Exercice **PC** **Approximation de la racine carrée symétrique définie positive d'une matrice réelle symétrique définie positive.**

Q1 D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

$$V_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ 2V_{p+1} = V_p + DV_p^{-1}.$$

Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$, V_p existe et est une matrice diagonale à diagonale strictement positive.

Montrer que la suite (V_p) converge vers une matrice Δ diagonale à diagonale strictement positive telle que $\Delta^2 = D$ (fixer i dans $[\![1,n]\!]$ et considérer la suite $(d_i(p))_{p\geqslant 0}$ où $d_i(p)$ est l'élément d'indice i de la diagonale de V_p).

Q2. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive.

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ 2\,U_{p+1} = U_p + AU_p^{-1}.$$

Montrer que la suite $(U_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers (LA !) matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le carré est A.

• *On retrouve ce thème dans oral ESCP 2011 2.13.*

Q1 Montrons par récurrence que pour tout p dans $\mathbb{N}$, V_p existe et est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

C'est clair pour $p=0$ car $V_0 = I_n$. Supposons la propriété vraie pour un élément p de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

On suppose donc que V_p existe et est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

V_p est inversible car V_p est diagonale sans 0 sur sa diagonale.

Posons provisoirement $V_p = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. $V_p^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right)$. Posons $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

$DV_p^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $DV_p^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{d_1}{\sigma_1}, \frac{d_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{d_n}{\sigma_n}\right)$.

Alors $V_p + DV_p^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V_p + DV_p^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\sigma_1 + \frac{d_1}{\sigma_1}, \sigma_2 + \frac{d_2}{\sigma_2}, \dots, \sigma_n + \frac{d_n}{\sigma_n}\right)$.

donc $\frac{1}{2}(V_p + DV_p^{-1})$ existe, appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$\frac{1}{2}(V_p + DV_p^{-1}) = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{d_1}{\sigma_1}\right), \frac{1}{2}\left(\sigma_2 + \frac{d_2}{\sigma_2}\right), \dots, \frac{1}{2}\left(\sigma_n + \frac{d_n}{\sigma_n}\right)\right)$.

Notons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_i > 0$ (par hypothèse de récurrence) donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{2}\left(\sigma_i + \frac{d_i}{\sigma_i}\right) > 0$ car D est diagonale à diagonale strictement positive.

Ainsi $\frac{1}{2}(V_p + DV_p^{-1})$ existe et c'est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

Alors V_{p+1} existe et c'est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive. Ceci achève la récurrence.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, V_p existe et V_p est une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

Lemme. — $a \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} = \frac{1}{2}\left(u_p + \frac{a}{u_p}\right)$.
La suite $(u_p)_{p\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Preuve du lemme ▲ Montrons par récurrence que pour tout p dans $\mathbb{N}$ u_p existe et u_p est strictement positif.

- C'est clair pour $p=0$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$a>0$ et $u_p>0$ donc $\frac{a}{u_p}$ existe et est strictement positif. $\frac{1}{2}\left(u_p + \frac{a}{u_p}\right)$ également !

Alors u_{p+1} existe et u_{p+1} est strictement positif.

ceci achève la récurrence

$\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_p + \frac{a}{u_p}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_p + \frac{a}{u_p} - 2\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2u_p}\left(u_p^2 + (\sqrt{a})^2 - 2u_p\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2u_p}(u_p - \sqrt{a})^2$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} - \sqrt{a} \geq 0$ car $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_p > 0$. $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} \geq \sqrt{a}$.

donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \geq \sqrt{a}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} - u_p = \frac{1}{2}\left(u_p + \frac{a}{u_p}\right) - u_p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_p} - u_p\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a - u_p^2}{u_p} = \frac{1}{2u_p}(\sqrt{a} + u_p)(\sqrt{a} - u_p)$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2u_p}(\sqrt{a} + u_p) > 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{a} - u_p \leq 0$.

donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{p+1} - u_p = \frac{1}{2u_p}(\sqrt{a} + u_p)(\sqrt{a} - u_p) \leq 0$. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{p+1} \leq u_p$

Alors la suite $(u_p)_{p\geq 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$. Donc cette suite converge et sa limite ℓ est supérieure ou égale à $\sqrt{a}$.

Alors $(u_p)_{p\geq 0}$ converge et sa limite est ℓ.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} = \frac{1}{2}\left(u_p + \frac{a}{u_p}\right)$ et $\ell = \lim_{p\to+\infty} u_p \geq \sqrt{a} > 0$.

donc en faisant tendre p vers $+\infty$ il vient $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$. $\ell = \frac{a}{\ell}$; $\ell^2 = a$ et $\ell > 0$.

Alors $\ell = \sqrt{a}$. Ainsi $(u_p)_{p\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$. ▼

$D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i > 0$.

Posons $\forall p \in \mathbb{N}$, $V_p = \mathrm{Diag}(d_1(p), d_2(p), \dots, d_n(p))$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i(0) = 1 > 0$!

$\forall p \in \mathbb{N}$, $V_{p+1} = \frac{1}{2}(V_p + DV_p^{-1})$ donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i(p+1) = \frac{1}{2}\left(d_i(p) + \frac{d_i}{d_i(p)}\right)$.

Le lemme montre alors que, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, la suite $(d_i(p))_{p \geq 0}$ converge vers $\sqrt{d_i}$.

Alors la suite $(V_p)_{p \geq 0}$ converge vers la matrice diagonale $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$.

Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

De plus $\Delta^2 = \left(\mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})\right)^2 = \mathrm{Diag}((\sqrt{d_1})^2, (\sqrt{d_2})^2, \dots, (\sqrt{d_n})^2) = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Donc $\Delta^2 = D$.

La suite $(V_p)_{p \geq 0}$ converge vers une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à diagonale strictement positive et telle que $\Delta^2 = D$. **$\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$.**

Q2 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

Posons $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. $\underset{\text{D est diagonale...}}{\{d_1, d_2, \dots, d_n\} =} \mathrm{Sp}\, D \underset{\text{D et A sont semblables}}{=} \mathrm{Sp}\, A \underset{\text{A est symétrique définie positive.}}{\subset} \mathbb{R}_+^*$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i > 0$.

Posons alors $V_0 = I_n$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $V_{p+1} = \frac{1}{2}(V_p + DV_p^{-1})$.

Q1 montre que la suite $(V_p)_{p \geq 0}$ est une suite de matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonales strictement positives qui converge vers $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, U_p existe et vaut $P V_p P^{-1}$ ou $PV_p{}^tP$.

- $PV_0P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$ et $U_0 = I_n$. La propriété est vraie pour $p = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

  Alors U_p existe et $U_p = PV_pP^{-1}$.

  V_p est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive donc V_p est inversible.

Alors U_p qui vaut PV_pP^{-1} est inversible comme produit de trois matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\frac{1}{2}(U_p+AU_p^{-1})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Donc U_{p+1} existe et est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

$U_p^{-1}=(PV_pP^{-1})^{-1}=(P^{-1})^{-1}V_p^{-1}P^{-1}=PV_p^{-1}P^{-1}$.

$\frac{1}{2}(U_p+AU_p^{-1})=\frac{1}{2}\left(PV_pP^{-1}+PDP^{-1}PV_p^{-1}P^{-1}\right)=\frac{1}{2}(PV_pP^{-1}+PDV_p^{-1}P^{-1})$.

donc $U_{p+1}=\frac{1}{2}(U_p+AU_p^{-1})=\frac{1}{2}(PV_pP^{-1}+PDV_pP^{-1})=P\left(\frac{1}{2}(V_p+DV_p^{-1})\right)P^{-1}=PV_{p+1}P^{-1}$

Finalement U_{p+1} existe et vaut $PV_{p+1}P^{-1}$. Ceci achève la récurrence.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, U_p existe et $U_p=PV_pP^{-1}$.

Posons $P=(p_{i,j})$ et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $U_p=(u_{i,j}(p))$ et $V_p=(v_{i,j}(p))$. Posons $\Delta=(\delta_{i,j})$

$(V_p)_{p\geq 0}$ converge vers $\Delta=\mathrm{Diag}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\dots,\sqrt{d_n})$ donc $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{p\mapsto\infty} v_{i,j}(p)=\delta_{i,j}$.

Rappelons que $P^{-1}={}^tP=(p_{j,i})$ et que $U_p=PV_p{}^tP$.

Alors $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $u_{i,j}(p)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(p_{i,k}\sum\limits_{\ell=1}^{n}v_{k,\ell}(p)\,p_{j,\ell}\right)$.

↑ simple calcul matriciel.

Alors $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}u_{i,j}(p)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(p_{i,k}\sum\limits_{\ell=1}^{n}\delta_{k,\ell}\,p_{j,\ell}\right)$.

↑ opérations sur les suites convergentes.

Or $\Delta{}^tP=\left(\sum\limits_{\ell=1}^{n}\delta_{i,\ell}\,p_{j,\ell}\right)$ et $P\Delta{}^tP=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\left(p_{i,k}\sum\limits_{\ell=1}^{n}\delta_{k,\ell}\,p_{j,\ell}\right)\right)$

Plus de doute : $(U_p)_{p\geq 0}$ converge vers $P\Delta{}^tP$ ou $P\Delta P^{-1}$. Posons $B=P\Delta{}^tP=P\Delta P^{-1}$.

1° $B\in M_n(\mathbb{R})$. 2° ${}^tB={}^t({}^tP\Delta P)={}^tP\,{}^t\Delta\,{}^t({}^tP)={}^tP\,{}^t\Delta P={}^tP\Delta P=B$. B est symétrique.

3° $\mathrm{Sp}\,B=\mathrm{Sp}\,P\Delta P^{-1}=\mathrm{Sp}\,\Delta=\mathrm{Sp}\,\mathrm{Diag}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\dots,\sqrt{d_n})=\{\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\dots,\sqrt{d_n}\}$.

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sqrt{d_i}>0$ donc les valeurs propres de B sont strictement positives.

4° $B^2=(P\Delta P^{-1})^2=P\Delta^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$; $B^2=A$.

La suite $(U_p)_{p\geq 0}$ converge vers une matrice symétrique définie positive de $M_n(\mathbb{R})$ dont le carré est A.

R

EXERCICE 46

Exercice **PC** **Décomposition polaire d'une matrice inversible.**

On rappelle que si T est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives il existe une unique matrice symétrique R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $R^2 = T$.

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telles que $A = US$.

Analyse - unicité. Supposons que $A = US$ avec U matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives.

Alors ${}^tAA = {}^t(US)US = {}^tS\,{}^tU\,US = {}^tS\,I_n\,S = {}^tSS = S^2$

U est orthogonale ; S est symétrique.

Posons $T = {}^tAA$. $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tT = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = T$. T est donc une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit $\lambda \in Sp\,T$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $TX = \lambda X$.

$\lambda \|X\|^2 = \lambda\,{}^tXX = {}^tX(\lambda X) = {}^tX\,TX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)\,AX = \|AX\|^2$.

