R **EXERCICE 1**

JFC

Exercice | S | Par ♡ | **Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.**

► *Basique, classique et incontournable*

$E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $\forall (A,B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Remarque.. Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de E. Posons $C={}^tAB=(c_{ij})$

$C\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2,\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,j}$.

Alors $\mathrm{tr}(C)=\sum_{i=1}^{p} c_{i,i}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}$. Donc $\underline{\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}}$. ▲

Rappel.. • La trace définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

• $\forall U\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}({}^tU)=\mathrm{tr}(U)$.

* $(A,B)\to\langle A,B\rangle$ est bien une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$. (1)

* Soit $(A,B,C)\in E^3$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\langle A,\lambda B+C\rangle=\mathrm{tr}({}^tA(\lambda B+C))=\mathrm{tr}(\lambda\, {}^tAB+{}^tAC)=\lambda\,\mathrm{tr}({}^tAB)+\mathrm{tr}({}^tAC)=\lambda\langle A,B\rangle+\langle A,C\rangle$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall (A,B,C)\in E^3,\ \langle A,\lambda B+C\rangle=\lambda\langle A,B\rangle+\langle A,C\rangle$. (2)

* Soit $(A,B)\in E^2$. Montrons que $\langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$

V1 la formule ▲ donne immédiatement le résultat.

V2 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}({}^tAB)=\mathrm{tr}({}^t({}^tAB))=\mathrm{tr}({}^tBA)=\langle B,A\rangle$.

$\forall (A,B)\in E^2,\ \langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$. (3)

* Soit $A=(a_{ij})\in E$. $\langle A,A\rangle\underset{▲}{=}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(a_{k,i})^2\geqslant 0$.

$\forall A\in E,\ \langle A,A\rangle\geqslant 0$. (4)

* Soit $A=(a_{ij})$ un élément de E tel que $\langle A,A\rangle=0$.

$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(a_{k,i})^2=0$ et $\forall (i,k)\in [\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ (a_{k,i})^2\geqslant 0$.

Donc $\forall (i,k)\in [\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ (a_{k,i})^2=0$ ou $a_{k,i}=0$. Ainsi $A=0_E$.

$\forall A\in E,\ \langle A,A\rangle=0\Rightarrow A=0_E$ (5)

Les cinq points précédents montrent que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire de $E=\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ c'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2

JFC

Exercice | **S** | **Encore un exemple de produit scalaire usuel.**

▶ *Basique, classique et incontournable*

Par ♡ $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $\forall (P,Q) \in E^2$, $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que pour tout élément R de $\mathbb{R}[X]$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

---

1. • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{(k+1)-1}\, e^{-t}\, dt$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

• Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tel que $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{r} a_k\, t^k\, e^{-t}\, dt$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } R \text{ de } \mathbb{R}[X], \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} R(t)\, e^{-t}\, dt \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\, e^{-t}\, dt$ *en montrant que* $\left|R(t)\, e^{-t}\right| \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *par croissance comparée.*

2 • Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$P\,Q$ appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (PQ)(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge. Ainsi $< P, Q >$ existe.

Ainsi $< .,. >$ est une application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$< \lambda P + Q, R >= \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(\lambda P(t)\, R(t) + Q(t)\, R(t)\big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

$$< \lambda P + Q, R >= \int_0^{+\infty} \left(\lambda P(t)\, R(t)\, e^{-t} + Q(t)\, R(t)\, e^{-t}\right) \mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q, R) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^3$, $< \lambda P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

• Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)\, P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t =< Q, P >$.

$\forall (P, Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$, $< P, Q >=< Q, P >$. $< .,. >$ est symétrique.

• Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\big(P(t)\big)^2 e^{-t} \geqslant 0$ et $0 \leqslant +\infty$! donc $< P, P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $< P, P > \geqslant 0$. $< .,. >$ est positive.

• Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $< P, P >= 0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

▼ $t \to \big(P(t)\big)^2 e^{-t}$ est positive sur $[0, +\infty[$.

▼ $t \to \big(P(t)\big)^2 e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

▼ $0 \neq +\infty$!

Alors $t \to \big(P(t)\big)^2 e^{-t}$ est nulle sur $[0, +\infty[$. Comme $t \to e^{-t}$ ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$: $\forall t \in [0, +\infty[$, $\big(P(t)\big)^2 = 0$.

Ainsi $\forall t \in [0, +\infty[$, $P(t) = 0$. P admet alors une infinité de zéros donc $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $< P, P > \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. $< .,. >$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

EXERCICE 3

Exercice | S | Par ♡ | **Toujours un produit scalaire usuel D'après Lyon 2008.**

▶ *Basique et bon entraînement*

On note E l'ensemble des applications u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(x)\right)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note F l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (que l'on confondra avec $\mathbb{R}[X]$).

