq^{k-i} = p^2q^k \sum\limits_{i=0}^{k} 1 = (k+1)p^2q^k$

$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X+Y=k) = (k+1)p^2q^k$.

Remarque.. $X+Y+2$ suit la loi de Pascal de paramètres 2 et p.

Q2) a) $Z_n(\Omega) = \{\frac{k}{n} ; k\in\mathbb{N}\}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z_n = \frac{k}{n}) = P(X_n+Y_n = k) = (k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$

$Z_n(\Omega) = \{\frac{k}{n} ; k\in\mathbb{N}\}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z_n = \frac{k}{n}) = (k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$.

$X_n+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{n})$ et $Y_n+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{n})$. Donc $E(X_n+1)$ et $E(Y_n+1)$ existent et valent n. Alors $E(X_n)$ et $E(Y_n)$ existent et valent $n-1$.

Donc $E(Z_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}(n-1) + \frac{1}{n}(n-1)$. $E(Z_n)$ existe et vaut $2\,\frac{n-1}{n}$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{i} t^{k+1} = t\,\dfrac{1-t^{i+1}}{1-t} = \dfrac{t-t^{i+2}}{1-t}$.

En dérivant on obtient $\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{i} (k+1) t^{k} = \dfrac{1}{(1-t)^2}\left[(1-(i+2)t^{i+1})(1-t)+t-t^{i+2}\right]$

$\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{i} (k+1) t^{k} = \dfrac{1}{(1-t)^2}\left[1-t-(i+2)t^{i+1}+(i+2)t^{i+2}+t-t^{i+2}\right]$

$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{i} (k+1) t^{k} = \dfrac{1}{(1-t)^2}\left[1-(i+2)t^{i+1}+(i+1)t^{i+2}\right]$.

$\forall x \in]-\infty, 0[, \ F_n(x) = P(Z_n \leq x) = 0$.

Soit $x \in [0, +\infty[$. $F_n(x) = P(Z_n \leq x) = \sum_{\frac{k}{n} \leq x} P(Z_n = \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}(nx)} (k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$

$F_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\ \dfrac{1}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2}\left[1-(\mathrm{Ent}(nx)+2)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1}+(\mathrm{Ent}(nx)+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+2}\right]$

$\forall x \in]-\infty, 0[, \ F_n(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[, \ F_n(x) = 1-(\mathrm{Ent}(nx)+2)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1}+(\mathrm{Ent}(nx)+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

→ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(1-\frac{x+1}{e^x}\right) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

→ • $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F(x) = 0$ donc F est croissante sur $]-\infty, 0]$.

• $\varphi : x \mapsto 1-(x+1)e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = [-1-(x+1)(-1)]e^{-x} = xe^{-x}$

φ' est positive sur $[0, +\infty[$ donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$.

F est croissante sur $[0, +\infty[$.

F est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc **F est croissante sur $\mathbb{R}$.**

→ $x \mapsto 0$ et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Ce qui suffit pour dire que <u>F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ au moins.</u>

Ceci achève de montrer que <u>F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.</u>

<u>Remarque</u>.. Soit X une variable aléatoire à densité ayant F pour répartition.

$$\forall x \in]-\infty,0[,\ F'(x)=0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x)=x e^{-x}.$$

Ceci suffit pour dire que X suit la loi gamma de paramètre 2. $X \hookrightarrow \Gamma(2)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x e^{-x} & \text{si } [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}^*$ avec F'. f est une densité de X. Mieux f est une densité de X continue sur $\mathbb{R}$.

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$.

<u>d)</u> • $\forall x \in]-\infty,0[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)=0=F(x)$

• $F_n(0)=1-(0+2)(1-\frac{1}{n})^{0+1}+(0+1)(1-\frac{1}{n})^2 = 1-2(1-\frac{1}{n})+(1-\frac{1}{n})^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 1-2+1=0=F_n(0)$.