Comme $\|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

$\lambda = 0 \Rightarrow \|AX\|^2 = 0 \Rightarrow \|AX\| = 0 \Rightarrow AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \underset{A \text{ inversible}}{\Rightarrow} X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

X n'est pas nul donc λ n'est pas nul. Ainsi $\lambda > 0$.

T est donc une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. Donc il existe une unique matrice symétrique R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $R^2 = T$ (d'après le rappel).

Or S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = T$. Donc $S = R$. D'où l'unicité de S.

0 n'est pas valeur propre de S donc S est inversible. Alors $A = US$ donne $U = AS^{-1}$ d'où l'unicité de U.

Synthèse - Existence. Posons $S = R$ et $U = AS^{-1}$.

1) $A = US$

2) $S = R$ donc S est une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives.

3) ${}^tUU = {}^t(AS^{-1})\,AS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = {}^tS^{-1}\,T\,S^{-1} = S^{-1}\,T\,S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$.

S^{-1} est symétrique car S est symétrique.

Alors U est une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

ceci achève la preuve de l'égalité.

R

EXERCICE 47

Exercice **PC** **Application des résultats précédents again.**

On rappelle que si T est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives il existe une unique matrice symétrique R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $R^2 = T$.

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles.

Montrer que AB est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives donc il existe une unique matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives dont le carré est A. Notons S cette matrice.

$AB = S^2B = S(SBS)S^{-1}$ (S est inversible car 0 n'est pas valeur propre de S puisque les valeurs propres de S sont strictement positives).

Ainsi AB est semblable à SBS.

${}^t(SBS) = {}^tS\,{}^tB\,{}^tS = SBS$ car S et B sont symétriques.

Alors SBS est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc SBS est diagonalisable.

Ainsi AB qui est semblable à SBS est diagonalisable.

$\mathrm{Sp}\,B \subset \mathbb{R}^+$ donc $\forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX'BX' \geqslant 0$. (*)

Alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(SBS)X = {}^tXSBSX = {}^tX\,{}^tS\,BSX = {}^t(SX)\,B\,SX \geqslant 0$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(SBS)X \geqslant 0$. Alors les valeurs propres de SBS sont positives ou nulles (SBS est symétrique). (*)

AB et SBS étant semblables : $\mathrm{Sp}\,AB = \mathrm{Sp}\,SBS$. Donc les valeurs propres de AB sont positives ou nulles.

Donc <u>AB est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles.</u>

(*) Rappel.. Si U est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}\,U \subset \mathbb{R}^+ \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXUX \geqslant 0$$

Exercice **PC** **Application des résultats précédents toujours.**

C'est une seconde version du "$A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ ".

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive telle que $S^2 = A$.

Q2. Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pas nécessairement orthogonale !) et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Indication considérer la matrice symétrique $S^{-1}BS^{-1}$.

Q3. Proposer une autre (? !) preuve en écrivant $A = {}^tMM$ avec M matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• *Thème abordé dans ESCP 2006 2.20*

Q1 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Alors il existe une matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D' = \mathrm{Diag}(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ telles que ${}^tUAU = U^{-1}AU = D'$. De plus les valeurs propres de A sont strictement positives.

$\{d'_1, d'_2, \dots, d'_n\} = \mathrm{Sp}\,D' = \mathrm{Sp}\,A \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ d'_i > 0$.

A et D' sont semblables.

Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d'_1}, \sqrt{d'_2}, \dots, \sqrt{d'_n})$ et $S = U\Delta U^{-1} = U\Delta\,{}^tU$.

• $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• $S^2 = (U\Delta U^{-1})^2 = U\Delta^2U^{-1} \underset{\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d'_1}, \sqrt{d'_2}, \dots, \sqrt{d'_n})}{=} UD'U^{-1} = A$. $S^2 = A$.

• ${}^tS = ({U\Delta}\,{}^tU) = {}^t({}^tU)\,{}^t\Delta\,{}^tU = U\,{}^t\Delta\,{}^tU = U\,\Delta\,{}^tU = S$. S est symétrique.

• $\mathrm{Sp}\,S \underset{S \text{ et } \Delta \text{ sont semblables}}{=} \mathrm{Sp}\,\Delta = \{\sqrt{d'_1}, \sqrt{d'_2}, \dots, \sqrt{d'_n}\}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sqrt{d'_i} > 0$. Donc les valeurs propres de S sont strictement positives.

Plus de doute <u>S est une (LA) matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive telle que $S^2 = A$.</u>

Q2 Les valeurs propres de S sont strictement positives donc 0 n'est pas valeur propre de S. Ainsi S est inversible. Posons $C = S^{-1}BS^{-1}$.

$C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tC = {}^t(S^{-1}BS^{-1}) = {}^tS^{-1}\,{}^tB\,{}^tS^{-1} \underset{B \text{ est symétrique}}{=} {}^tS^{-1}B\,{}^tS^{-1} = S^{-1}BS^{-1} = C$

S^{-1} est symétrique car S est symétrique.

Donc C est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tQCQ = Q^{-1}CQ = D$.

Donc $D = Q^{-1}CQ = {}^tQ\,C\,Q = {}^tQ(S^{-1}BS^{-1})Q = {}^tQ\,{}^tS^{-1}BS^{-1}Q = {}^t(S^{-1}Q)B(S^{-1}Q)$.

S est symétrique

Posons $P' = S^{-1}Q$.

P' est inversible comme produit de deux matrices inversibles et $D = {}^tP'BP'$.

Alors $B = ({}^tP')^{-1}DP'^{-1} = {}^t(P'^{-1})DP'^{-1}$. Posons $P = P'^{-1}$.

P est inversible car c'est l'inverse d'une matrice inversible et $B = {}^tPDP$.

Notons que $P = P'^{-1} = (S^{-1}Q)^{-1} = Q^{-1}(S^{-1})^{-1} = Q^{-1}S = {}^tQS$.

Alors ${}^tPP = {}^t({}^tQS){}^tQS = {}^tS\,{}^t({}^tQ){}^tQS = {}^tSQ{}^tQS = SQ{}^tQS = SI_nS = S^2 = A$. ${}^tPP = A$.

S est symétrique — Q est orthogonale

P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ et D est une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Q3) A est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ définie positive donc il est de notoriété publique qu'il existe une matrice inversible M de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.

Remarque : Q1 prouve ce résultat car $A = S^2 = {}^tSS$ et S est inversible puisque S est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ définie positive !!

Retrouvons rapidement le résultat de Q2. Posons $\hat C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$.

$\hat C \in M_n(\mathbb{R})$ et ${}^t\hat C = {}^tM^{-1}\,{}^tB\,M^{-1} = {}^tM^{-1}BM^{-1} = \hat C$. $\hat C$ est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice orthogonale $\hat Q$ de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\hat D$ de $M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t\hat Q\hat C\hat Q = \hat Q^{-1}\hat C\hat Q = \hat D$. $\hat C = \hat Q\hat D\hat Q^{-1} = \hat Q\hat D\,{}^t\hat Q$.

$({}^tM)^{-1}BM^{-1} = {}^tM^{-1}BM^{-1} = \hat C = \hat Q\hat D\hat Q^{-1} = \hat Q\hat D\,{}^t\hat Q$; $B = {}^tM\hat Q\hat D\,{}^t\hat QM = {}^t({}^t\hat QM)\hat D\,{}^t\hat QM$.

Posons $\hat P = {}^t\hat QM = \hat Q^{-1}M$. $\hat P$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles et $B = {}^t\hat P\hat D\hat P$. De plus ${}^t\hat P\hat P = {}^t({}^t\hat QM){}^t\hat QM = {}^tM\hat Q\,{}^t\hat QM = {}^tMI_nM = {}^tMM = A$. ${}^t\hat P\hat P = A$.

$\hat Q$ est orthogonale

Nous retrouvons ainsi le résultat de Q2.

Exercice | S | **ECRICOME 2006 exercice 1.**

▶ *Pour les amateurs d'exercices qui ne font pas mal à la tête.*

Ici $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique $< .,. >$. On note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note $f^\star$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

1.1 Quelques propriétés de $f^\star$.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q1. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ < f(x), y >=< x, f^\star(y) >$.

Q2. Montrer que $f^\star$ est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ < f(x), y >=< x, g(y) >$.

Q3. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).

a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $< x, f^\star(y) >$.

b. En déduire que $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

1.2 Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Q1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Q2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f_u^\star$ appartient à $\mathcal{E}$.

Q3. On nôte $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, $\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $\quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.

a. Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u.

d. Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.

e. Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

f. Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme $N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$ où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Partie I : Quelques propriétés de $\mathbf{f^\star}$.

1. Soit M la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

MX et ${}^tMY$ sont les matrices de $f(x)$ et de $f^\star(y)$ dans la base othonormée $\mathcal{B}$.

Alors $< f(x), y >= {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tMY =< x, f^\star(y) >$.

$$\boxed{\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < f(x), y >=< x, f^\star(y) >.}$$

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < f(x), y >=< x, g(y) >$.

Montrons que $g = f^\star$.

$\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < x, g(y) >=< f(x), y >=< x, f^\star(y) >$.

Alors $\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < x, g(y) >=< x, f^\star(y) >$ ou $\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < x, g(y) - f^\star(y) >= 0$.

Ainsi si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $\forall x \in \mathbb{R}^3, < x, g(y) - f^\star(y) >= 0$.

Donc si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $g(y) - f^\star(y)$ appartient à $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp$.

Or $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par conséquent $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ g(y) - f^\star(y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ g(y) = f^\star(y)$.

Finalement $g = f^\star$.

$$\boxed{f^\star \text{ est le seul endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } \forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ < f(x), y >=< x, g(y) >.}$$

3. a. Soit x un élément de F et soit y un élément de $F^\perp$. $< x, f^\star(y) >=< f(x), y >$.

Or $f(x)$ appartient à F car x appartient à F qui est stable par f et y appartient à $F^\perp$ donc $< f(x), y >= 0$.

Alors $< x, f^\star(y) >=< f(x), y >= 0$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est dans } F \text{ et } y \text{ dans } F^\perp \text{ alors } < x, f^\star(y) >= 0.}$$

b. Soit y un élément de $F^\perp$. Ce qui précède montre que $\forall x \in F,\ < x, f^\star(y) >= 0$ donc que $f^\star(y) \in F^\perp$.

Ainsi $\forall y \in F^\perp, f^\star(y) \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par $f^\star$

$$\boxed{\text{Si } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f \text{ alors } F^\perp \text{ est stable par } f^\star.}$$

▲ *Exercice* *E est un espace vectoriel euclidien. Généraliser tous les résultats précédents.*

f et g sont deux endomorphismes de E et λ un réel. Exprimer $(\lambda f + g)^\star$ et $(f \circ g)^\star$ en fonction de $f^\star$, $g^\star$ et λ. Déterminer $(f^\star)^\star$.

