EXERCICE 1

J.F.C.

Exercice **S** **Endomorphisme symétrique. Contenu dans Lyon 2007.**

$E = \mathbb{R}_n[X]$. $\forall (P,Q) \in E^2$, $(P \,|\, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$. $\forall P \in E$, $\phi(P) = \big((X^2-1)\,P\big)''$.

Q1. Montrer que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

Q2. Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique de $\big(E, (.\,|\,.)\big)$.

Q1. • Soient P et Q deux éléments de E.

$x \to (1-x^2)\, P(x)\, Q(x)$ est continue sur $[-1,1]$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$ existe.

Ainsi $(.\,|\,.)$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soient P, Q, R trois éléments de E et λ est un réel.

$(\lambda P + Q \,|\, R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, (\lambda P + Q)(x)\, R(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, (\lambda P(x) + Q(x))\, R(x)\, \mathrm{d}x.$

$(\lambda P + Q \,|\, R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(\lambda\, (1-x^2)\, P(x)\, R(x) + (1-x^2)\, Q(x)\, R(x)\big)\, \mathrm{d}x.$

$(\lambda P + Q \,|\, R) = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, P(x)\, R(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, Q(x)\, R(x)\, \mathrm{d}x = \lambda\, (P \,|\, R) + (Q \,|\, R).$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,Q,R) \in E^3$, $(\lambda\, P + Q \,|\, R) = \lambda\, (P \,|\, R) + (Q \,|\, R)$. $(.\,|\,.)$ est linéaire à gauche.

• Soient P et Q deux éléments de E.

$(P \,|\, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, Q(x)\, P(x)\, \mathrm{d}x = (Q \,|\, P).$

$\forall (P,Q) \in E^2$, $(P \,|\, Q) = (Q \,|\, P)$. $(.\,|\,.)$ est symétrique.

• Soit P un élément de E.

$\forall x \in [-1,1]$, $(1-x^2)\, P(x)\, P(x) \geqslant 0$ et $-1 \leqslant 1$ donc $(P \,|\, P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, P(x)\, P(x)\, \mathrm{d}x \geqslant 0.$

$\forall P \in E$, $(P \,|\, P) \geqslant 0$. $(.\,|\,.)$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $(P \,|\, P) = 0$.

$x \to (1-x^2)\, P(x)\, P(x)$ est continue et positive sur $[-1,1]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, P(x)\, P(x)\, \mathrm{d}x = 0$ et $-1 \neq 1$.

Alors $\forall x \in [-1,1]$, $(1-x^2)\, P(x)\, P(x) = 0$. Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $\big(P(x)\big)^2 = 0$. Donc $\forall x \in]-1,1[$, $P(x) = 0$.

Le polynôme P admet alors une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

$\forall P \in E$, $(P \,|\, P) = 0 \Rightarrow P = 0_E$. $(.\,|\,.)$ est définie.

Les cinq points précédents montrent que :

$$\boxed{(P,Q) \to (P\,|\,Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Q2. • Soit P un élément de E. $(X^2-1)\,P$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n+2$ donc $\big((X^2-1)\,P\big)''$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n soit un élément de E.

Pour tout polynôme P de E, $\big((X^2-1)\,P\big)''$ est un élément de E. Donc ϕ est une application de E dans E.

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de E.

$\phi(\lambda\,P+Q) = \big((X^2-1)\,(\lambda\,P+Q)\big)'' = \big(\lambda\,(X^2-1)\,P+(X^2-1)\,Q\big)'' = \lambda\,\big((X^2-1)\,P\big)'' + \big((X^2-1)\,Q\big)''$ par linéarité de la dérivation. Ainsi $\phi(\lambda\,P+Q) = \lambda\,\phi(P)+\phi(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ \phi(\lambda\,P+Q) = \lambda\,\phi(P)+\phi(Q)$. ϕ est linéaire.

Finalement ϕ est une application linéaire de E dans E. ϕ est un endomorphisme de E.

• Soient P et Q deux éléments de E.

Posons $\widehat{P} = \big((X^2-1)\,P\big)'$, $\widehat{Q} = \big((X^2-1)\,Q\big)'$, $\forall t \in [-1,1],\ u(t) = \widehat{P}(t)$ et $v(t) = (1-t^2)\,Q(t)$.

Notons que : $\forall t \in [-1,1],\ v(t) = -(t^2-1)\,Q(t)$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. $\forall t \in [-1,1],\ u'(t) = (\widehat{P})'(t) = \phi(P)(t)$ et $v'(t) = -\widehat{Q}(t)$.

En intégrant par parties on obtient :

$(\phi(P)\,|\,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,\phi(P)(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarquons que $v(1) = v(-1) = 0$; il vient alors : $(\phi(P)\,|\,Q) = -\displaystyle\int_{-1}^{1} u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \widehat{P}(t)\,\widehat{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$

De même $(\phi(Q)\,|\,P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \widehat{Q}(t)\,\widehat{P}(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

$(\phi(P)\,|\,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \widehat{P}(t)\,\widehat{Q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \widehat{Q}(t)\,\widehat{P}(t)\,\mathrm{d}t = (\phi(Q)\,|\,P) = (P\,|\,\phi(Q))$. Donc : $(\phi(P)\,|\,Q) = (P\,|\,\phi(Q))$.

$\forall (P,Q) \in E^2,\ (\phi(P)\,|\,Q) = (P\,|\,\phi(Q))$. ϕ est symétrique.

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

R

EXERCICE 2

thème analogue dans oral ESCP 2007 2.12

ESSEC 2002, LYON 2008

Ancienne correction — JFC

Exercice — Produit scalaire. Endomorphisme symétrique.

$E = \mathbb{R}[X]$. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ <P,Q> = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

Q2. On pose $\forall P \in E,\ \varphi(P) = XP' - P''$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que : $\forall (P,Q) \in E^2,\ <P, \varphi(Q)> = <P', Q'>$ (on pourra d'abord dériver $t \to Q'(t)e^{-t^2/2}$).

En déduire que φ est un endomorphisme symétrique.

Liminaire... Notons que : $\forall R \in \mathbb{R}[X],\ \lim_{x\to+\infty}\left(R(x)e^{-x^2/2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(R(x)e^{-x^2/2}\right) = 0$.

Soit $R \in \mathbb{R}[X]$

$\exists r \in \mathbb{N},\ \exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1},\ R = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

Pour tout $k \in [\![0,r]\!]$, $\lim_{x\to+\infty}(x^k e^{-x^2/2}) = \lim_{x\to-\infty}(x^k e^{-x^2/2}) = 0$; ainsi $\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{r} a_k x^k e^{-x^2/2}\right) =$ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sum_{k=0}^{r} a_k x^k e^{-x^2/2}\right) = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(R(x)e^{-x^2/2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(R(x)e^{-x^2/2}\right) = 0$.

• Notons que : $\forall S \in \mathbb{R}[X],\ \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-t^2/2}\,dt$ converge. Soit $S \in \mathbb{R}[X]$. $t \mapsto S(t)e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(*) D'après ce qui précède $\lim_{t\to-\infty}(t^2 S(t)e^{-t^2/2}) = 0$. Ainsi $\exists A \in \mathbb{R}_-^*,\ \forall t \in]-\infty, A],\ |t^2 S(t) e^{-t^2/2}| \leq 1$

Donc $\forall t \in]-\infty, A],\ 0 \leq |S(t)e^{-t^2/2}| \leq \frac{1}{t^2}$. La positivité de $t \mapsto |S(t)e^{-t^2/2}|$ et la convergence de $\int_{-\infty}^{A} \frac{dt}{t^2}$ donnent la convergence de $\int_{-\infty}^{A} S(t)e^{-t^2/2}\,dt$ et donc celle de $\int_{-\infty}^{0} S(t)e^{-t^2/2}\,dt$.

On montre de la même manière que $\int_{0}^{+\infty} S(t)e^{-t^2/2}\,dt$ converge.

Par conséquent : $\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-t^2/2}\,dt$ converge.