• Soit $x \in]0,+\infty[$. $(\text{Ent}(nx)+2)\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\text{Ent}(nx)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{nx}{n}=-x$ et

$(\text{Ent}(nx)+1)\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\text{Ent}(nx)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{nx}{n}=-x$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((\text{Ent}(nx)+2)\ln(1-\frac{1}{n})\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left((\text{Ent}(nx)+1)\ln(1-\frac{1}{n})\right)=-x$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{\text{Ent}(nx)+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{(\text{Ent}(nx)+1)\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-x}$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{\text{Ent}(nx)+1}=e^{-x}$.

$$F_n(x) = 1 - (\mathrm{Ent}(nx)+2)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1} + (\mathrm{Ent}(nx)+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+2}$$

$$F_n(x) = 1 - (\mathrm{Ent}(nx)+1)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+2}\right] - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1}$$

$$F_n(x) = 1 - (\mathrm{Ent}(nx)+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1}$$

$$F_n(x) = 1 - \left(\frac{\mathrm{Ent}(nx)}{n}+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)+1}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - (x+0)(e^{-x}) - e^{-x} = 1-(x+1)e^{-x} = F(x).$

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x).$

La suite de terme général Z_n converge en loi vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F donc vers une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre 2 (ou de paramètres 1 et 2 !).

Exercice 4 On tire deux fois de suite avec remise dans une urne contenant n boules ($n \in [\![2, +\infty[\![$) numérotées de 1 à n.

X_n (resp. Y_n) est la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du premier (resp. second) tirage.

Q1 Montrer que (X_n/n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit un loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q2 $S_n = X_n + Y_n$.

a) Montrer que si k est dans $[\![2, n]\!]$, $P(S_n = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

Montrer que si k est dans $[\![n+1, 2n]\!]$ alors $P(S_n = k) = \dfrac{2n+1-k}{n^2}$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{i} P(S_n = k)$ pour i dans $[\![2, n]\!]$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{i} P(S_n = k) = \frac{1}{2n^2}\Big[(4n+1)i - i^2 - 2n^2 - 2n\Big]$ si i appartient à $[\![n+1, 2n]\!]$.

Q3 $T_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$ et F_n est la fonction de répartition de T_n.

a) Préciser $F_n(x)$ pour x élément de $\left]-\infty, \dfrac{2}{n}\right[$ et pour x dans $[2, +\infty[$.

b) Montrer que si x est élément de $\left[\dfrac{2}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right[$:

$$F_n(x) = \frac{E(nx)\,(E(nx) - 1)}{2n^2}$$

(on pourra utiliser Q2).

Montrer que ceci vaut encore pour x élément de $\left[0, \dfrac{2}{n}\right[$

c) Calculer $F_n(x)$ pour x élément de $\left[1 + \dfrac{1}{n}, 2\right[$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x)$ pour tout réel x.

e) Montrer très proprement que la suite de terme général T_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité

Q4 U et V sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que $W = U + V$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité. Commentez.

(Q1) X_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Posons $Z_n = \frac{X_n}{n}$.

$Z_n(\Omega) = \{ \frac{k}{n} ; k \in [\![1,n]\!] \}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p(Z_n = \frac{k}{n}) = p(X_n = k) = \frac{1}{n}$.

Cherchons la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n. Remarquons que $Z_n(\Omega) \subset [\frac{1}{n}, 1]$.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_{Z_n}(x) = p(Z_n \leq x) = 0$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{Z_n}(x) = p(Z_n \leq x) = 1$.

$\forall x \in [\frac{1}{n}, 1[$, $F_{Z_n}(x) = p(Z_n \leq x) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \text{et } \frac{k}{n} \leq x}} p(Z_n = \frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{E(nx)} \frac{1}{n} = \frac{E(nx)}{n}$.

Notons que si $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $E(nx) = 0$ donc $F_{Z_n}(x)$ vaut encore $\frac{E(nx)}{n}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ E(nx)/n & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

$\forall x \in]0,1[$, $E(nx) \underset{n \to +\infty}{\sim} nx$; $\forall x \in]0,1[$, $F_{Z_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} x$;

$\forall x \in]0,1[$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = x$. Ceci vaut également pour $x = 0$.