Que dire de $f^\star$ si f est un automorphisme de E ? ▼

Partie II : Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

1. • Par définition $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

• $\mathcal{E}$ n'est pas vide car $\mathbb{R}^3$ n'est pas vide !

• Soient g et h deux éléments de $\mathcal{E}$ et λ un réel.

Il existe deux éléments $u = (a, b, c)$ et $u' = (a', b', c')$ tels que $g = f_u$ et $h = f_{u'}$.

$\lambda g + h = \lambda f_u + f_{u'}$ donc la matrice de $\lambda g + h$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $\lambda M_u + M_{u'}$.

Or $\lambda M_u + M_{u'} = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda a + a' \end{pmatrix} = M_{\lambda u + u'}$.

Ainsi $\lambda g + h$ et $f_{\lambda u + u'}$ ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\lambda g + h = f_{\lambda u + u'}$. Ce qui montre que $\lambda g + h$ appartient à $\mathcal{E}$.

Par conséquent $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (g,h) \in \mathcal{E}^2,\ \lambda\, g + h \in \mathcal{E}$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^3).}$$

2. Soit $u = (a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}$ est $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^\star$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^tM_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

La matrice de $f_u^\star$ dans $\mathcal{B}$ est donc $M_{\hat{u}}$ avec $\hat{u} = (a,c,b)$. Ainsi $f_u^\star = f_{\hat{u}}$.

Ce qui permet d'affirmer que $f_u^\star$ est un élément de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ f_u^\star \text{ appartient à } \mathcal{E}.}$$

▲ *Exercice Montrer que la composée de deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$ et que deux éléments de $\mathcal{E}$ commutent.* ▼

3. a. Soit $u = (a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $f_u(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a+b+c \\ c+a+b \\ b+c+a \end{pmatrix}$.

Cette matrice est encore $(a+b+c) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Ainsi $f_u(e_1) = (a+b+c)\, e_1$.

Comme e_1 n'est pas le vecteur nul, e_1 est un vecteur propre de f_u et ceci pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{e_1 \text{ est un vecteur propre commun aux éléments } f_u \text{ de } \mathcal{E}.}$$

▲ *Exercice Soit $u = (a,b,c)$. M_u est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? (on pourra remarquer que $M_u = a\, I_3 + b\, T + c\, T^2$...)* ▲

b. Soit $u = (a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$f_u(\mathcal{D}) = f_u(\mathrm{Vect}(e_1)) = \mathrm{Vect}\,(f_u(e_1)) = \mathrm{Vect}\,((a+b+c)\, e_1) \subset \mathrm{Vect}(e_1) = \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ est donc stable par f_u.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D} \text{ est stable par } f_u.}$$

c. Soit $u = (a,b,c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Posons $v = (a,c,b)$.

Rappelons que $f_v^\star = f_{\hat{v}}$ avec $\hat{v} = (a,b,c)$ donc $f_v^\star = f_u$ d'après II 2).

f_v est un élément de $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{D}$ est stable par f_v d'après la question précédente.

La question **I 3. b.** montre alors que $\mathcal{D}^\perp$ est stable par $f_v^\star$ donc par f_u.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D}^\perp \text{ est stable par } f_u.}$$

d. Notons que $D = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\right) = \mathrm{Vect}(i+j+k)$.

Notons également que $D^\perp$ est l'orthogonal d'une droite vectorielle donc est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{D}^\perp$ est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$x \in \mathcal{D}^\perp \iff < x, i+j+k >= 0 \iff x_1 \times 1 + x_2 \times 1 + x_3 \times 1 = 0 \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ est une équation de } \mathcal{D}^\perp \text{ dans la base } \mathcal{B}.}$$

e. $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} i - \dfrac{1}{\sqrt{2}} j + 0\, k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 = 0$ donc e_2 est un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

$e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} i + \dfrac{1}{\sqrt{6}} j - \dfrac{2}{\sqrt{6}} k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0$ donc e_3 est un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ étant une base orthonormale : $\|e_2\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 1$;

$\|e_3\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{6}} = 1$;

$< e_2, e_3 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \dfrac{1}{\sqrt{6}} + 0 \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0.$

Finalement (e_2, e_3) est une famille orthonormale, donc une famille libre, de cardinal 2 du plan vectoriel $\mathcal{D}^\perp$. Ceci suffit pour dire que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$.

$e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} i + \dfrac{1}{\sqrt{3}} j + \dfrac{1}{\sqrt{3}} k$ donc $\|e_1\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1.$

Ainsi (e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$.

(e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$, (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux. Ainsi $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathcal{D}^\perp \text{ et } \mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3.}$$

f. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{D} = \text{Vect}(e_1)$ et $\mathcal{D}^\perp = \text{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par f_u.

Par conséquent $f_u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$, $f_u(e_2) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$ et $f_u(e_3) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Alors il existe cinq réels e, f, g, h et ℓ tels que $f_u(e_1) = e\, e_1$, $f_u(e_2) = f\, e_2 + h\, e_3$ et $f_u(e_3) = g\, e_2 + \ell\, e_3$.

Alors la matrice N_u de f_u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est : $\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } u \text{ est un élément de } \mathbb{R}^3\text{, il existe cinq réels } e, f, g, h \text{ et } \ell \text{ tels que la matrice de } f_u \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ soit} \\ N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}.\end{array}}$$

▲ *Exercice* *Si $u = (a, b, c)$, montrer que :* $N_u = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \dfrac{1}{2}(b+c) & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-b) & a - \dfrac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$. ▼

R

EXERCICE 50

Exercice S **Adjoint d'un endomorphisme.**

► *Très classique. À savoir faire.*

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. On note f^* l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.

Q2. Soit h un second endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, h(y) >$. Montrer que $h = f^*$.

Q3. g est un endomorphisme de E. Exprimer $(\lambda f)^*$, $(f+g)^*$ et $(g \circ f)^*$ en fonction de f^* et g^* (utiliser les matrices). Que vaut $(f^*)^* = f^{**}$?

Q4. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Montrer que $\operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f$.

"Retrouver" $\operatorname{rg}{}^tA = \operatorname{rg} A$. Montrer que $\operatorname{Sp} f^* = \operatorname{Sp} f$ et "retrouver" $\operatorname{Sp}{}^tA = \operatorname{Sp} A$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(f \circ f^*) = \operatorname{Im} f$.

Q5. Montrer que si f est un automorphisme de E, f^* est un automorphisme de E et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Q6. Montrer que $f \circ f^*$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Q7. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

Qu'en déduire pour les hyperplan stables par f ?

Q1 x et y deux éléments de E. Soient X et Y leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

$f(x)$ (resp. $f^*(y)$) a pour matrice AX (resp. ${}^tAY$) dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée $<f(x), y> = {}^t(AX)Y$ et $<x, f^*(y)> = {}^tX({}^tAY)$.

Donc $<f(x),y> = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = <x, f^*(y)>$.

$\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x),y> = <x, f^*(y)>$.

Q2 $\forall (x,y) \in E^2,\ <x, h(y)> = <f(x), y> = <x, f^*(y)>$.

$\forall y \in E,\ \forall x \in E,\ <x, h(y) - f^*(y)> = 0$

$\forall y \in E,\ h(y) - f^*(y) \in E^\perp$. Or $E^\perp = \{0_E\}$ donc $\forall y \in E,\ h(y) - f^*(y) = 0$.

$\forall y \in E,\ h(y) = f^*(y)$. $h = f^*$.

<u>Remarque</u> Ainsi il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x),y> = <x, f^*(y)>$.

Ce résultat précieux montre que f^* ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

Q3 • $M_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{B}}(f) = \lambda A$. Alors $M_{\mathcal{B}}((\lambda f)^*) = {}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA = \lambda M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(\lambda f^*)$.

Donc $(\lambda f)^* = \lambda f^*$.

R

- $\Pi_B(f+g) = \Pi_B(f) + \Pi_B(g)$.

Alors $\Pi_B((f+g)^*) = {}^t(\Pi_B(f) + \Pi_B(g)) = {}^t\Pi_B(f) + {}^t\Pi_B(g) = \Pi_B(f^*) + \Pi_B(g^*) = \Pi_B(f^* + g^*)$

Alors $\underline{(f+g)^* = f^* + g^*}$.

- $\Pi_B(g \circ f) = \Pi_B(g)\Pi_B(f)$.

Alors $\Pi_B((g\circ f)^*) = {}^t(\Pi_B(g)\Pi_B(f)) = {}^t\Pi_B(f)\,{}^t\Pi_B(g) = \Pi_B(f^*)\Pi_B(g^*) = \Pi_B(f^* \circ g^*)$.

$\underline{(g\circ f)^* = f^* \circ g^*}$.

- $\Pi_B(f^*) = {}^t(\Pi_B(f))$ donc $\Pi_B((f^*)^*) = {}^t({}^t\Pi_B(f)) = \Pi_B(f)$.

Ainsi $\underline{f^{**} = (f^*)^* = f}$.

Retrouvons les deux derniers points en utilisant la remarque de Q2.

▲ → $f^* \circ g^*$ est un endomorphisme de E comme composé de deux endomorphismes de E

→ $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle (g\circ f)(x), y\rangle = \langle g(f(x)), y\rangle = \langle f(x), g^*(y)\rangle = \langle x, f^*(g^*(y))\rangle = \langle x, (f^*\circ g^*)(y)\rangle$

$\underline{\forall (x,y) \in E^2, \langle (g\circ f)(x), y\rangle = \langle x, (f^*\circ g^*)(y)\rangle}$

Alors, d'après la remarque de Q2 : $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$

▲ → f est un endomorphisme de E

→ $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$

Alors la remarque de Q2 donne $(f^*)^* = f$.

(Q4) a) Soit x un élément de E.

$x \in (\mathrm{Im} f)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im} f, \langle y, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in E, \langle f(t), x\rangle = 0$

$x \in (\mathrm{Im} f)^\perp \Leftrightarrow \forall t \in E, \langle t, f^*(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow f^*(x) \in E^\perp \underset{E^\perp = \{0_E\}}{\Leftrightarrow} f^*(x) = 0_E$

$x \in (\mathrm{Im} f)^\perp \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker} f^*$

$\underline{(\mathrm{Im} f)^\perp = \mathrm{Ker} f^*}$

Alors $(\mathrm{Im} f^*)^\perp = \mathrm{Ker}(f^*)^* = \mathrm{Ker} f$. $\mathrm{Im} f^* = (\mathrm{Im} f^*)^{\perp\perp} = ((\mathrm{Im} f^*)^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker} f)^\perp$.

Donc $\mathrm{Im} f^* = (\mathrm{Ker} f)^\perp$.

$\mathrm{rg}\,{}^tA = \mathrm{rg} f^* = \dim \mathrm{Im} f^* = \dim (\mathrm{Ker} f)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Ker} f = \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A$. $\mathrm{rg}\,{}^tA = \mathrm{rg} A$.

Et $\mathrm{rg} f^* = \mathrm{rg} f$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp} f$. $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Alors $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) > 0$.