(Q1) Soit $(P,Q,R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $PQ \in \mathbb{R}[X]$ donc $<P,Q> = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,dt$ existe.
- $<\lambda P+Q, R> = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P+Q)(t)R(t)e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t))e^{-t^2/2}\,dt$.

$<\lambda P+Q, R> = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t^2/2}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t^2/2}\,dt = \lambda <P,R> + <Q,R>$.

toutes les intégrales convergent

(*) On pouvait dire plus rapidement que $|S(t)e^{-t^2/2}| = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$... avec le programme de 2005.

R

- $\langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2/2}\,dt = \langle Q,P\rangle$.

- $\forall t\in\mathbb{R}$, $P^2(t)e^{-t^2/2}\geq 0$ donc $\langle P,P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2/2}\,dt \geq 0$.

Supposons $\langle P,P\rangle=0$. $t\mapsto P^2(t)e^{-t^2/2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}P^2(t)e^{-t^2/2}\,dt=0$

Donc $t\mapsto P^2(t)e^{-t^2/2}$ est nulle sur $\mathbb{R}$. Or $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{-t^2/2}\neq 0$ donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $P^2(t)=0$.

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}$, $P(t)=0$. $P=0_E$.

Ceci achève de prouver que <u>$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.</u>

Q2 a) $\forall P\in E$, $XP'-P''\in E$ donc φ est une application de E dans E.

$\forall (P,Q)\in E^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P+Q) = X(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)'' = X(\lambda P'+Q')-(\lambda P''+Q'') = \lambda(XP'-P'')+XQ'-Q'' = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

<u>Ainsi $\varphi\in\mathcal{L}(E)$.</u>

b) Soit $(P,Q)\in E^2$. Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $h(t)=Q'(t)e^{-t^2/2}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t\in\mathbb{R}$, $h'(t)=Q''(t)e^{-t^2/2}-tQ'(t)e^{-t^2/2} = -\varphi(Q)(t)e^{-t^2/2}$.

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$\int_A^B P(t)\varphi(Q)(t)e^{-t^2/2}\,dt = -\int_A^B P(t)h'(t)\,dt = -[P(t)h(t)]_A^B + \int_A^B P'(t)h(t)\,dt$ ... intégration par parties simple.

$\int_A^B P(t)\varphi(Q)(t)e^{-t^2/2}\,dt = -P(B)h(B)+P(A)h(A)+\int_A^B P'(t)h(t)\,dt$.

$\int_A^B P(t)\varphi(Q)(t)e^{-t^2/2}\,dt = -P(B)Q'(B)e^{-B^2/2}+P(A)Q'(A)e^{-A^2/2}+\int_A^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2/2}\,dt$

$PQ'\in\mathbb{R}[X]$ donc $\lim_{B\to+\infty}[P(B)Q'(B)e^{-B^2/2}]=0$ et $\lim_{A\to-\infty}[P(A)Q'(A)e^{-A^2/2}]=0$

Ainsi $\langle P,\varphi(Q)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\varphi(Q)(t)e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2/2}\,dt = \langle P',Q'\rangle$.

$\forall (P,Q)\in E^2$, $\langle P,\varphi(Q)\rangle = \langle P',Q'\rangle$.

Alors $\forall (P,Q)\in E^2$, $\langle P,\varphi(Q)\rangle = \langle P',Q'\rangle$ et $\langle Q,\varphi(P)\rangle = \langle Q',P'\rangle$

$\forall (P,Q)\in E^2$, $\langle P,\varphi(Q)\rangle = \langle P',Q'\rangle = \langle Q',P'\rangle = \langle Q,\varphi(P)\rangle = \langle\varphi(P),Q\rangle$.

<u>$\forall (P,Q)\in E^2$, $\langle P,\varphi(Q)\rangle = \langle\varphi(P),Q\rangle$ et φ est symétrique.</u>

R

EXERCICE 3

Exercice | S | **Endomorphisme symétrique.**

E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

Si $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(u,v)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$.

Nous avons déja vu que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que φ est un produit scalaire sur E.

On pose $\forall (u_n)_{n\geqslant 0}\in E,\ f\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)=\left(\dfrac{u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

Q2. Montrer que f est injectif et non surjectif. En déduire que $\operatorname{Im} f$ est strictement contenu dans $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Q1 * Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E. Posons $(v_n)_{n\geqslant 0}=f((u_n)_{n\geqslant 0})$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n^2=\left(\dfrac{u_n}{n+1}\right)^2=\dfrac{u_n^2}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2}\,u_n^2.$

$\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$. Ainsi 1) $v_n^2=o(u_n^2)$

2) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2\geqslant 0$ et $v_n^2\geqslant 0$

3) La série de terme général u_n^2 converge car $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n^2 converge. Ainsi $(v_n)_{n\geqslant 0}\in E$.

$\forall (u_n)_{n\geqslant 0}\in E,\ f((u_n)_{n\geqslant 0})\in E$. <u>$f$ est une application de E dans E</u>.

* Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\hat u_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$f(\lambda(u_n)_{n\geqslant 0}+(\hat u_n)_{n\geqslant 0})=f((\lambda u_n+\hat u_n)_{n\geqslant 0})=\left(\dfrac{\lambda u_n+\hat u_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}=\lambda\left(\dfrac{u_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}+\left(\dfrac{\hat u_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}=\lambda f((u_n)_{n\geqslant 0})+f((\hat u_n)_{n\geqslant 0})$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall (u_n)_{n\geqslant 0}\in E,\ \forall (\hat u_n)_{n\geqslant 0}\in E,\ f(\lambda(u_n)_{n\geqslant 0}+(\hat u_n)_{n\geqslant 0})=\lambda f((u_n)_{n\geqslant 0})+f((\hat u_n)_{n\geqslant 0})$.

<u>f est linéaire.</u>

Finalement <u>f est un endomorphisme de E.</u>

* Soient $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$\varphi(f(u),v)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{u_k}{k+1}v_k=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\dfrac{v_k}{k+1}=\varphi(u,f(v))$.

$\forall (u,v)\in E^2,\ \varphi(f(u),v)=\varphi(u,f(v))$. <u>$f$ est symétrique.</u>

R

(Q2) • Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathrm{Ker}\, f$. $f(u)=0_E$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{n+1}=0$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$. Ainsi $u=0_E$.

donc $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$ et **f est injectif.**

• Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=\dfrac{1}{n+1}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}$ donc la série de terme général w_n^2 converge. $(w_n)_{n\geq 0}$ est un élément de E. Supposons que $(w_n)_{n\geq 0}$ appartienne à $\mathrm{Im}\, f$. Alors $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $f((u_n)_{n\geq 0})=(w_n)_{n\geq 0}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{n+1}=w_n=\dfrac{1}{n+1}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n^2=1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2=1\neq 0$ donc la série de terme général u_n^2 diverge. Ceci contredit le fait que $(u_n)_{n\geq 0}$ est un élément de E.

Ainsi $(w_n)_{n\geq 0}\in E$ mais $(w_n)_{n\geq 0}$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}\, f$. $\mathrm{Im}\, f\subsetneq E$.

f n'est pas surjectif.

• Soit $u\in\mathrm{Im}\, f$. $\exists t\in E$, $u=f(t)$.

$$\forall v\in\mathrm{Ker}\, f,\ \varphi(u,v)=\varphi(f(t),v)\overset{f\text{ est symétrique}}{=}\varphi(t,f(v))\underset{v\in\mathrm{Ker}\, f}{=}\varphi(t,0_E)=0.$$

$\forall v\in\mathrm{Ker}\, f$, $\varphi(u,v)=0$ donc $u\in(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$

Ainsi $\mathrm{Im}\, f\subset(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$.

$\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$ donc $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}=E$. Alors **$\mathrm{Im}\, f$ est strictement contenu dans $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$.**

Exercice.- Montrer que $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp}=\mathrm{Ker}\, f$.

Ainsi $\mathrm{Im}\, f$ est strictement contenu dans $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp\perp}$.