De plus $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$ et $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = 1$ si $x \in [1, +\infty[$

Finalement $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

Ceci suffit pour dire que la suite $(\frac{X_n}{n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

(Q2) Soit $k \in [\![2, 2n]\!]$. $(\{X_n = i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $p(S_n = k) = \sum_{i=1}^{n} p(\{X_n + Y_n = k\} \cap \{X_n = i\}) = \sum_{i=1}^{n} p(\{X_n = i\} \cap \{Y_n = k - i\})$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p(\{X_n = i\} \cap \{Y_n = k - i\}) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } k - i \in [\![1,n]\!] \text{ ie } i \in [\![k-n, k-1]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $p(S_n=k)=\displaystyle\sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(n,k-1)} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left[\min(n,k-1)-\max(1,k-n)+1\right]$.

1er cas... $k\in[\![2,n]\!]$. $P(S_n=k)=\dfrac{1}{n^2}\,(k-1-1+1)=\dfrac{k-1}{n^2}$.

2e cas... $k\in[\![n+1,2n]\!]$; $P(S_n=k)=\dfrac{1}{n^2}\,(n-(k-n)+1)=\dfrac{1}{n^2}\,(2n+1-k)$.

Ainsi $\forall k\in[\![2,2n]\!]$, $P(S_n=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k\in[\![2,n]\!]\\[2mm] \dfrac{2n+1-k}{n^2} & \text{si } k\in[\![n+1,2n]\!]\end{cases}$

b) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $\displaystyle\sum_{k=2}^{i}P(S_n=k)=\sum_{k=2}^{i}\frac{k-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{i-1}k=\frac{1}{n^2}\,\frac{(i-1)i}{2}$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{i}P(S_n=k)=\frac{(i-1)i}{2n^2}$.

En particulier $\displaystyle\sum_{k=2}^{\boxed{n}}P(S_n=k)=\frac{(n-1)n}{2n^2}$.

Soit $i\in[\![n+1,2n]\!]$.

$$\sum_{k=2}^{i}P(S_n=k)=\sum_{k=2}^{n}P(S_n=k)+\sum_{k=n+1}^{i}P(S_n=k)=\frac{(n-1)n}{2n^2}+\sum_{k=n+1}^{i}\frac{2n+1-k}{n^2}$$

$$\sum_{k=2}^{i}P(S_n=k)=\frac{(n-1)n}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{j=2n+1-i}^{n}j=\frac{(n-1)n}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\times(i-n)\,\frac{n+2n+1-i}{2}$$

somme de $i-n$ termes d'une suite arithmétique de raison 1 le premier terme étant $2n+1-i$ et le dernier n.

$$\sum_{k=2}^{i}P(S_n=k)=\frac{1}{2n^2}\left(n^2-n+(i-n)(3n+1-i)\right)=\frac{1}{2n^2}\left(n^2-n+i(3n+1)-i^2-n(3n+1)+ni\right)$$

$$\sum_{k=2}^{i}P(S_n=k)=\frac{1}{2n^2}\left((4n+1)i-i^2-2n^2-2n\right)\ \ldots\ \text{si } i\in[\![n+1,2n]\!].$$

Q3 a) $T_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \,;\, k \in [\![2, 2n]\!] \right\} \subset \left[\frac{2}{n}, 2\right]$.

Ainsi $\forall x \in \left]-\infty, \frac{2}{n}\right[$, $F_n(x)=0$ et $\forall x \in [2,+\infty[$ $F_n(x)=0$.

b) Soit $x \in \left[\frac{2}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$.

Notons que $nx \in [2, n+1[$ et ainsi $E(nx) \in [\![2, n]\!]$.

$$F_n(x) = P(T_n \leq x) = P(S_n \leq nx) = \sum_{k=2}^{E(nx)} P(S_n = k) \underset{Q2\,b)}{=} \frac{E(nx)\,(E(nx)-1)}{2n^2}.$$

$\forall x \in \left[\frac{2}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, $F_n(x) = \dfrac{E(nx)\,(E(nx)-1)}{2n^2}$.

Soit $x \in \left[0, \frac{2}{n}\right[$. $F_n(x) = 0$.

De plus $nx \in [0, 2[$ donc $E(nx) = 0$ ou 1 ;

Alors $F_n(x) = 0 = \dfrac{E(nx)\,(E(nx)-1)}{2n^2}$.