Alors $\dim (\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id}_E))^\perp = \dim E - \dim(\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) > 0$.

Donc $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^* > 0$. Alors $\mathrm{Ker}(f^* - \lambda \mathrm{Id}_E) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Ker}(f^* - \lambda \mathrm{Id}_E^*) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^* \neq \{0\}$

$\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E^* \ldots$ car $I_n = {}^tI_n$

$\mathrm{Ker}(f^* - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp} f^*$.

$\forall \lambda \in \mathrm{Sp} f, \lambda \in \mathrm{Sp} f^*$. $\mathrm{Sp} f \subset \mathrm{Sp} f^*$.

Alors $\mathrm{Sp} f^* \subset \mathrm{Sp} f^{**} = \mathrm{Sp} f$; $\mathrm{Sp} f^* \subset \mathrm{Sp} f$.

Finalement $\mathrm{Sp} f^* = \mathrm{Sp} f$. Alors $\mathrm{Sp}\,{}^tA = \mathrm{Sp} f^* = \mathrm{Sp} f = \mathrm{Sp} A$. $\mathrm{Sp}\,{}^tA = \mathrm{Sp} A$.

b) • Soit $x \in \mathrm{Ker} f$. $f(x) = 0_E$. $f^*(f(x)) = 0_E$. $(f^* \circ f)(x) = 0_E$. $x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$.

$\forall x \in \mathrm{Ker} f, x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$. $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$. $(f^* \circ f)(x) = 0_E$.

Alors $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, f^*(f(x)) \rangle = \langle x, 0_E \rangle = 0$.

Donc $\|f(x)\| = 0$. Ainsi $f(x) = 0_E$. $x \in \mathrm{Ker} f$.

$\forall x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f), x \in \mathrm{Ker} f$. $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker} f$.

Finalement $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker} f$.

Alors $(\mathrm{Ker}(f^* \circ f))^\perp = (\mathrm{Ker} f)^\perp$. Donc $\mathrm{Im}(f^* \circ f)^* = \mathrm{Im} f^*$.

$\mathrm{Im}(f^* \circ f^{**}) = \mathrm{Im} f^*$. $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im} f^*$.

Q5 Supposons que f est un automorphisme de E. $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=Id_E$.

Donc $(f\circ f^{-1})^*=(f^{-1}\circ f)^*=Id_E^*=Id_E$.

Alors $(f^{-1})^*\circ f^*=f^*\circ(f^{-1})^*=Id_E$.

Ainsi f^* est bijectif et $(f^*)^{-1}=(f^{-1})^*$.

Si f est un automorphisme de E, f^* est un automorphisme de E et $(f^*)^{-1}=(f^{-1})^*$.

Q6 → $f\circ f^*$ est un endomorphisme de E comme composée de deux endomorphismes de E.

→ $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle (f\circ f^*)(x),y\rangle=\langle f(f^*(x)),y\rangle=\langle f^*(x),f^*(y)\rangle=\langle x,f^{**}(f^*(y))\rangle$

$\forall (x,y)\in E^2$, $\langle (f\circ f^*)(x),y\rangle=\langle x,f(f^*(y))\rangle=\langle x,(f\circ f^*)(y)\rangle$.

$f\circ f^*$ est symétrique.

→ Soit $\lambda\in Sp(f\circ f^*)$. $\exists x\in E-\{0_E\}$, $(f\circ f^*)(x)=\lambda x$

$\lambda\|x\|^2=\lambda\langle x,x\rangle=\langle \lambda x,x\rangle=\langle (f\circ f^*)(x),x\rangle=\langle f(f^*(x)),x\rangle=\langle f^*(x),f^*(x)\rangle=\|f^*(x)\|^2$.

x n'est pas nul donc $\|x\|^2\neq 0$. Alors $\lambda=\dfrac{\|f^*(x)\|^2}{\|x\|^2}\geqslant 0$.

Les valeurs propres de $f\circ f^*$ sont positives ou nulles.

$f\circ f^*$ est un endomorphisme symétrique de E dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Q7 • Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Soit $y\in F^\perp$.

$\forall x\in F$, $\langle x,y\rangle=0$.

Comme F est stable par f : $\forall x\in F$, $\langle f(x),y\rangle=0$. $\forall x\in F$, $\langle x,f^*(y)\rangle=0$.

Donc $f^*(y)\in F^\perp$.

$\forall y\in F^\perp$, $f^*(y)\in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par f^*.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F^\perp$ soit stable par f^*.

Alors $(F^\perp)^\perp$ est stable par $(f^*)^*$. Or $(f^*)^*=f^{**}=f$.

Donc F est stable par f.

R

Donc si F est un sous-espace vectoriel de E, F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

Soit H un hyperplan de E. $H^\perp$ est une droite vectorielle.

Rappelons que les droites vectorielles de E stables par un endomorphisme de E sont les droites vectorielles engendrées par un vecteur propre de cet endomorphisme.

H stable par $f \Leftrightarrow H^\perp$ stable par $f^* \Leftrightarrow H^\perp$ est engendré par un vecteur propre de f^*.

Donc si H est un hyperplan de E, H est stable par f si et seulement si $H^\perp$ est engendré par un vecteur propre de f^*

Exercice **PC** **LYON 2000 PB 1 partie II.**

Ici $n \in [\![3, +\infty[\![$ et $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $< .,. >$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$< g(y), x >=< y, f(x) > \quad \text{puis} \quad < (g \circ f)(x), x >= \|f(x)\|^2.$$

2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.

3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots\ e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q\Delta^2\,{}^tQ$.

6. Montrer que la famille $\big(f(e'_1), f(e'_2), \ldots, f(e'_n)\big)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) Vérifier que les nombres réels $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont tous non nuls.

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\dfrac{1}{\mu_1} f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2} f(e'_2), \ldots, \dfrac{1}{\mu_n} f(e'_n))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R\Delta\,{}^tQ$.

---

1. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$ de matrices X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

$g(y)$ et $f(x)$ ont pour matrices ${}^tAY$ et AX dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $< g(y), x >= {}^t({}^tAY)X = {}^tY\,{}^t({}^tA)X = {}^tYAX =< y, f(x) >$.

$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ < g(y), x >=< y, f(x) >}$.

Reprenons un élément x dans $\mathbb{R}^n$ et appliquons ce qui précède avec $y = f(x)$.

Il vient : $< g(f(x)), x >=< f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2$. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (g \circ f)(x), x >= \|f(x)\|^2}$.

2. $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Appliquons deux fois Q1.

$< (g \circ f)(x), y >=< g(f(x)), y >=< f(x), f(y) >$.

$< x, (g \circ f)(y) >=< g(f(y)), x >=< f(y), f(x) >=< f(x), f(y) >$.

Ainsi : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ < (g \circ f)(x), y >=< x, (g \circ f)(y) >$.

$\boxed{g \circ f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n}$.

<u>Remarque</u> *On peut aussi obtenir ce résultat par des considérations matricielles.* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *est une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *et la matrice de* $g \circ f$ *dans cette base est* ${}^tAA$ *donc est une matrice symétrique car* ${}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA$. *Ceci suffit pour conclure.*

3. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, $\boxed{g \circ f \text{ est diagonalisable}}$.

Soit λ une valeur propre de $g \circ f$. Il existe un élément non nul x de $\mathbb{R}^n$ tel que $(g \circ f)(x) = \lambda x$.

$||f(x)||^2 =< (g \circ f)(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda < x, x >= \lambda \; ||x||^2$. Alors $\lambda = \dfrac{||f(x)||^2}{||x||^2}$ puisque x n'est pas nul.

λ est positif ou nul comme quotient d'un réel positif ou nul par un réel strictement positif.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } g \circ f \text{ sont positives ou nulles}}$.

4. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, le cours permet de dire que : $\boxed{\text{il existe une base orthonormale } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ constituée de vecteurs propres de } g \circ f}$.

5. Soit λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres de $g \circ f$ associées aux vecteurs propres e'_1, e'_2, ..., e'_n.

Q est la matrice de passage de la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ donc $Q^{-1} = {}^tQ$. Notons encore que ${}^tAA$ est la matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}$.

Alors la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est : $Q^{-1t}AAQ = {}^tQ^tAAQ$.

Mais, pour tout élément i de $\in [\![1, n]\!]$, $(g \circ f)(e'_i) = \lambda_i \; e'_i$.

Alors ${}^tQ^tAAQ$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Il est grand temps de traiter le problème... dans toute sa plénitude.

Soient μ_1, μ_2, ..., μ_n n réels positifs ou nuls et Δ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$.

${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff {}^tQ^tAAQ = {}^tQQ(\Delta^2){}^tQQ \iff {}^tQ^tAAQ = \Delta^2$.

$${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} {\mu_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\mu_2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\mu_n}^2 \end{pmatrix}$$

${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \; \mu_i^2 = \lambda_i$.

λ_1, ..., λ_n, μ_1, ..., μ_n étant des réels positifs ou nuls on a : ${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \; \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Il existe un **<u>unique</u>** n-uplet $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ de réels positifs ou nuls tel que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ$. $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \; \mu_i = \sqrt{\lambda_i}}$.

6. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. $< (g\circ f)(e'_i), e'_j >=< f(e'_i), f(e'_j) >$.

Donc $< f(e'_i), f(e'_j) >=< (g\circ f)(e'_i), e'_j >=< \lambda_i\ e'_i, e'_j >= \lambda_i\ < e'_i, e'_j >$.

Rappelons que $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Donc si i n'est pas égal à j : $< f(e'_i), f(e'_j) >= \lambda_i\ < e'_i, e'_j >= 0$.

De plus : $||f(e'_j)||^2 =< f(e'_j), f(e'_j) >= \lambda_j\ < e'_j, e'_j >= \lambda_j\ ||e'_j||^2 = \lambda_j$. Alors $||f(e'_j)|| = \sqrt{\lambda_j} = \mu_j$.

$\boxed{\Big(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\Big) \text{ est une famille orthogonale et pour tout élément } j \text{ de } [\![1,n]\!],\ ||f(e'_j)|| = \mu_j}$.

7. a. A est inversible donc ${}^tA$ également. ${}^tAA$ est alors inversible comme produit de deux matrices inversibles. Par conséquent les valeurs propres de ${}^tAA$ donc de $g\circ f$ sont non nulles. Ainsi λ_1, ..., λ_n sont des réels non nuls.

Comme $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $\boxed{\text{les nombres réels } \mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_n \text{ sont tous non nuls}}$.

7. b. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. $< \dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i), \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j) >= \dfrac{1}{\mu_i\mu_j} < f(e'_i), f(e'_j) >$.

Si i et j sont distincts, $< \dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i), \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j) >= 0$ car la famille $\Big(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\Big)$ est orthogonale.

$< \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j), \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j) >= \dfrac{1}{\mu_j^2} < f(e'_j), f(e'_j) >= \dfrac{1}{\mu_j^2}\ ||f(e'_j)||^2 = 1$ car $||f(e'_j)|| = \mu_j$.