R.

EXERCICE 4 — thème abordé dans EDHEC 2002 PB. J.F.C.

Exercice **S** **Endomorphisme symétrique. Caractérisation des symétries orthogonales.**

E est un espace vectoriel euclidien. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

s est la symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à G.

Montrer que $G = F^{\perp}$ si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

Rappel.. 1.. Si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times G$, $s(x) = x_1 - x_2$

2.. $s^2 = Id_E$.

3.. s est bijective et $s^{-1} = s$

4.. $F = Ker(s - Id_E)$ et $G = Ker(s + Id_E)$.

* Supposons que $G = F^{\perp}$. Soient x et y deux éléments de E.

$\exists!(x_1, x_2) \in F \times G$, $x = x_1 + x_2$ et $\exists!(y_1, y_2) \in F \times G$, $y = y_1 + y_2$.

$<s(x), y> = <x_1 - x_2, y_1 + y_2> = <x_1, y_1> + \underbrace{<x_1, y_2> - <x_2, y_1>}_{= 0 \text{ car } G = F^{\perp}} - <x_2, y_2>$.

$<s(x), y> = <x_1, y_1> - <x_2, y_2>$. De même $<s(y), x> = <y_1, x_1> - <y_2, x_2>$.

Alors $<s(x), y> = <x_1, y_1> - <x_2, y_2> = <y_1, x_1> - <y_2, x_2> = <s(y), x> = <x, s(y)>$.

$\forall (x, y) \in E^2$, $<s(x), y> = <x, s(y)>$. <u>s est un endomorphisme symétrique de E.</u>

* <u>Supposons que s est un endomorphisme symétrique de E.</u> Montrons que $G = F^{\perp}$.

Comme F et G sont supplémentaires il suffit de montrer qu'ils sont orthogonaux.

Soit $x \in F$ et $y \in G$. $s(x) = x$ et $s(y) = -y$.

$<x, y> \underset{s(x)=x}{=} <s(x), y> \underset{s \text{ est symétrique}}{=} <x, s(y)> \underset{s(y)=-y}{=} -<x, y>$. Alors $2<x, y> = 0$. $<x, y> = 0$.

$\forall x \in F, \forall y \in G$, $<x, y> = 0$. Donc F et G sont orthogonaux. Comme F et G sont supplémentaires : <u>$G = F^{\perp}$</u>.

<u>$G = F^{\perp} \iff s$ est un endomorphisme symétrique.</u>

⚠ Sachant que s est une symétrie vectorielle...

ou <u>s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.</u>

Notons que si f est une application de E dans E, f est une symétrie vectorielle orthogonale si et seulement si f est un endomorphisme symétrique de E tel que $f \circ f = Id_E$.

R.

EXERCICE 5

On trouve cela par exemple dans
ncl ESCP 2002 2.4, 2004 1.11, 2003 2.1
HEC M I 2003

Exercice | S | **Matrice symétrique.**

À savoir faire par cœur.

L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Q1. • $L \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et ${}^tL \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ donc $M \in M_k(\mathbb{R})$.

• ${}^tM = {}^t({}^tLL) = {}^tL\,{}^t({}^tL) = {}^tLL = M$. M est symétrique.

• Soit λ une valeur propre de M. $\exists X \in M_{k,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$ et $MX = \lambda X$.

$\lambda \|X\|^2 = \lambda\,{}^tXX = {}^tX(\lambda X) = {}^tX(MX) = {}^tX({}^tLLX) = {}^tX\,{}^tL\,LX = {}^t(LX)\,LX = \|LX\|^2.$

$\|\ \|$ norme associée au produit scalaire canonique de $M_{k,1}(\mathbb{R})$...

norme associée au produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$...

Comme $\|X\|^2 \neq 0$: $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2}$ donc $\lambda \in [0, +\infty[$.

Les valeurs propres de M sont des positives ou nulles.

Q2. Posons $H = \{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ $(H = \operatorname{Ker} L\ !)$.

* Supposons que les valeurs propres de M sont strictement positives.

Soit $X \in H$. $LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tLLX = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$. $MX = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$.

Si X n'est pas nul, 0 est valeur propre de M donc $0 > 0$!! Ainsi $X = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$!

$H \subset \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$ mais $0_{M_{k,1}(\mathbb{R})} \in H$ donc $H = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$.

* Réciproquement supposons que $H = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$ et montrons que les valeurs propres de M sont strictement positives. Soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. Nous avons vu dans Q1 que $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2}$.

Si $LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, $X \in H$ donc $X = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$! Ainsi $LX \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\|LX\|^2 > 0$.

Dans ces conditions : $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2} > 0$. Les valeurs propres de M sont strictement positives.

R.

Les valeurs propres de M sont strictement positives si et seulement si $\{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$

ou si et seulement si $\operatorname{Ker} L = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$.

Le théorème du rang "s'applique" de manière évidente à la matrice L donc :

$k = \dim \operatorname{Ker} L + \operatorname{rg} L$.

Ainsi : $\operatorname{Ker} L = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$

$\Updownarrow$

$\dim \operatorname{Ker} L = 0$

$\Updownarrow$

$\operatorname{rg} L = k$.

Alors <u>les valeurs propres de $M = {}^tLL$ sont strictement positives si et seulement si $\operatorname{rg} L = k$.</u>

<u>Remarque</u>.. Supposons que $k = n$. Alors $L \in M_n(\mathbb{R})$.

$\operatorname{rg} L = k \iff \operatorname{rg} L = n \iff L$ est inversible.

Donc 1) Les valeurs propres de ${}^tLL$ sont positives ou nulles (${}^tLL$ est une matrice symétrique positive).

2) Les valeurs propres de ${}^tLL$ sont strictement positives si et seulement si L est inversible.

Donc ${}^tLL$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement si L est inversible.

EXERCICE 6

Exercice | S | **Endomorphisme symétrique.**

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est munit du produit scalaire canonique que nous noterons $< .,. >$ $(\forall (M,N) \in E,\ < M,N >= \text{tr}({}^tMN))$.

A est une matrice symétrique inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall M \in E,\ \varphi(M) = AMA^{-1}$.

Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de $(E, < .,. >)$.

• *Voir à ce sujet l'exercice 2 d'EDHEC 2007.*

• $\forall M \in E$, $\varphi(M) = AMA^{-1} \in E$. $\underline{\varphi \text{ est une application de } E \text{ dans } E.}$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(M,N) \in E^2$.

$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A^{-1} = \lambda\, AMA^{-1} + ANA^{-1} = \lambda \varphi(M) + \varphi(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (M,N) \in E^2$, $\varphi(\lambda M + N) = \lambda \varphi(M) + \varphi(N)$. $\underline{\varphi \text{ est linéaire.}}$

• Soit $(M,N) \in E^2$.

$<\varphi(M), N> = \text{tr}({}^t(AMA^{-1})N) = \text{tr}({}^tA^{-1}\,{}^tM\,{}^tA\,N) = \text{tr}(A^{-1}\,{}^tM\,AN)$.

A est symétrique... donc A^{-1} est symétrique

$<\varphi(M), N> = \text{tr}(A^{-1}({}^tMAN)) = \text{tr}(({}^tMAN)A^{-1}) = \text{tr}({}^tMANA^{-1}) = <M, \varphi(N)>$.

$\forall (U,V) \in E^2$, $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$

$\forall (M,N) \in E^2$, $<\varphi(M), N> = <M, \varphi(N)>$. φ est symétrique.

Finalement $\underline{\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}}$

Exercice .. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $<\cdot,\cdot>$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. α et β sont deux réels.

$\forall M \in E$, $\psi(M) = \alpha AM + \beta MA$.

Montrer que ψ est un endomorphisme symétrique de E.

R

EXERCICE 7

Exercice **S** **Endomorphisme symétrique.**

► *Classique. Bon entraînement.*

$n \in [\![3, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n et (u, v) est une famille libre de E.