Finalement $\forall x \in \left[0, \frac{2}{n}\right[$, $F_n(x) = \dfrac{E(nx)\,(E(nx)-1)}{2n^2}$.

c) Soit $x \in \left[1+\frac{1}{n}, 2\right[$; $nx \in [n+1, 2n[$; $E(nx) \geq n+1$.

$$F_n(x) = P(T_n \leq x) = P(S_n \leq nx) = \sum_{k=2}^{E(nx)} P(S_n = k) \underset{Q2\,b)}{=} \frac{1}{2n^2}\left[(4n+1)E(nx) - (E(nx))^2 - 2n^2 - 2n\right].$$

$\forall x \in \left[1+\frac{1}{n}, 2\right[$, $F_n(x) = \dfrac{1}{2n^2}\left[(4n+1)E(nx) - (E(nx))^2 - 2n^2 - 2n\right]$.

d) Soit $x \in]-\infty, 0[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

Soit $x \in [2, +\infty[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$

Soit $x \in [0, 1]$. (!!) Alors $x \in [0, 1 + \frac{1}{n}[$

Ainsi $F_n(x) = \dfrac{E(nx)(E(nx)-1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{E(nx)}{n}\left(\dfrac{E(nx)}{n} - \dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Si $x = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = 0 = x$!

Si $x \in]0, 1]$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(nx)}{n} = x$ car $E(nx) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.

Finalement, et dans les deux cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \dfrac{1}{2}(x)(x-0) = \dfrac{x^2}{2}$.

Soit $x \in]1, 2[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$,

Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $1 + \dfrac{1}{n} \leq x$

Ainsi $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $F_n(x) = \dfrac{1}{2n^2}\left((4n+1)E(nx) - (E(nx))^2 - 2n^2 - n\right)$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $F_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\left(4 + \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{E(nx)}{n} - \left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)^2 - 2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \dfrac{1}{2}(4x - x^2 - 2) = 2x - 1 - \dfrac{x^2}{2}$ $\quad$ ($E(nx) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$).

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2x - 1 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in]1, 2[\\ 1 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$

<u>Remarque</u>.. On pouvait simplifier un peu en remarquant que :

$\forall x\in[0,1],\ F_n(x)=\dfrac{E(nx)(E(nx)-1)}{2n^2}$ et $\forall x\in [1,2[,\ F_n(x)=\dfrac{1}{2n^2}\left((4n+1)E(nx)-(E(nx))^2-2n^2-2n\right)$.

Les bornes des intervalles ne dépendent plus de n ; le passage à la limite n'est plus problématique.

c) Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ x^2/2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 2x-1-x^2/2 & \text{si } x\in\,]1,2[\\ 1 & \text{si } x\in[2,+\infty[\end{cases}$. $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)$

que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Observons que $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $F(x)=0$; $\forall x\in[0,1]$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$;

$\forall x\in[1,2]$, $F(x)=2x-1-\dfrac{x^2}{2}$ et $\forall x\in[2,+\infty[$, $F(x)=1$.

Ceci autorise déjà à dire que F est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$.

→ Alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$. (1)

→ $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $F(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

$\forall x\in[2,+\infty[$, $F(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$. (2)

→ • $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $F(x)=0$ et $\forall x\in[2,+\infty[$, $F(x)=1$; F est croissante sur $]-\infty,0]$ et sur $[2,+\infty[$.

→ • $\forall x\in[0,1]$, $F(x)=x^2/2$; F est croissante sur $[0,1]$.

• $\forall x\in[1,2]$, $F(x)=2x-1-\dfrac{x^2}{2}$.

$u : x\mapsto 2x-1-\dfrac{x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=2-x$

u' est donc positive sur $]-\infty,2]$; u est croissante sur $]-\infty,2]$;

alors F est croissante sur $[1,2]$.

F est croissante sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$; F est croissante sur $\mathbb{R}$ (3)

(1), (2) et (3) suffisent pour dire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $F'(x) = 0$. $\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = x$ et $\forall x \in]1,2[$, $F'(x) = 2 - x$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in]1,2] \end{cases}$

f est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ; f est une densité de X.