Finalement la famille $\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big)$ est orthonormale. Elle est donc libre.

$\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big)$ est une famille libre de n éléments de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n.
C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{C} = \Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n}$.

7. c. C'est très simple pourvu que l'on sache son cours. Un petit rappel s'impose.

•
E est un espace vectoriel de dimension non nulle p. $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_1$ sont deux bases de E et $\text{Pas}(\mathcal{U},\mathcal{U}_1)$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}_1$.
E' est un espace vectoriel de dimension non nulle n. $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}'_1$ sont deux bases de E' et $\text{Pas}(\mathcal{U}',\mathcal{U}'_1)$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}'$ à $\mathcal{U}'_1$.
f est une application linéaire de E dans E'. Alors :

$$\boxed{M(f,\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1) = (\text{Pas}(\mathcal{U}',\mathcal{U}'_1))^{-1}\ M(f,\mathcal{U},\mathcal{U}')\ \text{Pas}(\mathcal{U},\mathcal{U}_1)}.$$

Appliquons. $A = M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = (\text{Pas}(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}\ M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\ \text{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Or $(\text{Pas}(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1} = \text{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = R$ et $\text{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = (\text{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1} = Q^{-1} = {}^tQ$. Alors $A = R\ M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\ {}^tQ$.

Cherchons : $M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})$. Observons que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e'_i) = \mu_i\Big(\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i)\Big)$.

Ainsi la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ est : $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$.

Finalement $\boxed{A = R\Delta{}^tQ}$.

Exercice **PC** **Endomorphisme antisymétrique.**

Classique. Sans doute à faire.

$(E, < , >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n.

f est un endomorphisme de E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et $A = (a_{ij})$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

On dit que f est un endomorphisme **antisymétrique** si $\forall (x,y) \in E^2$, $< f(x), y >= - < x, f(y) >$.

Q1. a) Montrer que f est atisymétrique si et seulement si A est symétrique autrement dit si et seulement si ${}^tA = -A$.

b) Montrer que f est atisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $< x, f(x) >= 0$ (on pourra s'intéresser à $< f(x+y), x+y >$).

Dans la suite f est un endomorphisme antisymétrique de E.

Q2. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

b) Montrer que $\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$.

c) Montrer que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$ (partir de $AX = \lambda X$ et calculer de deux manières ${}^t\overline{X}AX$).

d) Montrer que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives ou nulles.

e) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^\perp$ est également stable par f.

Q3. Ici f est un endomorphisme antisymétrique non nul de E. g est l'application de $\operatorname{Im} f$ dans lui-même qui à x associe $f(x)$. On pose : $h = g^2$. g est clairement un endomorphisme antisymétrique de $\operatorname{Im} f$. Alors h est un endomorphisme symétrique de $\operatorname{Im} f$ dont les valeurs propres sont négatives ou nulles (et même mieux...) d'aprè Q2 d).

a) Soit v un vecteur propre de h.

Montrer que $(v, f(v))$ soit une famille orthogonale libre de $\operatorname{Im} f$.

b) On suppose qu'il existe une famille $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ de vecteurs propres de h telle que $\big(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_r, f(v_r)\big)$ soit une famille libre orthogonale et non génératrice de $\operatorname{Im} f$. Montrer que l'on peut trouver un vecteur propre v_{r+1} de h tel que $\big(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1})\big)$ soit une famille libre et orthogonale de $\operatorname{Im} f$.

En déduire qu'il existe une famille $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de vecteurs propres de h telle que $\big(w_1, f(w_1), w_2, f(w_2), \dots, w_p, f(w_p)\big)$ soit une base orthogonale de $\operatorname{Im} f$. Ainsi $\operatorname{rg} f$ est pair.

c) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormé de E telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & (O) & \\ & & & 0 & -a_p & & & \\ & & & a_p & 0 & & & \\ & (O) & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

à un abus près.

(Q1) a) • Supposons que f est antisymétrique.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,i} e_\ell, e_j \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,i} \langle e_\ell, e_j \rangle \underset{\uparrow}{=} a_{j,i}$.

$\langle e_\ell, e_i \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

De même $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle f(e_j), e_i \rangle = a_{i,j}$.

Or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle f(e_i), e_j \rangle = -\langle e_i, f(e_j) \rangle = -\langle f(e_j), e_i \rangle$.

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$. Donc ${}^tA = -A$. A est antisymétrique.

• Réciproquement supposons A antisymétrique.

Soient x et y deux éléments de E de matrices X et Y dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

$\langle f(x), y \rangle = \langle AX, Y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = -{}^tXAY = -\langle x, f(y) \rangle$.

$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. f est antisymétrique.

Finalement <u>f est antisymétrique si et seulement si A est antisymétrique.</u>

b) • Supposons que f est antisymétrique.

$\forall x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$. $\forall x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$.

$\forall x \in E$, $2\langle x, f(x) \rangle = 0$. $\forall x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

• Réciproquement supposons que $\forall x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

Soit $(x,y) \in E^2$. $0 = \langle f(x+y), x+y \rangle = \langle f(x) + f(y), x+y \rangle$.

$0 = \underbrace{\langle f(x), x \rangle}_{=0} + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle + \underbrace{\langle f(y), y \rangle}_{=0} = \langle f(x), y \rangle + \langle x, f(y) \rangle$. Donc $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$

$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. f est antisymétrique.

Finalement <u>f est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle = 0$.</u>

(Q2) Soit $x \in E$.

$x \in (\operatorname{Im} f)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \operatorname{Im} f$, $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in E$, $\langle x, f(t) \rangle = 0$

$x \in (\operatorname{Im} f)^\perp \Leftrightarrow \forall t \in E$, $-\langle f(x), t \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in E$, $\langle f(x), t \rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) \in E^\perp = \{0_E\}$.

$x \in (\operatorname{Im} f)^\perp \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f$.

Finalement <u>$(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.</u>

Remarques 1) $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont donc supplémentaires et orthogonaux.

2) $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = (\operatorname{Im} f)^{\perp\perp} \underset{\dim E < +\infty}{=} \operatorname{Im} f$. $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f$.

b) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} f$. $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$.

$0 = \langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\|^2 \neq 0$ donc $\lambda = 0$.

$\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$ et ainsi $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$.

c) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX = \lambda X$.

Alors $\bar{A}\bar{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\bar{X}$; ${}^t\bar{X}\,{}^t\bar{A} = {}^t(\bar{A}\bar{X}) = {}^t(\bar{\lambda}\bar{X}) = \bar{\lambda}\,{}^t\bar{X}$.

Or $\bar{A} = A$ et ${}^tA = -A$. Donc ${}^t\bar{X}(-A) = \bar{\lambda}\,{}^t\bar{X}$; ${}^t\bar{X}A = -\bar{\lambda}\,{}^t\bar{X}$; ${}^t\bar{X}AX = -\bar{\lambda}\,{}^t\bar{X}X$.

${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{X}(\lambda X) = \lambda\,{}^t\bar{X}X$. Ainsi $\lambda\,{}^t\bar{X}X = -\bar{\lambda}\,{}^t\bar{X}X$; $(\lambda + \bar{\lambda})\,{}^t\bar{X}X = 0$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. ${}^t\bar{X}X = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$.

Supposons que ${}^t\bar{X}X = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k|^2 \geq 0$

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k|^2 = 0$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k| = 0$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = 0$. Donc $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$!!

Alors ${}^t\bar{X}X \neq 0$ et $(\lambda + \bar{\lambda})\,{}^t\bar{X}X = 0$. Donc $\lambda + \bar{\lambda} = 0$. $\lambda = -\bar{\lambda}$. λ est un imaginaire pur.

Ainsi $\lambda \in i\mathbb{R}$.

donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.

d) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f^2(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = -(-\langle x, f^2(y)\rangle) = \langle x, f^2(y)\rangle$.

f^2 est un endomorphisme symétrique de E. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} f^2$. $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $f^2(x) = \lambda x$.

$\lambda \|x\|^2 = \lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle f^2(x), x\rangle = -\langle f(x), f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2$.

$\lambda = -\dfrac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$ car $\|x\|^2 \neq 0$. Alors $\lambda \leq 0$.

f^2 est un endomorphisme symétrique de E dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Posons $\forall x \in F'$, $h'(x) = h(x)$. h' est un endomorphisme symétrique de F' et $F' \neq \{0_E\}$.
Soit v_{r+1} un vecteur propre de F'. v_{p+1} est également un vecteur propre de h.
Notons que $f(v_{r+1})$ appartient à F'.
Alors $(v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ est une famille orthogonale libre d'éléments de F'.
Or $(v_1, f(v_1), \dots, v_r, f(v_r))$ est une famille orthogonale d'éléments de
comme F et F' sont orthogonaux : $(v_1, f(v_1), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ est une famille orthogonale d'éléments de F ou de F' donc d'éléments de $\mathrm{Im} f$.
Les vecteurs de cette famille ne sont pas nuls car ils appartiennent à des familles libres. Donc $(v_1, f(v_1), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathrm{Im} f$ donc une famille orthogonale libre de $\mathrm{Im} f$.

Donc <u>il existe un vecteur propre v_{r+1} de h tel que $(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ soit une famille libre et orthogonale de $\mathrm{Im} f$.</u>

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de famille $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de vecteurs propres de h telle que $(w_1, f(w_1), w_2, f(w_2), \dots, w_p, f(w_p))$ soit une base orthogonale de $\mathrm{Im} f$. Nous noterons $(*)$ cette hypothèse.
Montrons alors par récurrence que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$ il existe une famille $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ de vecteurs propres de h telle que $(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_r, f(v_r))$ soit une famille libre orthogonale et non génératrice de $\mathrm{Im} f$.

- h est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{Im} f$ & $\mathrm{Im} f \neq \{0_E\}$. Alors h possède un vecteur propre v. D'après <u>a)</u> $(v, f(v))$ est une famille orthogonale libre de $\mathrm{Im} f$; d'après l'hypothèse $(*)$ elle n'est pas génératrice.
Donc la propriété est vraie pour $r = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément r de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $r+1$.
Donc il existe une famille $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ de vecteurs propres de h telle que $(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_r, f(v_r))$ soit une famille libre orthogonale et non génératrice de $\mathrm{Im} f$.

e) Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Montrons que $F^\perp$ est stable par f. Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $f(x) \in F^\perp$.

$\forall y \in F$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle = 0$
$x \in F^\perp$
$f(y) \in F$ car $y \in F$.

$\forall y \in F, \langle f(x), y\rangle = 0$; $f(x) \in F^\perp$.

$\forall x \in F^\perp$, $f(x) \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par f.

Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^\perp$ est stable par f.

Q3) a) v est un vecteur propre de h donc $v \in \mathrm{Im} f$. De plus $f(v) \in \mathrm{Im} f$ et
$\langle v, f(v)\rangle = 0$.
$(v, f(v))$ est une famille orthogonale de $\mathrm{Im} f$.