α et β sont deux réels non nuls. On pose : $\forall x \in E, f(x) = \alpha < v, x > u + \beta < u, x > v$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(u, v)$ est stable par f.

Soit g l'endomorphisme de F qui à tout élément x de F associe $f(x)$.

Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de g.

Qu'en déduire sur le nombre de valeurs propres de f ?

Q3. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un endomorphisme symétrique de E.

b) Ici $\alpha = \beta$. Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$ de F. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

• *Thème abordé matriciellement dans oral ESCP 2009 2.8*

Q1 • $\forall x \in E$, $\alpha \langle v, x \rangle \in \mathbb{R}$ et $\beta \langle u, x \rangle \in \mathbb{R}$.

donc $\forall x \in E$, $f(x) = \alpha \langle v, x \rangle u + \beta \langle u, x \rangle v \in E$

f est une application de E dans E.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in E^2$.

$f(\lambda x + y) = \alpha \langle v, \lambda x + y \rangle u + \beta \langle u, \lambda x + y \rangle v$

$f(\lambda x + y) = (\alpha \lambda \langle v, x \rangle + \alpha \langle v, y \rangle) u + (\beta \lambda \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle) v$

$f(\lambda x + y) = \lambda (\alpha \langle v, x \rangle u + \beta \langle u, x \rangle v) + \alpha \langle v, y \rangle u + \beta \langle u, y \rangle v = \lambda f(x) + f(y)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de E.

• Soit $x \in E$. $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow \alpha \langle v, x \rangle u + \beta \langle u, x \rangle v = 0 \underset{(u,v) \text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha \langle v, x \rangle = 0 \\ \beta \langle u, x \rangle = 0 \end{cases}$.

Comme α et β sont non nuls : $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x$ est orthogonal à u et v.

Ainsi $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Vect}(u, v))^\perp$.

• $\forall x \in E$, $f(x) = \langle v, x \rangle u + \langle u, x \rangle v \in \operatorname{Vect}(u, v)$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(u, v)$.

$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim (\operatorname{Vect}(u, v))^\perp = \dim \operatorname{Vect}(u, v) < +\infty$!

Plus de doute : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u, v)$.

R.

(Q2) • Soit $x \in F$. $f(x) \in \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f = F$, $f(x) \in F$.

$\forall x \in F, f(x) \in F$. <u>F est stable par f.</u>

• → <u>Soit λ une valeur propre non nulle de f.</u> $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$.

$x = \frac{1}{\lambda} f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in \operatorname{Im} f$. Alors $x \neq 0_E$ et $g(x) = f(x) = \lambda x$.

$\uparrow$
$\lambda \neq 0$

<u>λ est une valeur propre de g</u> ... et x un vecteur propre de g associé à λ.

→ <u>Réciproquement supposons que λ est une valeur propre de g.</u>

$\exists x \in F$, $x \neq 0_E$ et $g(x) = \lambda x$. Donc $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$.

λ est une valeur propre de f.

Supposons que λ est nul. Alors $f(x) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Vect}(u,v))^\perp = F^\perp$

donc $x \in F \cap F^\perp$. $x = 0_E$! Ainsi $\lambda \neq 0$.

<u>λ est une valeur propre non nulle de f</u> ... et x un vecteur propre de f associé à λ.

<u>Les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de g.</u>

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim F = n - 2 > 0$ car $n \in [\![3, +\infty[\![$.

Donc 0 est valeur propre de f.

g est un endomorphisme de F et $\dim F = 2$ alors g a au plus deux valeurs propres.

Il résulte de ce qui précède que <u>f a au moins une valeur propre et au plus trois valeurs propres.</u>

(Q3) a) $\forall (x,y) \in E^2$.

$\langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = \langle \alpha \langle v,x\rangle u + \beta \langle u,x\rangle v, y\rangle - (\langle x, \alpha\langle v,y\rangle u + \beta\langle u,y\rangle v\rangle)$

$\langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = \alpha \langle v,x\rangle\langle u,y\rangle + \beta\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle - \alpha\langle v,y\rangle\langle x,u\rangle - \beta\langle u,y\rangle\langle x,v\rangle$.

$\langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = \alpha(\langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle v,y\rangle\langle u,x\rangle) + \beta(\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle - \langle u,y\rangle\langle v,x\rangle)$.

<u>$\langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = (\alpha - \beta)(\langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle u,x\rangle\langle v,y\rangle)$</u>

R

1er cas $\alpha=\beta$ $\quad \forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = (\alpha-\beta)\big(\langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle u,x\rangle\langle v,y\rangle\big)=0.$

$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. f est symétrique.

2ème cas $\alpha\neq\beta$

f est symétrique

$\Updownarrow$

$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = 0$

$\alpha\neq\beta\ \Updownarrow$

$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle u,x\rangle\langle v,y\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\forall x\in E,\ \forall y\in E^2,\ \langle \langle v,x\rangle u - \langle u,x\rangle v, y\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\forall x\in E,\ \langle v,x\rangle u - \langle u,x\rangle v \in E^{\perp}$

$E^{\perp}=\{0_E\}\rightarrow \Updownarrow$

$\forall x\in E,\ \langle v,x\rangle u - \langle u,x\rangle v = 0_E$

(u,v) libre $\Updownarrow$

$\forall x\in E,\ \langle v,x\rangle = \langle u,x\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\forall x\in E,\quad x\in F^{\perp}$

$\Updownarrow$

$E\subset F^{\perp}$

dim $E=n$ et dim $F^{\perp}=n-2$ donc $E\subset F^{\perp}$ est impossible . f n'est pas symétrique.

Finalement <u>f est symétrique si et seulement si $\alpha=\beta$.</u>

b) Ici $\alpha=\beta$. Donc f est symétrique ... g aussi.

$g(u)=\alpha\langle v,u\rangle u + \alpha\langle u,u\rangle v$ et $g(v)=\alpha\langle v,v\rangle u + \alpha\langle u,v\rangle v$.

Donc $\quad M_{(u,v)}(g) = \begin{pmatrix} \alpha\langle u,v\rangle & \alpha\|v\|^2 \\ \alpha\|u\|^2 & \alpha\langle u,v\rangle \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \langle u,v\rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u,v\rangle \end{pmatrix}.$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda\in Sp\,g \Leftrightarrow (\alpha\langle u,v\rangle-\lambda)(\alpha\langle u,v\rangle-\lambda)-(\alpha\|u\|^2)(\alpha\|v\|^2)$

$\lambda\in Sp\,g \Leftrightarrow (\alpha\langle u,v\rangle-\lambda)^2 = \alpha^2\|u\|^2\|v\|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\langle u,v\rangle-\lambda = \alpha\|u\|\|v\| \\ \text{ou} \\ \alpha\langle u,v\rangle-\lambda = -\alpha\|u\|\|v\| \end{cases}$

$\lambda\in Sp\,g \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|) \\ \text{ou} \\ \lambda = \alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|) \end{cases}$

R.

$$\underline{\underline{\operatorname{Sp} g = \{\alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|),\ \alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|)\}}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{Sp} f = \{0,\ \alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|),\ \alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|)\}.}}$$

Nous avons vu plus haut qu'un vecteur propre de f associé à une valeur propre non nulle λ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ et réciproquement.

Donc si λ est une valeur propre non nulle de f : $SEP(f,\lambda) = SEP(g,\lambda)$.

Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Posons $\lambda_\varepsilon = \alpha(\langle u,v\rangle + \varepsilon\|u\|\|v\|)$.