Finalement <u>(T_n) converge en loi vers une variable aléatoire à densité qui admet pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in]1,2[\end{cases}$</u>

<u>Remarque</u>.. f est continue sur $\mathbb{R}$.. donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q4 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ 1 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$; g est une densité de U et de V.

Comme U et V sont indépendantes, $U+V$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, g(x-t)\, dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^1 g(x-t)\, dt \underset{u = x-t}{=} \int_{x-1}^{x} g(u)\, du$. Si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $h(x) = \int_{x-1}^{x} 0 \times du = 0$.

Si $x \in [0,1]$, $h(x) = \int_0^x 1\, d = x$. Si $x \in]1,2]$, $h(x) = \int_{x-1}^{1} 1\, du = 1 - (x-1) = 2 - x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in]1,2] \end{cases}$. <u>$h = f$!</u>

<u>Remarque</u>.. ceci éclaire un peu le résultat de Q3 si l'on se souvient que $\frac{X_n}{n}$ et $\frac{Y_n}{n}$ convergent en loi vers des variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 5 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

$\forall i\in\mathbb{N}^*$, $E(B_i)$ existe et vaut $1/2$. $\forall i\in\mathbb{N}^*$, $V(B_i)$ existe et vaut $1/4$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = B_1+\cdots+B_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$.

Le théorème de la limite centrée indique que la suite $(S_n^*)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite et dont nous notons ϕ la fonction de répartition.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} P(S_n^*\leqslant x) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètre n et $1/2$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2} = \sum_{k=0}^{n} P(S_{2n^2}=k+n^2) = P(n^2\leqslant S_{2n^2}\leqslant n^2+n)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2} = P\left(\frac{n^2-\frac{2n^2}{2}}{\sqrt{\frac{2n^2}{4}}} \leqslant \frac{S_{2n^2}-\frac{2n^2}{2}}{\sqrt{\frac{2n^2}{4}}} \leqslant \frac{n^2+n-\frac{2n^2}{2}}{\sqrt{\frac{2n^2}{4}}}\right) = P(0\leqslant S_{2n^2}^*\leqslant\sqrt{2})$$

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = P(0\leqslant S_{2n^2}^*\leqslant\sqrt{2}) = P(S_{2n^2}^*=0) + F_{S_{2n^2}^*}(\sqrt{2}) - F_{S_{2n^2}^*}(0).$$

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = F_{S_{2n^2}^*}(\sqrt{2}) - F_{S_{2n^2}^*}(0)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{S_n^*}(x) = \phi(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{S_{2n^2}^*}(x) = \phi(x)$.

$$\text{Alors } \lim_{n\to+\infty} v_n = \phi(\sqrt{2})-\phi(0) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \underset{u=t/\sqrt{2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\sqrt{2}\,du.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-u^2}\,du.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(S^*_{2n^2} = 0) + v_n .$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S^*_{2n^2} = 0) = P\left(\dfrac{S_{2n^2} - \frac{2n^2}{2}}{\sqrt{\frac{2n^2}{4}}} = 0 \right) = P(S_{2n^2} = n^2) = C_{2n^2}^{n^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2}$

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S^*_{2n^2} = 0) = 0$ ou que $\lim\limits_{n \to +\infty} C_{2n^2}^{n^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2} = 0$.

Il suffit de prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} C_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$.

$$C_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \frac{1}{2^{2n}} .$$

$$C_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{2\pi n} \underbrace{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{=1} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} .$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(C_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0$.

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S^*_{2n^2} = 0) = 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n + P(S^*_{2n^2} = 0)) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2/2} dt \neq 0$.

Ainsi $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2/2} dt$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt$.

Finalement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+k} \sim \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt$

Exercice 6 $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X si la probabilité de $\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$ est 1.

On suppose que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X et on se propose de montrer qu'elle converge en probabilité vers X.

Soit ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On pose pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, $A_n = \{|X - X_n| \geqslant \varepsilon\}$.

On pose encore $S = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$

Q1. Montrer que $\bigcap_{n=n_0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \subset \overline{S}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0$.

Q2. Conclure.

Q1 Soit $\omega \in \bigcap_{n=n_0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$. $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $\omega \in \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

$\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $\exists k \in [\![n,+\infty[\![$, $\omega \in A_k$.