$v \neq 0_E$. Supposons $f(v) = 0_E$. Alors $v \in \mathrm{Ker} f$. Donc $v \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$ ($\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont orthogonaux). Alors $v = 0_E$!

Ainsi $f(v) \neq 0_E$. $(v, f(v))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathrm{Im} f$.

Donc $(v, f(v))$ est une famille orthogonale libre de $\mathrm{Im} f$.

b) Supposons que $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ est une famille de vecteurs propres de h telle que $(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_r, f(v_r))$ soit une famille libre, orthogonale et non génératrice de $\mathrm{Im} f$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im} f$ engendré par cette famille et soit F' l'orthogonal de F dans $\mathrm{Im} f$. $F' = F^\perp \cap \mathrm{Im} f$.

- F' n'est pas réduit à $\{0_E\}$ car F est strictement contenu dans $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f = F \oplus F'$.
- $f(F) = f(\mathrm{Vect}(v_1, f(v_1), \dots, v_r, f(v_r))) = \mathrm{Vect}(f(v_1), f^2(v_1), \dots, f(v_r), f^2(v_r))$.

$f(F) = \mathrm{Vect}(f(v_1), h(v_1), \dots, f(v_r), h(v_r))$.

$\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{R}$, $h(v_k) = \alpha_k v_k$. $f(F) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \alpha_1 v_1, \dots, f(v_r), \alpha_r v_r)$.

Donc $f(F) \subset \mathrm{Vect}(v_1, f(v_1), \dots, v_r, f(v_r)) = F$. F est stable par f.

Alors $F^\perp$ est stable par f. $\mathrm{Im} f$ également donc F' est stable par f car $F' = F^\perp \cap \mathrm{Im} f$. Alors F' est stable par g et par $g \circ g$ donc par h.

Alors, d'après ce que nous avons vu plus haut, il existe un vecteur propre v_{r+1} de h tel que $(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ soit une famille libre et orthogonale de $\mathrm{Im} f$.

Ainsi $(v_1, v_2, \dots, v_{r+1})$ est une famille de vecteurs propres de h telle que $(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ soit une famille libre et orthogonale de $\mathrm{Im} f$. D'après $(*)$ elle ne peut être génératrice. Ceci achève la récurrence.

Alors pour tout r dans $\mathbb{N}^*$ il existe une famille libre de $\mathrm{Im} f$ de cardinal $2r$.

Donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\dim \mathrm{Im} f \geq 2r$! Ceci est impossible car $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie.

L'hypothèse $(*)$ est donc fausse.

Donc il existe une famille $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ de vecteurs propres de h telle que $(\omega_1, f(\omega_1), \omega_2, f(\omega_2), \dots, \omega_p, f(\omega_p))$ soit une base orthogonale de $\mathrm{Im} f$.

c) Rappelons que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \cap (\mathrm{Im} f)^{\perp} = \{0_E\}$ donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f(\omega_k) \neq 0_E$.

Alors $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\|\omega_1\|}\omega_1, \frac{1}{\|f(\omega_1)\|} f(\omega_1), \frac{1}{\|\omega_2\|}\omega_2, \frac{1}{\|f(\omega_2)\|} f(\omega_2), \dots, \frac{1}{\|\omega_p\|}\omega_p, \frac{1}{\|f(\omega_p)\|} f(\omega_p)\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im} f$.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. $f\left(\frac{1}{\|\omega_k\|}\omega_k\right) = \frac{1}{\|\omega_k\|} f(\omega_k) = \frac{\|f(\omega_k)\|}{\|\omega_k\|} \frac{1}{\|f(\omega_k)\|} f(\omega_k)$.

Posons $a_k = \frac{\|f(\omega_k)\|}{\|\omega_k\|}$. $f\left(\frac{1}{\|\omega_k\|}\omega_k\right) = a_k \frac{1}{\|f(\omega_k)\|} f(\omega_k)$.

$f\left(\frac{1}{\|f(\omega_k)\|} f(\omega_k)\right) = \frac{1}{\|f(\omega_k)\|} f^2(\omega_k) = \frac{1}{\|f(\omega_k)\|} h(\omega_k)$. ω_k est un vecteur propre de h

donc il existe α_k dans $]-\infty, 0]$ tel que $h(\omega_k) = \alpha_k \omega_k$.

Ainsi $f\left(\frac{1}{\|f(\omega_k)\|} f(\omega_k)\right) = \frac{1}{\|f(\omega_k)\|} h(\omega_k) = \frac{\alpha_k}{\|f(\omega_k)\|}\omega_k = \frac{\alpha_k \|\omega_k\|}{\|f(\omega_k)\|} \frac{1}{\|\omega_k\|}\omega_k$

Posons $b_k = \frac{\alpha_k \|\omega_k\|}{\|f(\omega_k)\|}$. $f\left(\frac{1}{\|f(\omega_k)\|} f(\omega_k)\right) = b_k\, \omega_k$.

$\|f(\omega_k)\|^2 = \langle f(\omega_k), f(\omega_k)\rangle = -\langle \omega_k, f^2(\omega_k)\rangle = -\langle \omega_k, h(\omega_k)\rangle = -\langle \omega_k, \alpha_k \omega_k\rangle = -\alpha_k \|\omega_k\|^2$.

Alors $\frac{\|f(\omega_k)\|}{\|\omega_k\|} = \sqrt{-\alpha_k}$ car $\|f(\omega_k)\| \geq 0$, $\|\omega_k\| \geq 0$ et $-\alpha_k \geq 0$.

Alors $a_k = \sqrt{-\alpha_k}$ et $b_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{-\alpha_k}} = -\sqrt{\alpha_k} = -a_k$.

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f\left(\frac{1}{\|w_k\|} w_k\right) = a_k \frac{1}{\|f(w_k)\|} f(w_k)$ et $f\left(\frac{1}{\|f(w_k)\|} f(w_k)\right) = -a_k \frac{1}{\|w_k\|} w_k$.

Posons, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -a_k \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de la restriction g de f à $\mathrm{Im} f$ (considérée comme un endomorphisme de $\mathrm{Im} f$) dans la base $\mathcal{B}_1$ est $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots \; A_p \end{pmatrix}$.

<u>1^{er} cas</u>.- $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. Alors $\mathrm{Im} f = E$. $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormée de E et la matrice de f dans $\mathcal{B}_1$ est $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots \; A_p \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & (0) & & & \ddots & 0 & -a_p \\ & & & & & a_p & 0 \end{pmatrix}$.

<u>2^{ième} cas</u>.. $\mathrm{Ker} f \neq \{0_E\}$. Soit $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker} f$. Comme $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im} f$ et que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires et orthogonaux $\mathcal{B} =$ " $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ " est une base orthonormée de E.
De plus la matrice de f dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots A_p & \\ (0) & & & 0 \;\ddots\; 0 \end{pmatrix}$ ou

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & (0) & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & 0 & -a_p & & \\ & (0) & & & & a_p & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice **Endomorphisme antisymétrique. LYON 2002 PB 2.**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $< \, , \, >$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \ < u(x), x >= 0$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi : \ E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

Q1 Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

Q2 On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)X.$$

a) Vérifier : $\forall P \in E, \ 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.

b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

Q3 Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormée.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

Q1 Pour tout couple (x, y) de E^2, développer $< u(x + y), x + y >$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ < u(x), y >= - < x, u(y) > .$$

Q2 On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $M = (m_{i,j})_{i\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ m_{i,j} = < e_i, u(e_j) >$.

b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

---

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.

On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question **II.1.**

Q1 Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

Q2 Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

Q3 Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

Q4 a) Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c) Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $< \ , \ >_1$ défini pour tout couple (x,y) d'éléments de $F^\perp$ par

$$< x, y >_1 = < x, y >$$

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$.

Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

Q5 Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV : Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E.

Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Q1 Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.

Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

Q2 Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\big(f_1, u(f_1)\big)$. Déterminer une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.

Q3 En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE I : Etude d'un exemple

1. Soit λ un réel et soient P, Q et R trois éléments de E.

• $\varphi(\lambda P + Q, R) = (\lambda P + Q)(0)\, R(0) + (\lambda P + Q)(1)\, R(1) + (\lambda P + Q)(-1)\, R(-1)$.

$\varphi(\lambda P + Q, R) = \big(\lambda P(0) + Q(0)\big)\, R(0) + \big(\lambda P(1) + Q(1)\big)\, R(1) + \big(\lambda P(-1) + Q(-1)\big)\, R(-1)$.

$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda\big[P(0)\, R(0) + P(1)\, R(1) + P(-1)\, R(-1)\big] + \big[Q(0)\, R(0) + Q(1)\, R(1) + Q(-1)\, R(-1)\big]$.

$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$.

• $\varphi(P, Q) = P(0)\, Q(0) + P(1)\, Q(1) + P(-1)\, Q(-1) = Q(0)\, P(0) + Q(1)\, P(1) + Q(-1)\, P(-1) = \varphi(Q, P)$.

• $\varphi(P, P) = \big(P(0)\big)^2 + \big(P(1)\big)^2 + \big(P(-1)\big)^2 \geqslant 0$.

• Supposons que $\varphi(P, P) = 0$. Alors $\big(P(0)\big)^2 + \big(P(1)\big)^2 + \big(P(-1)\big)^2 = 0$.

Donc $\big(P(0)\big)^2 = \big(P(1)\big)^2 = \big(P(-1)\big)^2 = 0$.

Ce qui donne $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$. P est alors un polynôme de degré au plus 2 qui a trois zéros distincts. P est donc le polynôme nul.

Ainsi $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0_E$.

Les quatre points précédents indiquent alors que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. a. Soit P un élément de $E = \mathbb{R}_2[X]$. La formule de Taylor donne $P(X) = P(0) + P'(0)\, X + \dfrac{P''(0)}{2} X^2$.

Alors $P(1) - P(-1) = P(0) + P'(0) + \dfrac{P''(0)}{2} - \left(P(0) - P'(0) + \dfrac{P''(0)}{2}\right) = 2\, P'(0)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall P \in E,\ 2\, P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.}$$

2. b. Soit P un élément de E. $U(P) = 2\, P'(0)\, X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\, X$.

$U(P)(0) = 0$, $U(P)(1) = 2\, P'(0) - \big(P(1) + P(-1)\big) = -2\, P(-1)$ (d'après a.) et $U(P)(-1) = 2\, P'(0) + \big(P(1) + P(-1)\big) = 2\, P(1)$ (toujours d'après a.). Alors :

$\varphi\big(u(P), P\big) = u(P)(0)\, P(0) + u(P)(1)\, P(1) + u(P)(-1)\, P(-1) = 0 \times P(0) - 2\, P(-1)\, P(1) + 2\, P(1)\, P(-1) = 0$.

$$\boxed{\forall P \in E,\ \varphi\big(u(P), P\big) = 0.\ u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

3. a. $P_1 = \dfrac{1}{2}\, (X^2 + X)$. $P_1' = X + \dfrac{1}{2}$. $P_1'(0) = \dfrac{1}{2}$, $P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = 0$.