Soit $x = au + bv \in F$.

$$x \in SEP(g,\lambda_\varepsilon) \Leftrightarrow g(x) = \lambda_\varepsilon x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha\langle u,v\rangle & \alpha\|v\|^2 \\ \alpha\|u\|^2 & \alpha\langle u,v\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \lambda_\varepsilon \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda_\varepsilon)a + \alpha\|v\|^2 b = 0 \\ \alpha\|u\|^2 a + (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda_\varepsilon) b = 0 \end{cases}$$

$$x \in SEP(g,\lambda_\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha\varepsilon\|u\|\|v\| a + \alpha\|v\|^2 b = 0 \\ \alpha\|u\|^2 a - \alpha\varepsilon\|u\|\|v\| b = 0 \end{cases} \underset{\substack{\alpha \neq 0 \\ \|u\|\neq 0 \text{ et } \|v\|\neq 0 \text{ car } u \neq 0_E \text{ et } v \neq 0_E \text{ puisque} \\ (u,v) \text{ est libre}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\varepsilon\|u\| a + \|v\| b = 0 \\ \|u\| a - \varepsilon\|v\| b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\varepsilon\|u\|}{\|v\|} a \\ b = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\|u\|}{\|v\|} a \end{cases}.$$

Notons que $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ car $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

Donc $x \in SEP(g,\lambda_\varepsilon) \Leftrightarrow \left\{ b = \dfrac{\varepsilon\|u\|}{\|v\|} a \right.$. $SEP(g,\lambda_\varepsilon) = \operatorname{Vect}\left(u + \dfrac{\varepsilon\|u\|}{\|v\|} v\right) = \operatorname{Vect}(\|v\|u + \varepsilon\|u\|v)$

Rappelons que $SEP(g,\lambda_\varepsilon) = SEP(f,\lambda_\varepsilon)$ et concluons.

$$\underline{\underline{\operatorname{Sp} f = \{0,\ \alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|),\ \alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|)\}.}}$$

$$\underline{\underline{SEP(f,0) = (\operatorname{Vect}(u,v))^\perp.}}$$

$$\underline{\underline{SEP(f,\alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|)) = \operatorname{Vect}(\|v\|u - \|u\|v).}}$$

$$\underline{\underline{SEP(f,\alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|)) = \operatorname{Vect}(\|v\|u + \|u\|v).}}$$

R.

EXERCICE 8

Exercice **S** **CNS pour que la composée de deux endomorphismes symétrique soit un endomorphisme symétriques.**

Soient f et g deux endomorphismes symétriques de E (qui n'est pas nécessairement euclidien).

Montrer que $f \circ g$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si f et g commutent.

---

* Supposons que $f \circ g$ est un endomorphisme symétrique.

$\forall x \in E, \forall y \in E, \ \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle x, (f \circ g)(y) \rangle$.

Or $\forall (x,y) \in E^2, \ \langle x, (f \circ g)(y) \rangle \underset{f \text{ est symétrique}}{=} \langle f(x), g(y) \rangle \underset{g \text{ est symétrique}}{=} \langle g(f(x)), y \rangle = \langle (g \circ f)(x), y \rangle$

Alors $\forall (x,y) \in E^2, \ \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle (g \circ f)(x), y \rangle$.

$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle (f \circ g)(x) - (g \circ f)(x), y \rangle = 0$.

Donc $\forall x \in E, \ f \circ g(x) - (g \circ f)(x) \in E^{\perp}$. Or $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Donc $\forall x \in E, \ (f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = 0_E$. $\forall x \in E, \ (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. $f \circ g = g \circ f$.

* Réciproquement supposons que $f \circ g = g \circ f$ et montrons que $f \circ g$ est symétrique.

$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle g(x), f(y) \rangle = \langle x, g(f(y)) \rangle \underset{g \circ f = f \circ g}{=} \langle x, (f \circ g)(y) \rangle$.

f est symétrique
g est symétrique

$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle x, (f \circ g)(y) \rangle$. $f \circ g$ est symétrique.

Ainsi $f \circ g$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si f et g commutent.

Exercice. Retrouver matriciellement ce résultat en supposant que E est de dimension finie.

R.

EXERCICE 9

J.F.C.

Exercice E est un espace vectoriel eucliden de dimension n non nulle. f_1, f_2,..., f_p sont p endomorphismes symétriques de E tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{rg} f_k = n \text{ et } \forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{p} < f_k(x), x > = \|x\|^2 \qquad \cdot\ p \geqslant 2.$$

Q1. a) Montrer que si g est un endomorphisme symétrique de E tel que $\forall x \in E$, $< g(x), x >= 0$ alors g est l'endomorphisme nul (on pourra utiliser $x + y$! !).

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{p} f_k = id_E$.

Q2. a) Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f_1$, $\operatorname{Im} f_2$, ..., $\operatorname{Im} f_p$.

b) Montrer que $\forall x \in E$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(f_i(x))$.

c) Montrer que f_1, f_2, ..., f_p sont des projecteurs orthogonaux.

Q1 a) Soit $(x,y) \in E^2$.

$$0 \underset{\text{hypothèse}}{=} \langle g(x+y), x+y \rangle = \langle g(x)+g(y), x+y \rangle = \underbrace{\langle g(x), x \rangle}_{=0} + \langle g(x), y \rangle + \langle g(y), x \rangle + \underbrace{\langle g(y), y \rangle}_{=0}$$

Alors $0 = \langle g(x), y \rangle + \langle g(y), x \rangle \overset{g \text{ est symétrique}}{=} \langle g(x), y \rangle + \langle y, g(x) \rangle = 2\langle g(x), y \rangle$; $\langle g(x), y \rangle = 0$.

Ainsi $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \langle g(x), y \rangle = 0$

$\forall x \in E,\ g(x) \in E^\perp$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

$\forall x \in E,\ g(x) = 0_E$.

Donc <u>g est l'endomorphisme nul.</u>

<u>Rappel</u>.. En fait $\forall x \in E, \langle g(x), x \rangle = 0$ signifie que g est antisymétrique.

Donc il est normal que si g est symétrique et antisymétrique g soit nul.

b) Posons $h = \sum_{k=1}^{p} f_k - Id_E$. <u>$h$ est symétrique</u> comme combinaison linéaire de $p+1$ endomorphismes symétriques.

$$\forall x \in E,\ \langle h(x), x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{p} f_k(x) - x, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle f_k(x), x \rangle - \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle f_k(x), x \rangle - \|x\|^2 = 0$$

h est symétrique et $\forall x \in E,\ \langle h(x), x \rangle = 0$ donc $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\boxed{\sum_{k=1}^{p} f_k = Id_E}$.

R.

Q2 a) Soit $x \in E$. $x = Id_E(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \in \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im} f_k$.

Alors $E \subset \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im} f_k$. Or $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im} f_k \subset E$. Ainsi $\underline{\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im} f_k = E}$.

$$\dim \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im} f_k = \dim E = n \underset{\text{hypothèse}}{=} \sum_{k=1}^{p} \mathrm{rg}\, f_k = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{Im} f_k$$

$\dim \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im} f_k = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{Im} f_k$ "dans E" qui est de dimension finie.

Alors $\underline{\mathrm{Im} f_1, \mathrm{Im} f_2, \dots, \mathrm{Im} f_p \text{ sont en somme directe}}$.

<u>E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im} f_1, \mathrm{Im} f_2, \dots, \mathrm{Im} f_p$.</u>

b) $\sum_{k=1}^{p} f_k = Id_E$. Alors $\underline{\forall i \in [\![1, p]\!], \forall x \in E, \sum_{k=1}^{p} f_k(f_i(x)) = f_i(x)}$.

c) Soit $i \in [\![1, p]\!]$ et soit $x \in E$.

Posons $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $t_k = f_k(f_i(x))$ et $t'_k = \begin{cases} f_i(x) \text{ si } k = i \\ 0_E \text{ sinon} \end{cases}$

Alors 1) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $t_k \in \mathrm{Im} f_k$ et $t'_k \in \mathrm{Im} f_k$

2) $\sum_{k=1}^{p} t_k = \sum_{k=1}^{p} t'_k$

Comme $\mathrm{Im} f_1, \mathrm{Im} f_2, \dots, \mathrm{Im} f_p$ sont en somme directe : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $t_k = t'_k$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f_k(f_i(x)) = \begin{cases} f_i(x) \text{ si } k = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et ceci pour tout x dans E et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Alors $\underline{\forall i \in [\![1, p]\!], \forall k \in [\![1, p]\!], f_k \circ f_i = \begin{cases} f_i \text{ si } k = i \\ 0_{\mathcal{L}(E)} \end{cases}}$.