On peut encore écrire $\forall r \in [\![n_0,+\infty[\![$, $\exists n \in [\![r,+\infty[\![$, $\omega \in A_n$.

$\forall r \in [\![n_0,+\infty[\![$, $\exists n \in [\![r,+\infty[\![$, $|X(\omega) - X_n(\omega)| \geqslant \varepsilon$.

Or si $\omega \in S$, $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ et puisque ε est dans $\mathbb{R}_+^*$:

$\exists r \in [\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n \in [\![r,+\infty[\![$, $|X(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon$!!

Finalement $\omega \notin S$. Ceci achève de montrer que $\bigcap_{n=n_0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \subset \overline{S}$.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge presque sûrement vers X donc $P(S) = 1$. Ainsi $P(\overline{S}) = 0$.

Alors, par croissance, $P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\right) = 0$.

Or $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n\geqslant n_0}$ est une suite décroissante d'événements. Ainsi :

$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\right) = 0$. $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0}}$

Q2 $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$ $\quad 0 \leqslant P(A_n) \leqslant P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$. On obtient alors par encadrement :

$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} P(|X - X_n| \geqslant \varepsilon) = 0$. Ceci achève de montrer que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Exercice 7 On se propose de montrer que la convergence en probabilité ne donne pas la convergence presque sûre.

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note α_n la partie entière de $\dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est l'indicatrice de l'événement $A_n = X^{-1}\left(\left]\dfrac{n-2^{\alpha_n}}{2^{\alpha_n}}, \dfrac{n-2^{\alpha_n}+1}{2^{\alpha_n}}\right]\right)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2. Soit ω un élément de Ω et soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux éléments k et k' de $[\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$ tels que $X_k(\omega)=0$ et $X_{k'}(\omega)=1$.

En déduire que pour tout élément ω de Ω, la suite de terme général $X_n(\omega)$ diverge. Conclure.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon) = \begin{cases} P(X_n = 1) & \text{si } \varepsilon \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = P(A_n) = P\left(X \in \left]\dfrac{n-2^{\alpha_n}}{2^{\alpha_n}}, \dfrac{n-2^{\alpha_n}+1}{2^{\alpha_n}}\right]\right) = \dfrac{1}{2^{\alpha_n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{\ln n}{\ln 2}\right] = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 0$.

Ainsi si $\varepsilon \leqslant 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 0$;

et si $\varepsilon > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$!

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$; <u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.</u>

Q2 Soit $\omega \in \Omega$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Observons que $\left(\left]\dfrac{k-2^p}{2^p}, \dfrac{k-2^p+1}{2^p}\right]\right)_{k \in [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]}$ est une partition de $]0,1]$.

Or $X(\omega) \in]0,1]$ donc il existe un unique élément q de $[\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$ tel que $X(\omega) \in \left]\dfrac{q-2^p}{2^p}, \dfrac{q-2^p+1}{2^p}\right]$. Soit q' un élément de $[\![2^p, 2^{p+1}-1]\!] - \{q\}$.

Alors $X(\omega) \notin \left]\dfrac{q'-2^p}{2^p}, \dfrac{q'-2^p+1}{2^p}\right]$.

$2^p \leq q \leq 2^{p+1}-1 < 2^{p+1}$; $p\ln 2 \leq \ln q < (p+1)\ln 2$; $p \leq \frac{\ln q}{\ln 2} < p+1$.

Alors $p = \left[\frac{\ln q}{\ln 2}\right]$ donc $\alpha_q = p$.

Donc $X(\omega) \in \left]\frac{q-2^p}{2^p}, \frac{q-2^p+1}{2^p}\right] = \left]\frac{q-2^{\alpha_q}}{2^{\alpha_q}}, \frac{q-2^{\alpha_q}+1}{2^{\alpha_q}}\right]$

Ainsi $\omega \in X^{-1}\left(\left]\frac{q-2^{\alpha_q}}{2^{\alpha_q}}, \frac{q-2^{\alpha_q}+1}{2^{\alpha_q}}\right]\right) = A_q$.

Par conséquent $X_q(\omega) = 1$.