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on note F_n l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n (que l'on confondra avec $\mathbb{R}_n[X]$).

Q1. Montrer que $\forall(\alpha,\beta)\in[0,+\infty[^2,\ \alpha\,\beta \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

Q2. En déduire que si u et v sont deux éléments de E, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.\,|\,.)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (u,v) d'éléments de E associe $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Q3. a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Montrer que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

Q4. Montrer que F est contenu dans E.

Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

---

1. Soient α et β deux réels quelconques ! $\alpha^2+\beta^2-2\,\alpha\,\beta=(\alpha-\beta)^2\geqslant 0$, donc $\alpha^2+\beta^2\geqslant 2\,\alpha\,\beta$.

En divisant par 2 il vient $\alpha\,\beta\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels (positifs ou nuls)} : \alpha\,\beta\leqslant\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right).}$$

$$\boxed{\text{Dans toute la suite } w \text{ est l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par} : \forall x\in\mathbb{R},\ w(x)=e^{-x^2} \text{ (c'est dans II...)}}$$

2. u, v et w sont continues sur $\mathbb{R}$ donc le produit $u\,v\,w$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus la question précédente donne :

$\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant|u(x)\,v(x)|=|u(x)|\,|v(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(|u(x)|^2+|v(x)|^2\right)=\dfrac{1}{2}\left((u(x))^2+(v(x))^2\right)$.

En remarquant que w est positive sur $\mathbb{R}$ on obtient :

$\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant|u(x)\,v(x)\,w(x)|=|u(x)|\,|v(x)|\,w(x)\leqslant\dfrac{1}{2}\left((u(x))^2+(v(x))^2\right)w(x)$ ou encore :

$\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant|u(x)\,v(x)\,w(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}\,(u(x))^2\,w(x)+\dfrac{1}{2}\,(v(x))^2\,w(x)\quad(*)$.

De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u(x)\right)^2 w(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v(x)\right)^2 w(x)\,\mathrm{d}x$ convergent car u et v sont des éléments de E.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,(u(x))^2\,w(x)+\frac{1}{2}\,(v(x))^2\,w(x)\right)\mathrm{d}x$ converge.

$(*)$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors (en deux temps...) la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)\,v(x)\,w(x)|\,\mathrm{d}x$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, v(x)\, w(x)\, dx$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ et } v \text{ sont deux éléments de } E,\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, v(x)\, e^{-x^2}\, dx \text{ converge.}}$$

3. a. Notons E' le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et montrons que E est un sous-espace vectoriel de E'.

• Par définition de E, E est contenu dans E'.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(x) = 0$. θ est un élément de E' et de toute évidence $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\theta(x)\big)^2 e^{-x^2}\, dx$ converge.

θ est donc un élément de E et ainsi E n'est pas vide.

• Soit λ un réel. Soient u et v deux éléments de E. Montrons que $\lambda\, u + v$ est un élément de E.

$\lambda\, u + v$ est tout d'abord continue sur $\mathbb{R}$ car u et v sont continues sur $\mathbb{R}$.

Observons que $(\lambda\, u + v)^2\, w = \lambda^2\, u^2\, w + 2\, \lambda\, u\, v\, w + v^2\, w$.

De plus les trois intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 w(x)\, dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(v(x)\big)^2 w(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, v(x)\, w(x)\, dx$

convergent d'après la définition de E et la question précédente.

Alors par combinaison linéaire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\lambda\, u(x) + v(x)\big)^2 w(x)\, dx$ converge.

Ceci achève de montrer que $\lambda\, u + v$ appartient à E.

Ceci achève aussi de montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'.

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

b. • Notons d'abord que si u et v sont deux éléments de E, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, v(x)\, e^{-x^2}\, dx$ converge donc $(u \,|\, v)$ est un réel !

• Soient λ un réel. Soient u, v et t trois éléments de E.

$$(\lambda\, u + v \,|\, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda\, u + v)(x)\, t(x)\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\lambda\, u(x)\, t(x)\, e^{-x^2} + v(x)\, t(x)\, e^{-x^2}\Big)\, dx.$$

Alors $\displaystyle(\lambda\, u + v \,|\, t) = \lambda \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, t(x)\, e^{-x^2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, t(x)\, e^{-x^2}\, dx = \lambda\, (u \,|\, t) + (v \,|\, t)$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u, v, t) \in E^3,\ (\lambda\, u + v \,|\, t) = \lambda\, (u \,|\, t) + (v \,|\, t)$.

• $\displaystyle\forall (u, v) \in E^2,\ (u \,|\, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, v(x)\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, u(x)\, e^{-x^2}\, dx = (v \,|\, u)$.

• Soit u un élément de E. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2}\, dx$ converge.

Alors $\displaystyle(u \,|\, u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2}\, dx$ est un réel positif ou nul.