En particulier $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \circ f_i = f_i$ ... et $f_i \in \mathcal{L}(E)$.

<u>$f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des projecteurs.</u>

R.

Montrons que f_i est une projection orthogonale pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$

f_i est la projection sur $\mathrm{Im} f_i$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f_i$. $E = \mathrm{Im} f_i \oplus \mathrm{Ker} f_i$.

Notons également que $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker}(f_i - \mathrm{Id}_E)$

Soit $x \in \mathrm{Im} f_i$ et $y \in \mathrm{Ker} f_i$. $\exists t \in E,\ x = f_i(t)$ (on peut prendre $t = x$!)

$\langle x, y\rangle = \langle f_i(t), y\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ f_i \text{ est symétrique}}}{=} \langle t, f_i(y)\rangle = \langle t, 0_E\rangle = 0.$

$\forall x \in \mathrm{Im} f_i,\ \forall y \in \mathrm{Ker} f_i,\ \langle x, y\rangle = 0.$

Alors $\mathrm{Im} f_i$ et $\mathrm{Ker} f_i$ sont supplémentaires et orthogonaux. Donc $\mathrm{Im} f_i = (\mathrm{Ker} f_i)^\perp$

Alors <u>f_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im} f_i$.</u>

Remarque.- Nous venons de démontrer qu'une projection qui est un endomorphisme symétrique est une projection orthogonale.

<u>Exercice.-</u> Montrer que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Ker} f_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \mathrm{Im} f_k$ ... si $p \geq 2$.

Exercice **S** **Réduction d'un endomorphisme symétrique.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. Montrer que f est diagonalisable.

Q2. Construire une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

Q1 La matrice A de f dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique. Donc f est un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien E. Par conséquent f est diagonalisable.

Q2 $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$. Donc $\mathrm{rg}(f - Id_E) = 1$.

Par conséquent $\dim \mathrm{Ker}(f - Id_E) = 2$. 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 2. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in SEP(f,1) \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = x \\ x + 2y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0.$

$SEP(f,1)$ est donc l'hyperplan d'équation $x + y + z = 0$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.
Comme f est diagonalisable, f a une seconde valeur propre α (et pas plus) et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. de f
Comme f est symétrique, les deux sous-espaces propres de f sont orthogonaux... et supplémentaires
Alors $SEP(f,\alpha)$ est l'orthogonal de l'hyperplan d'équation $x + y + z = 0$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$, c'est donc la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + e_3$.

$SEP(f,\alpha) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $f(e_1 + e_2 + e_3) = 4(e_1 + e_2 + e_3)$. $\alpha = 4$.

Notons que $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(f,4)$. Cherchons une base orthonormée de $SEP(f,1)$. Posons $u_1 = e_1 - e_2$. $u_1 \in SEP(f,1)$. Cherchons un vecteur non nul de $SEP(f,1)$ orthogonal à u_1. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in SEP(f,1)$ et $\langle u, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}$ (*)

Posons $u_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$. Les coordonnées de u_2 vérifient (*) donc u_2 est un vecteur non nul orthogonal à u_1. $\|u_1\| = \sqrt{2}$ et $\|u_2\| = \sqrt{6}$. Posons $v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$ et $v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2$

donc une famille libre,

$B_1 = (v_1, v_2)$ est une famille orthonormée, de deux éléments de $SEP(f,1)$ qui est de dimension 2.

Ainsi $B_1 = (v_1, v_2)$ est une base orthonormée de $SEP(f,1)$. Comme B_2 est une base orthonormée de $SEP(f,4)$ et que $SEP(f,1)$ et $SEP(f,4)$ sont supplémentaires et orthogonaux : $\hat{B} = B_1 \cup B_2$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 1, 1 et 4.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)\right)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 1, 1 et 4.

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de la base orthonormée B à la base orthonormée $\hat{B}$.

1) P est orthogonale.

2) ${}^tPAP = P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1,1,2)$

3) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice Réduction d'une matrice symétrique.

Au choix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Trouver une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

▲ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Remarquons que A est symétrique et réelle donc diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$AX = \lambda X \iff \begin{cases} (2-\lambda)x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + (5-\lambda)y - 4z = 0 \\ -2x - 4y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2-\lambda)x + 2y - 2z = 0 \\ (2-2\lambda)x + (\lambda-1)y = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ (1-\lambda)y + (1-\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$

1er cas... $\lambda = 1$. $AX = X \iff x + 2y - 2z = 0$. $1 \in Sp(A)$ et $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ⊛

2e cas... $\lambda \neq 1$ $AX = \lambda X \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ -2x + y = 0 \\ (2-\lambda)x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -y = -2x \\ 0 = x[(2-\lambda)+4+4] = x(10-\lambda) \end{cases}$

a) $\lambda = 10$ $AX = 10X \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases}$. $10 \in Sp(A)$ et $SEP(A,10) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

b) $\lambda \neq 10$ $AX = \lambda X \iff x = y = z = 0$. $\lambda \notin Sp(A)$.

Finalement $Sp(A) = \{1, 10\}$, $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,10) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

⊛ Remarque.. On pouvait s'arrêter là. Car nécessairement A possède une seconde valeur propre λ et $SEP(A,\lambda)$ est l'orthogonal du plan vectoriel $SEP(A,1)$ qui a pour équation $x + 2y - 2z = 0$ donc $SEP(A,\lambda) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ or $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\lambda = 10$.

(On retrouve $\lambda = 10$ avec $Tr(A) = 2+5+5 = 1+1+\lambda$ ...).

Cherchons une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+4} = 3$. $\varepsilon_3 = \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $SEP(A,10)$.

Cherchons une base orthonormale de $SEP(A,1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(A,1)$ et $\left\langle X, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ \text{et} \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -4y \end{cases}$

R.

Ainsi $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur de $SEP(A,1)$ orthogonal à $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ qui est aussi un élément de $SEP(A,1)$. $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls de $SEP(A,1)$.

$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est famille libre et orthogonale de deux vecteurs de $SEP(A,1)$ qui est de dimension 2. $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $SEP(A,1)$.

$\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2}$ et $\left\|\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{16+1+1}=3\sqrt{2}$.

Alors $\mathcal{B}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $SEP(A,1)$.

- $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de $SEP(A,1)$.
- $\mathcal{B}_2$ est ———————— $SEP(A,10)$.
- $M_{3,1}(\mathbb{R})=SEP(A,1)\oplus SEP(A,10)$
- $SEP(A,1)$ et $SEP(A,10)$ sont orthogonaux

Alors $\mathcal{B}=$ "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$" est une base orthonormale de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1 et 10.

$\mathcal{B}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

P est orthogonale car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormales et $P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$.

$$P=\begin{pmatrix}0&4/3\sqrt{2}&1/3\\1/\sqrt{2}&-1/3\sqrt{2}&2/3\\1/\sqrt{2}&1/3\sqrt{2}&-2/3\end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

A est symétrique et réelle donc diagonalisable.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (9-\lambda)x = 0 \\ (5-\lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ 4y + (5-\lambda)z + 2t = 0 \\ -2y + 2z + (8-\lambda)t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-\lambda)x = 0 \\ (5-\lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ (9-\lambda)(y+z) = 0 \\ (9-\lambda)(z+2t) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{matrix}$$

1er Cas. $\lambda = 9$: $AX = 9X \Leftrightarrow -4y + 4z - 2t = 0 \Leftrightarrow 2y - 2z + t = 0$.