On montre de même que $\alpha_{q'} = p$, que $\omega \notin A_{q'}$ et donc que $X_{q'}(\omega) = 0$.

Il existe donc deux éléments distincts q et q' de $[\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$ tels que $X_q(\omega) = 1$ et $X_{q'}(\omega) = 0$ et ceci pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

Supposons que $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge. Notons ℓ sa limite.

Alors $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![r, +\infty[\![$, $|X_n(\omega) - \ell| < \frac{1}{2}$.

Ainsi $\forall n \in [\![r, +\infty[\![$, $\forall m \in [\![r, +\infty[\![$, $|X_n(\omega) - X_m(\omega)| \leq |X_n(\omega) - \ell| + |\ell - X_m(\omega)| < 1$

$\forall (n,m) \in [\![r, +\infty[\![\times [\![r, +\infty[\![$, $|X_n(\omega) - X_m(\omega)| < 1$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $2^p \geq r$

$\exists (q,q') \in [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]^2$, $X_q(\omega) = 1$ et $X_{q'}(\omega) = 0$.

$q \geq r$ et $q' \geq r$ donc $1 = |X_q(\omega) - X_{q'}(\omega)| < 1$!!

Finalement $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ diverge et ceci pour tout $\omega \in \Omega$.

Supposons que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la variable certaine égale à 0.

Alors $\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\}$ a une probabilité égale à 1 ce qui est impossible car cet ensemble est vide !!

$(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0 mais ne converge presque sûrement vers cette variable aléatoire.

R

1

Exercice **Convergence en probabilité. Méthode de Monte-carlo.**

X est une variable aléatoire qui possède un moment d'ordre 2.

Q1. Pour quelle valeur de m, $E\big((X-m)^2\big)$ atteint son minimum ?

Q2. On suppose que $P(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $V(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ (on pourra poser $m = \frac{a+b}{2}$).

Q3. f est une application continue de $[0,1]$ sur $[a,b]$.

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $P\left(\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}$.

b) Qu'en déduire sur le plan théorique ?

c) Qu'en déduire sur le plan pratique ?

Q1 X possède un moment d'ordre 2 donc $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$ existent.

$\forall m \in \mathbb{R}$, $(X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$.

Alors pour tout réel m, $E((X-m)^2)$ existe et vaut $E(X^2) - 2mE(X) + m^2$.

Posons $\forall m \in \mathbb{R}$, $\varphi(m) = E((X-m)^2)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall m \in \mathbb{R}$, $\varphi'(m) = -2E(X) + 2m = 2(m - E(X))$.

φ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, E(X)]$ et strictement croissante sur $[E(X), +\infty[$.

Alors φ possède un minimum sur $\mathbb{R}$ et $E(X)$ est le seul point qui le réalise.

Notons que $\varphi(E(X)) = E((X-E(X))^2) = V(X)$.

<u>$E((X-m)^2)$ atteint son minimum en $m = E(X)$ et ce minimum vaut $V(X)$.</u>

Q2 Posons $Y = \left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2$. $V(X) \overset{\boxed{Q1}}{\leqslant} E\left(\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) = E(Y)$.

Soit $\omega \in \Omega$. $X(\omega) \in [a,b] \Leftrightarrow X(\omega) - \frac{a+b}{2} \in \left[a - \frac{a+b}{2}, b - \frac{a+b}{2}\right]$

$X(\omega) \in [a,b] \Leftrightarrow X(\omega) - \frac{a+b}{2} \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \Leftrightarrow \left|X(\omega) - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}$.

$X(\omega) \in [a,b] \Leftrightarrow \left(X(\omega) - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \Leftrightarrow Y(\omega) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

Alors $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [a,b]\} = \left\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right\}$

$\{X \in [a,b]\} = \left\{Y \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right\}$. Ainsi $P\left(Y \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right) = P(X \in [a,b]) = 1$.