Alors $u(P_1) = 2\, P_1'(0)\, X^2 - \big(P_1(1) + P_1(-1)\big)\, X = X^2 - X$. Notons que $\big(X^2 - X\big)' = 2X - 1$

Plus rapidement : $u^2(P_1) = u(X^2 - X) = 2(-1)\, X^2 - (0 + 2)\, X = -2(X^2 + X) = -4\, P_1$.

Alors P_1 est un élément non nul de E tel que $u^2(P_1) = -4\,P_1$.

$$\boxed{P_1 \text{ est un vecteur propre de } u^2 \text{ associé à la valeur propre } -4.}$$

u est antisymétrique donc P_1 et $u(P_1)$ sont orthogonaux. P_1 et $\dfrac{1}{2}u(P_1)$ le sont également. Ainsi (P_1, P_2) est une famille orthogonale de E.

De plus $\|P_1\|^2 = \varphi(P_1, P_1) = \big(P_1(0)\big)^2 + \big(P_1(1)\big)^2 + \big(P_1(-1)\big)^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2$. $\|P_1\| = 1$.

$u(P_1) = X^2 - X$. $P_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$. $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 0$ et $P_2(-1) = 1$.

Alors $\|P_2\|^2 = \big(P_2(0)\big)^2 + \big(P_2(1)\big)^2 + \big(P_2(-1)\big)^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$. $\|P_2\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_2) = 0$, $\|P_1\| = 1$ et $\|P_1\| = 1$. Finalement :

$$\boxed{(P_1, P_2) \text{ est une famille orthonormale de } E.}$$

b. Soit P un élément de E.

$P \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow 2\,P'(0)\,X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\,X = 0_E \Longleftrightarrow 2\,P'(0) = P(1) + P(-1) = 0$.

Rappelons que $2P'(0) = P(1) - P(-1)$

$P \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow P(1) - P(-1) = P(1) + P(-1) = 0 \Longleftrightarrow P(1) = P(-1) = 0 \Longleftrightarrow (X-1)(X-1)$ divise P.

Comme P est un polynôme de degré au plus 2 : $P \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda\,(X^2 - 1)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ est la droite vectorielle de } E \text{ engendrée par } X^2 - 1.}$$

Posons $P_3 = X^2 - 1$. $\|P_3\|^2 = \big(P_3(0)\big)^2 + \big(P_3(1)\big)^2 + \big(P_3(-1)\big)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2$. $\|P_3\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_3) = P_1(0)\,P_3(0) + P_1(1)\,P_3(1) + P_1(-1)\,P_3(-1) = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$

$\varphi(P_2, P_3) = P_2(0)\,P_3(0) + P_2(1)\,P_3(1) + P_2(-1)\,P_3(-1) = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$.

Alors (P_1, P_2, P_3) est une famille orthonormale, donc libre, de trois éléments de E qui est un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de E.

Rappelons que $u(P_1) = 2P_2$, $u(P_2) = \frac{1}{2}u^2(P_1) = \frac{1}{2}(-4\,P_1) = -2P_1$ et $u(P_3) = 0_E$. Finalement :

$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_2) = \big(\frac{1}{2}(X^2 + X), \frac{1}{2}(X^2 - X), X^2 - 1\big)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

1. Soient x et y deux éléments de E.

$< u(x+y), x+y > = < u(x) + u(y), x+y > = < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x+y), x+y > = < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >.}$$

• Supposons que u est antisymétrique. $\forall t \in E,\ < u(t), t > = 0$.

Alors $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x+y), x+y > = 0$.

Donc $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y > = 0$.

Ce qui donne encore : $\forall (x,y) \in E^2,\ 0 + < u(x), y > + < u(y), x > + 0 = 0$.

Finalement $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$.

• Réciproquement supposons que : $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$ et montrons que u est antisymétrique.

Par hypothèse : $\forall x \in E,\ < u(x), x >= - < x, u(x) >= - < u(x), x >$.

Donc $\forall x \in E,\ 2 < u(x), x >= 0$ ou $\forall x \in E,\ < u(x), x >= 0$. u est antisymétrique.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si} : \forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >.}$$

2. a. Soient i et j deux élément de $[\![1,n]\!]$. $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\, e_k$.

Alors $< e_i, u(e_j) >=< e_i, \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\, e_k >= \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} < e_i, e_k >$.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ étant une base orthonormale on obtient $< e_i, u(e_j) >= m_{i,j}$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} =< e_i, u(e_j) >.}$$

b. M est la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

• Supposons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{j,i} =< e_j, u(e_i) >= - < u(e_j), e_i >= - < e_i, u(e_j) >= -m_{i,j}$. Ainsi ${}^tM = -M$.

• Réciproquement supposons que ${}^tM = -M$ et montrons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Soient x et y deux éléments de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ les coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$ dans $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ étant orthonormale $< u(x), y >= \sum_{k=1}^{n} x'_k\, y_k$ et $< x, u(y) >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y'_k$.

$$< u(x), y >= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{k,j}\, x_j \right) y_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\, y_k \right) = - \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} m_{j,k}\, y_k \right) = - \sum_{j=1}^{n} x_j\, y'_j.$$

Ainsi $< u(x), y >= - < x, u(y) >$. Ce qui achève de prouver que u est antisymétrique.

<u>Remarques</u> *1. Au niveau de la réciproque on aurait pu se contenter de prouver que* $\forall x \in E < u(x), x >= 0$.

2. On peut également obtenir cette réciproque en faisant intervenir les matrices X et Y de x et y dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ et écrire :

$$< u(x), y >=< MX, Y >= {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY = -{}^tXMY = - < X, MY >=< x, u(y) >$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice } M \text{ associée à } u \text{ relativement à la} \\ \text{base } \mathcal{B} \text{ vérifie } {}^tM = -M. \end{array}}$$

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

1. Soit λ un réel valeur propre de u. Il existe un élément non nul x de E tel que $u(x) = \lambda\, x$.

$< u(x), x >= 0$ et $< u(x), x >=< \lambda\, x, x >= \lambda < x, x >= \lambda\, ||x||^2$. Donc $\lambda\, ||x||^2 = 0$.

Comme x n'est pas nul sa norme ne l'est pas davantage et λ est nul.

$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est un réel valeur propre de } u,\ \lambda \text{ est nul.}}$

2. Soit x un élément de $\operatorname{Ker} u$ et y un élément de $\operatorname{Im} u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

$< x, y > = < x, u(t) > = - < u(x), t > = - < 0_E, t > = 0$. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.

En particulier $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$. Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$. Il est alors clair que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires.

$\boxed{\operatorname{Im} u \text{ et } \operatorname{Ker} u \text{ sont orthogonaux et supplémentaires.}}$

Sans aucun doute $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} u^2$. $u\big(u(x)\big) = 0_E$ donc $u(x)$ est élément de $\operatorname{Ker} u$... et de $\operatorname{Im} u$.

Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires : $u(x) = 0_E$ et x appartient à $\operatorname{Ker} u$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ et finalement :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2.}$$

3. Soit M la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. D'après **II 2. b.**, ${}^tM = -M$.

M^2 est la matrice de u^2 dans $\mathcal{B}$ et ${}^tM^2 = {}^tM\,{}^tM = (-M)(-M) = M^2$.

La matrice de u^2 dans la base **<u>orthonormale</u>** $\mathcal{B}$ est symétrique donc u^2 est symétrique.

Soit λ une valeur propre de u^2. Il existe un élément non nul x de E tel que $u^2(x) = \lambda\, x$.

$\lambda\, ||x||^2 = < \lambda\, x, x > = < u^2(x), x > = - < u(x), u(x) > = -||u(x)||^2$.

x n'est pas nul donc $\lambda = -\dfrac{||u(x)||^2}{||x||^2}$. Il devient alors clair que λ est un réel négatif ou nul.

$\boxed{u^2 \text{ est un endomorphisme symétrique de } E \text{ et toute valeur propre de } u^2 \text{ est négative ou nulle.}}$

4. a. u^2 est un endomorphisme symétrique de E donc u^2 est diagonalisable. Ainsi il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u^2.

Supposons que 0 soit la seule valeur propre de u^2. Comme u^2 est un endomorphisme symétrique, u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2$ est le seul sous-espace propre de u^2.

Alors $\operatorname{Ker} u^2 = E$. **2.** donne alors $\operatorname{Ker} u = E$. u est alors l'endomorphisme nul ce qui contredit l'hypothèse faite au début de la partie.

$\boxed{u^2 \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$

b. Il existe un réel non nul λ tel que $u^2(x) = \lambda\, x$. Notons que, d'après ce qui précède, λ est strictement négatif.

$u(F) = u\left(\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)\right) = \operatorname{Vect}\big(u(x), u^2(x)\big) = \operatorname{Vect}\big(u(x), \lambda\, x\big) \subset \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) = F$. F est stable par u.

Ne reste plus qu'à montrer que $F = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan vectoriel de E. Pour ce faire il suffit de montrer que la famille $\big(x, u(x)\big)$ est libre car c'est déjà une famille génératrice de F.

Supposons $\big(x, u(x)\big)$ liée. Comme x n'est pas nul il existe un réel γ tel que $u(x) = \gamma\, x$. Alors $u^2(x) = \gamma^2\, x$ or $u(x) = \lambda\, x$. Ainsi $\gamma^2\, x = \lambda\, x$. x n'étant pas nul, $\lambda = \gamma^2$ ce qui contredit le fait que λ est strictement négatif.

Finalement $\big(x, u(x)\big)$ est libre.

$$\boxed{F = \text{Vect}\left(x, u(x)\right) \text{ est un plan vectoriel de } E \text{ stable par } u.}$$

c. Qui peut le plus peut le moins. Prenons donc un sous-espace vectoriel G stable par u et montrons que $G^{\perp}$ est également stable par u.

Soit z un élément de $G^{\perp}$. Montrons que $u(z)$ appartient encore à $G^{\perp}$.

$\forall x \in G,\ u(x) \in G$. Donc $\forall x \in G,\ < u(x), z >= 0$.

u étant antisymétrique on a encore : $\forall x \in G,\ - < x, u(z) >= 0$ ou $\forall x \in G,\ < x, u(z) >= 0$. Ce qui signifie que $u(z)$ est un élément de $G^{\perp}$.

$\forall z \in G^{\perp},\ u(z) \in G^{\perp}$. $G^{\perp}$ est stable par G. Ce résultat appliqué à F permet de dire que :

$$\boxed{F^{\perp} \text{ est stable par } u.}$$

d. u_1 est un endomorphisme de $F^{\perp}$ et $\forall (x, y) \in \left(F^{\perp}\right)^2,\ < u(x), x >_1 =< u(x), x >= 0$.

u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$.

$\text{Im}\, u_1$ est un sous-espace vectoriel de $F^{\perp}$ donc $F \cap \text{Im}\, u_1 = \{0_E\}$. F et $\text{Im}\, u_1$ sont en somme directe.