$9 \in Sp(A)$ et $SEP(A,9)$ est l'hyperplan d'équation $2y - 2z + t = 0$

$$SEP(A,9) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

2ème Cas. $\lambda \neq 9$:
$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (5-\lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ y = -z \\ 2t = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ 2t = -z \\ 0 = z[-5 + \lambda + 4 + 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ 2t = -z \\ \lambda z = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda = 0$. $AX = 0X \Leftrightarrow x = 0, y = -z, 2t = -z$

$0 \in Sp(A)$ et $SEP(A,0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) $\lambda \neq 0$ $AX = \lambda X \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$

$0 \in Sp(A)$

Ainsi $\underline{\underline{Sp(A) = \{0, 9\},\ SEP(A,0) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } SEP(A,9) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}}$

<u>Chercher une base orthonormale de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.</u>

$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$. $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $SEP(A,0)$.

Posons $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Utilisons le procédé de Schmidt pour déduire de la base (U_1, U_2, U_3) de $SEP(A,9)$ une base orthogonale de ce sous-espace. Observons que U_1 et U_2 sont orthogonaux ... U_1 et U_3 aussi !

Dès lors posons $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2$, $V_3 = U_3 + \alpha V_1 + \beta V_2$ et cherchons α et β pour que V_3 soit orthogonal à V_1 et V_2.

$$\langle V_3, V_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle U_3, V_1 \rangle + \alpha \langle V_1, V_1 \rangle + \beta \underbrace{\langle V_2, V_1 \rangle}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\langle U_3, V_1 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle} = -\frac{0}{1} = 0 \ !$$

$$\langle V_3, V_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle U_3,V_2\rangle + \alpha \underbrace{\langle V_1,V_2\rangle}_{=0} + \beta\langle V_2,V_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{\langle U_3,V_2\rangle}{\langle V_2,V_2\rangle} = -\frac{1}{2}$$

Posons $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{2}$.

Alors $V_3 = U_3 - \frac{1}{2} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. (V_1, V_2, V_3) est une famille orthogonale de $SEP(A,9)$.

$\|V_1\| = 1$, $\|V_2\| = \sqrt{2}$ et $\|V_3\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$\left(\frac{1}{\|V_1\|}V_1, \frac{1}{\|V_2\|}V_2, \frac{1}{\|V_3\|}V_3\right)$ est une famille orthonormale (donc libre) de trois vecteurs de $SEP(A,9)$ et $\dim SEP(A,9) = 3$.

$\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\|V_1\|}V_1, \frac{1}{\|V_2\|}V_2, \frac{1}{\|V_3\|}V_3\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale de $SEP(A,9)$.

$\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de $SEP(A,0)$.

$\mathcal{B}_2$ ——————— $SEP(A,9)$.

$M_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,0) \oplus SEP(A,9)$ et $SEP(A,0)$ et $SEP(A,9)$ sont orthogonaux.

Alors $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base orthonormale de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 0, 9, 9 et 9.

$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

P est orthogonale car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormales et $P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -4 & 0 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

R

EXERCICE 12

J.F.C.

Exercice | S | **Réduction simultanée de deux endomorphismes symétriques. Oral ESCP 99 2-4**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. f et g sont les endomorphismes de E dont les matrices sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1. Calculer A^2 et B^2.

Q2. Trouver une base orthonormale de E constitué de vecteurs propres de f et de g.

Q1 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4A$. $B^2 = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_2 & -2I_2 \\ -2I_2 & 2I_2 \end{pmatrix} = 2B.$

$A^2 = 4A$ et $B^2 = 2B$.

Q2 $A^2 - 4A = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ et $B^2 - 2B = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ donc $f^2 - 4f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g^2 - 2g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$X^2 - 4X$ (resp. $X^2 - 2X$) est un polynôme annulateur de f (resp. g) dont les zéros sont 0 et 4 (resp. 2). Ainsi $\mathrm{Sp}\, f \subset \{0, 4\}$ (resp. $\mathrm{Sp}\, g \subset \{0, 2\}$).

$\mathrm{rg}\, A = 1$ (toutes ses colonnes sont égales et non nulles). Alors $\mathrm{rg}\, f = 1$.

donc $\dim \mathrm{Ker}\, f = 3$. 0 est valeur propre de f et $\dim \mathrm{SEP}(f, 0) = 3$.

$\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

f est donc un endomorphisme symétrique de E. f est diagonalisable. Nécessairement f admet une autre valeur propre que 0 qui ne peut être que 4.

Donc $\mathrm{Sp}\, f = \{0, 4\}$, $\dim \mathrm{SEP}(f, 0) = 3$, $\dim \mathrm{SEP}(f, 4) = 1$ et $\mathrm{SEP}(f, 4) = (\mathrm{SEP}(f, 0))^{\perp}$.

La matrice de g dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique donc g est un endomorphisme symétrique. g est diagonalisable.

Supposons que g admette une valeur propre et une seule α. Comme g est diagonalisable :

$\mathrm{Ker}(g - \alpha \mathrm{Id}_E) = \mathrm{SEP}(g, \alpha) = E$. $g - \alpha \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $g = \alpha \mathrm{Id}_E$. $B = \alpha I_4$!!

Donc g admet au moins deux valeurs propres. Or $\mathrm{Sp}\, g \subset \{0, 2\}$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, g = \{0, 2\}$.

R

Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ un élément de E

$f(u)=0_E \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z+t=0$.

SEP$(f,0)$ est l'hyperplan d'équation $x+y+z+t=0$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

Alors SEP$(f,4)$, qui est l'orthogonal de SEP$(f,0)$, est la droite vectorielle engendrée par $\underline{u_1=e_1+e_2+e_3+e_4}$.

$$g(u)=0_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-z=0\\y-t=0\\-x+z=0\\-y+t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\t=y\end{cases}.$$

$$g(u)=2u \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-z=2x\\y-t=2y\\-x+z=2z\\-y+t=2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=-x\\t=-y\\z=-x\\t=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=-x\\t=-y\end{cases}.$$

SEP$(g,0)=\{xe_1+ye_2+xe_3+ye_4\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(e_1+e_3,\,e_2+e_4)$.

SEP$(g,2)=\{xe_1+ye_2-xe_3-ye_4\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(e_1-e_3,\,e_2-e_4)$.

<u>Observons</u> ! Posons $\underline{u_2=e_1-e_3}$ et $\underline{u_3=e_2-e_4}$. $u_2\neq 0_E$ et $u_3\neq 0_E$.

$u_1=e_1+e_2+e_3+e_4$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

De plus $u_1=(e_1+e_3)+(e_2+e_4)\in$ SEP$(g,0)$. C'est donc un vecteur propre de g associé à la valeur propre 0.

u_2 et u_3 sont orthogonaux ($1\times 0+0\times 1+(-1)\times 0+0\times(-1)=0$!) et ce sont des vecteurs propres de g associé à la valeur propre 2.

Mais u_2 et u_3 appartiennent à l'hyperplan d'équation $x+y+z+t=0$ donc ce sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 0.

Posons $\underline{u_4=e_1+e_3-(e_2+e_4)}$. $u_4\neq 0$ et $u_4\in\mathrm{Vect}(e_1+e_3,\,e_2+e_4)$. u_4 est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 0.

$u_4=e_1-e_2+e_3-e_4$ appartient à l'hyperplan d'équation $x+y+z+t=0$ donc u_4 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

$\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une famille de vecteurs propres de f (resp. g) associés aux valeurs propres 4, 0, 0, 0 (resp. 0, 2, 2, 0).

$u_1 \in SEP(f,0)$ et u_2, u_3, u_4 sont dans $SEP(f,0)$. Alors u_1 est orthogonal à u_2, u_3, u_4.

u_2 et u_3 sont orthogonaux comme nous l'avons déjà dit.

$u_2 \in SEP(g,2)$ et $u_4 \in SEP(g,0)$ donc u_2 et u_4 sont orthogonaux.

$u_3 \in SEP(g,2)$ et $u_4 \in SEP(g,0)$ donc u_3 et u_4 sont orthogonaux.

$\mathcal{B}'$ est une famille orthogonale d'éléments non nuls de E.

$\mathcal{B}'$ est donc une famille libre orthogonal de cardinal 4 égal à la dimension de E.