1) $P\left(Y-\frac{(b-a)^2}{4}\leq 0\right)=1$

2) $Y-\frac{(b-a)^2}{4}$ possède une espérance

La croissance de l'espérance donne : $E\left(Y-\frac{(b-a)^2}{4}\right)\leq 0$ ou $E(Y)\leq E\left(\frac{(b-a)^2}{4}\right)=\frac{(b-a)^2}{4}$

Donc $V(X)\leq E\left(\left(X-\frac{b+a}{2}\right)^2\right)=E(Y)\leq\frac{(b-a)^2}{4}$. $\underline{\underline{V(X)\leq\frac{(b-a)^2}{4}}}$.

Q3 Montrons que pour tout r dans $\mathbb{N}$, $(f(U_1))^r$ possède une espérance.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_r(t)=(f(t))^r$.

→ U_1 est une variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans $[0,1]$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. g est une densité de U_1.

→ φ_r est continue sur $[0,1]$.

Le théorème de transfert montre que $E(\varphi\circ U_1)$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^1\varphi_r(t)g(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t\in[0,1]$, $|\varphi_r(t)g(t)|=|f|^r(t)$ et $|f|^r$ est continue sur $[0,1]$.

Alors $\int_0^1|\varphi_r(t)g(t)|\,dt$ converge donc $E(\varphi_r\circ U_1)$ existe.

Ainsi $\underline{\underline{(f(U_1))^r \text{ possède une espérance et ceci pour tout } r \text{ dans } \mathbb{N}.}}$

Notons que $\forall r\in\mathbb{N}$, $E((f(U_1))^r)=\int_0^1(f(t))^r\,dt$.

En particulier $\underline{\underline{E(f(U_1))=\int_0^1 f(t)\,dt}}$.

Notons également que $\underline{\underline{f(U_1) \text{ possède une variance.}}}$

U_1 prend ses valeurs dans $[0,1]$ et f est une application de $[0,1]$ dans $[a,b]$.

Alors $P(f(U_1)\in[a,b])=1$ donc $\underline{\underline{V(f(U_1))\leq\frac{(b-a)^2}{4}}}$.

Toutes les variables aléatoires de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi que U_1.

Ainsi pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $E(f(U_k))$ existe et vaut $\int_0^1 f(t)\,dt$ et $V(f(U_k))$ existe et est majorée par $\frac{(b-a)^2}{4}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $F_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)$.

Alors $E(F_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(f(U_k))$ donc $E(F_n)=\int_0^1 f(t)\,dt$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes donc $f(U_1), f(U_2), \dots, f(U_n)$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors F_n possède une variance et $V(F_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(f(U_k))=\frac{1}{n}V(f(U_1))$;

$V(F_n)=\frac{1}{n}V(f(U_1))$. $V(F_n)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4n}$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$P(|E(F_n)-F_n|\geqslant\varepsilon)=P(|F_n-E(F_n)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V(F_n)}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}$. Ce qui s'écrit :

$$P\left(\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}.$$

b) Pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2}=0$.

Alors $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)\right)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Ce n'est pas un scoop mais la loi faible des grands nombres !

c) Soit h une fonction continue sur $[0,1]$. $h([0,1])$ est un segment.

Posons $h([0,1]) = [\alpha, \beta]$. Nous sommes dans les conditions de ce qui précède. $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(U_k)\right)_{n\geq 1}$ converge en proba vers la variable certaine égale à $\int_0^1 h(t)dt$.

Pour n assez grand, en choisissant au hasard n réels $u_1, u_2, \dots, u_n$ dans $\mathbb{R}$ on peut espérer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(u_k)$ soit une valeur approchée de $\int_0^1 h(t)dt$.

C'est la méthode de Monte-Carlo pour calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

Voilà deux petites fonctions pour calculer $\int_0^1 e^{t^2}dt$!

On peut généraliser à $\int_a^b h(t)dt$. Voici la troisième fonction.

```
Function f(x:real):real;

begin
f:=exp(x*x);
end;


Function Monte_Carlo1(n:integer):real;

var i:integer;s:real;

begin
s:=0;
for i:=1 to n do
s:=s+f(random);
Monte_Carlo1:=s/n;
end;


Function Monte_Carlo2(n:integer;a,b:real):real;

var i:integer;s:real;

begin
s:=0;
for i:=1 to n do
s:=s+f((b-a)*random+a);
Monte_Carlo2:=s*(b-a)/n;
end;
```