Montrons alors, par double inclusion, que $\text{Im}\, u = F \oplus \text{Im}\, u_1$.

• λ n'est pas nul et $u^2(x) = \lambda x$ donc $x = u\Big(u\left(\frac{1}{\lambda} x\right)\Big)$ est un élément de l'image de u. Alors x et $u(x)$ sont deux éléments de l'image de u. Ainsi $F = \text{Vect}\left(x, u(x)\right)$ est contenu dans $\text{Im}\, u$.

$\text{Im}\, u_1 = u_1\left(F^{\perp}\right) = u\left(F^{\perp}\right) \subset \text{Im}\, u$.

F et $\text{Im}\, u_1$ étant contenu dans $\text{Im}\, u$, $F \oplus \text{Im}\, u_1$ est contenu dans $\text{Im}\, u$.

• Réciproquement soit y un élément de $\text{Im}\, u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires donc il existe un unique élément (t', t'') de $F \times F^{\perp}$ tel que $t = t' + t''$.

$y = u(t) = u(t') + u(t'') = u(t') + u_1(t'')$. $u(t')$ appartient à F car t' est dans F qui est stable par u, et $u_1(t'')$ est un élement de $\text{Im}\, u_1$. Alors y appartient à $F + \text{Im}\, u_1 = F \oplus \text{Im}\, u_1$.

Ceci achève de montrer que $\text{Im}\, u$ est contenu dans $F \oplus \text{Im}\, u_1$.

$$\boxed{u_1 \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } F^{\perp} \text{ et } \text{Im}\, u = F \oplus \text{Im}\, u_1}$$

5. Montrons le résultat à l'aide d'une récurrence faible sur la dimension de E.

• Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel E de dimension 0.

Nécessairement $\text{Im}\, u = \{0_E\}$ et donc le rang de u qui vaut 0 est pair. La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que tout endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension inférieure ou égale à n soit de rang pair. Montrons qu'il en est encore de même pour les endomorphismes antisymétriques des espaces vectoriels euclidiens de dimension $n + 1$.

Soit u un endomorphisme antisymétrique d'une espace vectoriel euclidien E de dimension $n + 1$.

Si u est nul son rang, qui vaut 0, est pair. Supposons désormais que u n'est pas nul et utilisons à plein **4.**.

u^2 possède une valeur propre non nulle (et même strictement négative). Soit x un vecteur propre associé à cette valeur propre. $F = \left(x, u(x)\right)$ est un plan vectoriel stable par u. $F^{\perp}$ est stable par u.

Soit u_1 l'endomorphisme de $F^\perp$ défini par : $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$. u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

$\dim F^\perp = (n+1) - 2 = n - 1$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de dire que le rang de u_1 est pair.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim \big(F \oplus \operatorname{Im} u_1\big) = \dim F + \dim \operatorname{Im} u_1 = 2 + \operatorname{rg} u_1$ pour dire que le rang de u est pair et ainsi achever la récurrence.

$$\boxed{\text{Le rang d'un endomorphime antisymétrique est pair.}}$$

PARTIE IV : Application

1. ${}^tA = -A$. Comme A est la matrice de u relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$ on peut dire que :

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&1&-1\\-4&0&-1&-1\\-1&1&0&-5\\1&1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&1&-1\\-4&0&-1&-1\\-1&1&0&-5\\1&1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\\9\\0\end{pmatrix}. \text{ Alors } A^2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi $u^2(f_1) = -9\, f_1$. f_1 n'étant pas nul :

$$\boxed{f_1 = e_1 + e_2 - e_3 \text{ est un vecteur propre de } u^2 \text{ associé à la valeur propre } -9}$$

2. Ce que nous avons vu plus haut **(III 4.)** permet déjà de dire que F est un plan vectoriel stable par F et que $\big(f_1, u(f_1)\big)$ en est une base et même une base orthogonale car f_1 et $u(f_1)$ sont orthogonaux.

Posons dès lors $e_1' = \dfrac{1}{\|f_1\|}\, f_1$ et $e_2' = \dfrac{1}{\|u(f_1)\|}\, u(f_1)$. (e_1', e_2') est alors une base orthonormale de F.

$f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $u(f_1) = 3\, e_1 - 3\, e_2 - 3\, e_4$. Par conséquent $\|f_1\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_1)\| = 3\sqrt{3}$.

$$\boxed{(e_1', e_2') = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4)\right) \text{ est une base orthonormale de } F.}$$

Cherchons $F^\perp$. Nous pouvons déjà dire que $F^\perp$ est un plan vectoriel ($\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 4 - 2 = 2$) stable par u.

Soit $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3 + x_4\, e_4$ un élément de E.

Comme (e_1', e_2') est une base de F :

$x \in F^\perp \Longleftrightarrow < x, e_1' > = < x, e_2' > = 0 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 - x_4 = 0 \Longleftrightarrow x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_1 - x_2$.

Pas de doute, $f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ est un élément de $F^\perp$. Alors $u(f_3)$ est également un élément de $F^\perp$.

Notons que $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$ (ce qui confirme son appartenance à $F^\perp$).

$\big(f_3, u(f_3)\big)$ est alors une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de $F^\perp$. $\big(f_3, u(f_3)\big)$ est donc une famille libre et orthogonale de deux éléments du plan vectoriel $F^\perp$. $\big(f_3, u(f_3)\big)$ est une base orthogonale de $F^\perp$.

Posons $e_3' = \dfrac{1}{\|f_3\|}\, f_3$ et $e_4' = \dfrac{1}{\|u(f_3)\|}\, u(f_3)$. (e_3', e_4') est alors une base orthonormale de $F^\perp$.

$f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ et $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$. Par conséquent $\|f_3\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_3)\| = 6\sqrt{3}$.

$$\boxed{(e'_3, e'_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4)\right) \text{ est une base orthonormale de } F^{\perp}.}$$

3. (e'_1, e'_2) est une base orthonormale de F, (e'_3, e'_4) est une base orthonormale de $F^{\perp}$ et, F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\mathcal{B}_0 = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base orthonormale de E.

Cherchons la matrice de u dans cette base.

Rappelons que $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} f_1$ et que $e'_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} u(f_1)$. Alors $u(e'_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} u(f_1) = 3\,e'_2$.

Rappelons également que $u^2(f_1) = -9\,f_1 = -9\sqrt{3}\,e'_1$.

Alors $u(e'_2) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} u^2(f_1) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(-9\sqrt{3}\,e'_1) = -3\,e'_1$.

$e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4)$ et $e'_4 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4)$,

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-6\\6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\-6\\-6\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Donc $u(e'_3) = 6\,e'_4$ et $u(e'_4) = -6\,e'_3$. Finalement :

$\mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4)\right)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 0\\3 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -6\\0 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

R

EXERCICE 54

Exercice | S | **Matrice antisymétrique. Matrice orthogonale. Oral ESCP 1998 2-4.**

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tM=-M$.

Q1. Montrer que : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX=0$.

Q2. Montrer que I_n+M est inversible.

Q3. On pose $A=(I_n-M)(I_n+M)^{-1}$. Montrer que ${}^tAA=I_n$. Ainsi A est une matrice orthogonale.

Q4. Récipoquement, soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que I_n+A soit inversible.

Montrer que la matrice $H=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ vérifie ${}^tH=-H$.

Q1 Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXMX\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc ${}^t({}^tXMX)={}^tXMX$.

Alors ${}^tXMX={}^t({}^tXMX)={}^tX\,{}^tM\,{}^t({}^tX)={}^tX(-M)X=-{}^tXMX$; $2\,{}^tXMX=0$. ${}^tXMX=0$.

$\underline{\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX=0.}$

Q2 V1 Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n+M)X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors ${}^tX(I_n+M)X={}^tX\,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}=0$. $0={}^tX(I_n+M)X={}^tXX+{}^tXMX\overset{Q1}{=}{}^tXX=\|X\|^2$.

donc $\|X\|^2=0$. $\|X\|=0$. $X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n+M)X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\Rightarrow X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $\underline{I_n+M\text{ est inversible.}}$

V2 Soit λ une valeur propre réelle de M. $\exists X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $MX=\lambda X$.

$0={}^tXMX={}^tX(\lambda X)=\lambda\,{}^tXX=\lambda\|X\|^2$ et $\|X\|^2\neq 0$ car $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\lambda=0$.

Ainsi $\underline{Sp_{\mathbb{R}}M\subset\{0\}}$. Alors -1 n'est pas valeur propre de M.

donc $M-(-I_n)$ est inversible. I_n+M est inversible.

Q3 $A=(I_n-M)(I_n+M)^{-1}$.

${}^tA={}^t\left((I_n-M)(I_n+M)^{-1}\right)={}^t(I_n+M)^{-1}\,{}^t(I_n-M)=\left({}^t(I_n+M)\right)^{-1}({}^tI_n-{}^tM)$.

${}^tA=({}^tI_n+{}^tM)^{-1}(I_n+M)=(I_n-M)^{-1}(I_n+M)$.

${}^tAA=(I_n-M)^{-1}(I_n+M)(I_n-M)(I_n+M)^{-1}$.

Or $(I_n+M)(I_n-M)=I_n^2-M^2=(I_n-M)(I_n+M)$.

$I_nM=MI_n$

Alors ${}^tAA=(I_n-M)^{-1}(I_n-M)(I_n+M)(I_n+M)^{-1}=I_nI_n=I_n$. $\underline{{}^tAA=I_n.}$

$\underline{A\text{ est une matrice orthogonale.}}$

R

Q4 A est une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A$ soit inversible.

On pose $H = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ et on se propose de vérifier que ${}^tH = -H$.

Notons que A est inversible et que $A^{-1} = {}^tA$.

$${}^tH = {}^t\left((I_n - A)(I_n + A)^{-1}\right) = {}^t(I_n + A)^{-1}\, {}^t(I_n - A) = ({}^tI_n + {}^tA)^{-1}({}^tI_n - {}^tA) = (I_n + A^{-1})^{-1}(I_n - A^{-1}).$$

$${}^tH = \left(A^{-1}(A + I_n)\right)^{-1} A^{-1}(A - I_n) = (A + I_n)^{-1} \underbrace{(A^{-1})^{-1} A^{-1}}_{I_n} (A - I_n) = (A + I_n)^{-1}(A - I_n).$$

Posons pour faciliter les écritures $M = A + I_n$ et $N = A - I_n$. Montrons que $M^{-1}N = NM^{-1}$.

$$MN = (A + I_n)(A - I_n) = A^2 - I_n^2 = (A - I_n)(A + I_n) = NM.$$

$A I_n = I_n A$

$MN = NM$. $N = M^{-1}NM$. $NM^{-1} = M^{-1}N$. $M^{-1}N = NM^{-1}$ donc $(A + I_n)^{-1}(A - I_n) = (A - I_n)(A + I_n)^{-1}$.

Alors ${}^tH = (A + I_n)^{-1}(A - I_n) = (A - I_n)(A + I_n)^{-1} = -(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = -H$.

donc ${}^tH = -H$.