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de f et de g.

$\|u_1\|=2$, $\|u_2\|=\sqrt{2}$, $\|u_3\|=\sqrt{2}$ et $\|u_4\|=2$.

Posons $v_1=\dfrac{1}{\|u_1\|}u_1=\dfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4)$, $v_2=\dfrac{1}{\|u_2\|}u_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_3)$, $v_3=\dfrac{1}{\|u_3\|}u_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2-e_4)$ et

$v_4=\dfrac{1}{\|u_4\|}u_4=\dfrac{1}{2}(e_1-e_2+e_3-e_4)$.

$\mathcal{B}''=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f et g.

$M_{\mathcal{B}''}(f)=\mathrm{Diag}(4,0,0,0)$ et $M_{\mathcal{B}''}(g)=\mathrm{Diag}(0,2,2,0)$.

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$.

1) P est orthogonale.

2) $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}$

3) ${}^tPAP=P^{-1}AP=\mathrm{Diag}(4,0,0,0)$ et ${}^tPBP=P^{-1}BP=\mathrm{Diag}(0,2,2,0)$.

EXERCICE 13

JFC

Exercice Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Q1 a) Montrer que A et B sont diagonalisables.

b) Montrer que $A^2 = I_3$ et calculer B^2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Même chose pour B.

Q2 Trouver une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les matrices ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient toutes les deux diagonales.

Q3 Soit F l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ F(M) = AM - MB$.

a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre α et V un vecteur propre de B associé à la valeur propre β.

Montrer que $U\,{}^tV$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\alpha - \beta$.

c) F est-elle un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d) F est-elle diagonalisable ?

Q1 a) A et B sont deux matrices symétriques à coefficients réels donc A et B sont diagonalisables.

b) $A^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = I_3$. $A^2 = I_3$

$B^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & 12 & -6 \\ 12 & 12 & 12 \\ -6 & 12 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = B$.

$A^2 = I_3$ et $B^2 = B$.

c) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A ayant pour zéros -1 et 1 donc $\text{Sp}\,A \subset \{-1, 1\}$.

$X^2 - X$ est un polynôme annulateur de B ayant pour zéros 1 et 0 donc $\text{Sp}\,B \subset \{0, 1\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AX = -X \iff \begin{cases} -2x + 4y + 4z = -6x \\ 4x - 2y + 4z = -6y \\ 4x + 4y - 2z = -6z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4y + 4z = 0 \\ 4x + 4y + 4z = 0 \\ 4x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff x + y + z = 0$

Alors $-1 \in Sp\,A$ et $SEP(A,-1)$ est l'hyperplan d'équation $x+y+z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\dim SEP(A,-1) = 2$.

Comme A est symétrique à coefficients réels, ses sous-espaces propres sont orthogonaux et la somme de leurs dimensions est 3.

Alors A possède une seconde valeur propre nécessairement égale à 1 (car $Sp\,A \subset \{-1,1\}$) et $SEP(A,1) = SEP(A,-1)^{\perp} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$Sp\,A = \{-1,1\}$. $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. $SEP(A,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$.

$$BX = X \iff \begin{cases} 5x+2y-z = 6x \\ 2x+2y+2z = 6y \\ -x+2y+5z = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \iff x-2y+z=0.$$

$1 \in Sp(B)$ et $SEP(B,1)$ est l'hyperplan d'équation $x-2y+z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

En raisonnant comme pour A on montre que $0 \in Sp\,B$ et $SEP(B,0) = SEP(B,1)^{\perp} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

$Sp\,B = \{0,1\}$. $SEP(B,1) = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(B,0) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

Q2 Posons $Y_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. $Y_1 \in SEP(A,1)$, $Y_2 \in SEP(B,0)$.

Or $1-2+1=0$ et $1-2+1=0$ donc $Y_1 \in SEP(B,1)$ et $Y_2 \in SEP(A,-1)$.

Notons encore que Y_1 et Y_2 sont orthogonaux.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(A,-1) \cap SEP(B,1) \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=-x \end{cases}$.

Posons $Y_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. $Y_3 \in SEP(A,-1)$ et $Y_3 \in SEP(B,1)$.

$Y_1 \in SEP(A,1)$ et $Y_3 \in SEP(A,-1)$ donc Y_1 et Y_3 sont orthogonaux.

$Y_2 \in SEP(B,0)$ et $Y_3 \in SEP(B,1)$ donc Y_2 et Y_3 sont orthogonaux.

(Y_1, Y_2, Y_3) est une famille orthogonale d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre et orthogonale de cardinal 3 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, (Y_1, Y_2, Y_3) est une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

mieux (Y_1, Y_2, Y_3) est une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. B) associés aux valeurs propres $1, -1, -1$ (resp. $1, 0, 1$).

$\|Y_1\| = \sqrt{3}$, $\|Y_2\| = \sqrt{6}$, $\|Y_3\| = \sqrt{2}$.

Posons $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1$, $Z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} Y_2$ et $Z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_3$.

$\mathcal{B} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. B) $\longrightarrow$ associés aux valeurs propres $1, -1, -1$ (resp. $1, 0, 1$).

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

1°) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2°) P est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

3°) ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^tPBP = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient diagonales.

Q3) a) $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F(M) = AM - MB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. F est une application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$F(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)B = \lambda AM + AN - \lambda MB - NB = \lambda(AM - MB) + AN - NB = \lambda F(M) + F(N)$.

ceci achève de montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Notons que $U{}^tV \in M_3(\mathbb{R})$ car $U \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tV \in M_{1,3}(\mathbb{R})$.

$AU = \alpha U$ et $BV = \beta V$.

${}^tVB \underset{*}{=} {}^tV\,{}^tB = {}^t(BV) = {}^t(\beta V) = \beta\,{}^tV$.

B est symétrique

Alors $F(U{}^tV) = AU{}^tV - U{}^tVB = (\alpha U){}^tV - U(\beta\,{}^tV) = (\alpha - \beta)\,U{}^tV$.

$\underline{F(U{}^tV) = (\alpha - \beta)\,U{}^tV.}$

Posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. $\quad U{}^tV = (u_i v_j)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$.

U (resp. V) est un vecteur propre de A (resp. B) donc $U \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$ (resp. $V \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$).

$\exists i_0 \in [\![1,3]\!],\ u_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in [\![1,3]\!],\ v_{j_0} \neq 0$.

Alors $u_{i_0} v_{j_0} \neq 0$ donc $\underline{U{}^tV \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}}$.

<u>Ainsi $U{}^tV$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\alpha - \beta$.</u>

c) Z_1 est un vecteur propre de A et de B associé à la valeur propre 1.

Donc $Z_1{}^tZ_1$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $1-1=0$.

0 est valeur propre de F. <u>F n'est pas un automorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.</u>

d) Posons $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $H_{ij} = Z_i{}^tZ_j$.

Z_1, Z_2, Z_3 étant des vecteurs propres de A et B, $(H_{ij})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$ est une famille de cardinal 9 de $M_3(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$ une famille de réels telle que $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} H_{ij} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} Z_i{}^tZ_j = 0_{M_3(\mathbb{R})}.$$

Alors $\forall \ell \in [\![1,3]\!]$, $\underline{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} Z_i \underbrace{{}^tZ_j Z_\ell}_{\langle Z_j, Z_\ell \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = \ell \\ 0 \text{ si } j \neq \ell \end{cases}} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\ell} Z_i$.

$\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} Z_i = 0$. Or (Z_1, Z_2, Z_3) est libre donc

$\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $a_{ik} = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{F} = (M_{ij})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$ est une famille libre de $M_3(\mathbb{R})$. Card $\mathcal{F} = 9 = \dim M_3(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F.

<u>F est diagonalisable</u>.

<u>Exercice 1.-</u> Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de $M_3(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

<u>Exercice 2.-</u> Montrer que $\mathrm{Sp}\, F = \{-2, -1, 0, 1\}$

<u>Exercice 3.-</u> Généraliser.