$\forall u \in E,\ (u \,|\, u) \geqslant 0$.

• Soit u un élément de E tel que $(u \,|\, u) = 0$. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2}\, dx = 0$.

◇ $u^2\, w$ est continue sur $\mathbb{R}$;

◇ $u^2\, w$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;

◇ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0$;

◇ $-\infty \neq +\infty$!

Alors plus de doute, $u^2\, w$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(x)\big)^2\, w(x) = 0$ et $w(x) \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(x)\big)^2 = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 0$. $u = 0_E$.

$\forall u \in E,\ (u\,|\,u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{(.\,|\,.) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

4. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrons que $x \to x^k$ appartient à E.

Tout d'abord $x \to x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(x^2\right)^{k+1}}{e^{x^2}}\right) = 0$ par croissance comparée.

◇ $x \to \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$;

◇ $\left(x^k\right)^2 e^{-x^2} =_{x\to+\infty} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

◇ $\forall x \in [1,+\infty[,\ \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$;

◇ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

$x \to \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}$ étant paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge (et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$).

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge. Ce qui achève de montrer que $x \to x^k$ appartient à E.

Soit alors P un élément de F. Montrons que P appartient à E.

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et $r+1$ réels a_0, a_1, ..., a_r tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k$.

Or pour tout k dans $\mathbb{N}$, $x \to x^k$ appartient à E ; P est donc combinaison linéaire d'éléments de E. Comme E est un espace vectoriel, P appartient à E.

$$\boxed{F \text{ est contenu dans } E.}$$

R

EXERCICE 4

JFC

Exercice [S] **Un générateur de produits scalaires. Produits scalaires canoniques.**

Q1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

On pose : $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, $\forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$, $< x, y > = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

a) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

b) Montrer que $< .,. >$ est l'unique produit scalaire qui rend la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée.

Q2. Préciser ce produit scalaire dans les cas suivants.

a) $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. b) $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. d) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q1 a) * $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est clairement une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. (1)

* Soient $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, $z = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k$ trois éléments de E et soit λ un réel.

$\langle x, \lambda y + z \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k e_k + \sum_{k=1}^{n} z_k e_k \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} (\lambda y_k + z_k) e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k (\lambda y_k + z_k)$.

$\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} x_k z_k = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

$\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$. (2)

* Soient $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ deux éléments de E.

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \langle y, x \rangle$.

$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. (3)

* Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ un élément de E.

$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$.

$\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$. (4)

* Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ un élément de E tel que $\langle x, x \rangle = 0$.

Alors $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k^2 \geqslant 0$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k^2 = 0$ ou $x_k = 0$. $x = 0_E$.

$\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$. (5).

Les cinq points précédents suffisent pour dire que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

b) Notons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée dans l'espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$.

soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ les coordonnées de e_i et e_j dans la base $\mathcal{B}$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \underset{\uparrow}{=} \beta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

. donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

supposons que φ soit un second produit scalaire tel que $\mathcal{B}$ soit une base orthonormée de (E, φ). Soient $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ deux éléments de E.

Le cours indique alors que $\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée dans (E, φ).

donc $\varphi(x,y) = \langle x, y \rangle$ et ceci pour tout couple (x,y) d'éléments de E.

donc $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'unique produit scalaire de E qui rend la base $\mathcal{B}$ orthonormée.

Q2 a) $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de E.

Comme $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

b) $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Comme $X = \sum_{k=1}^{n} x_k E_k$ et $Y = \sum_{k=1}^{n} y_k E_k$: $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui qui est situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1. $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de E.

$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$ et $B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} b_{i,j} E_{i,j}$ donc $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j}$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique.

Exercice .. Montrer que $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = tr({}^tAB)$.

d) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, $\forall Q = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell$, $\langle P, Q \rangle = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell b_\ell$!

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ est encore le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque .. On aurait pu aussi traiter le cas $E = \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

(R)

EXERCICE 5

JFC

Exercice | S | **Produit scalaire.**

E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

Rappel *si a et b sont deux réels :* $(a+b)^2 \leqslant 2a^2+2b^2$

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

Q2. Si $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(u,v)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$.

Montrer que c'est un produit scalaire sur E. On note $||.||$ la norme associé.

En plus Q3. A tout élément $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E, on associe la suite $f(u)=(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$v_0=0 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=u_{n-1}.$$

a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme f de E.

b) Montrer que : $\forall u\in E,\ ||f(u)||=||u||$.

c) Montrer que f n'est pas surjectif. Est-il injectif ?

Q1 Soit E' l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de E'.

* $E \subset E'$.
* La suite nulle de E' appartient à E car la série de terme général 0^2 converge.

Ainsi E n'est pas vide.

* Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$\forall n\in\mathbb{N},\ (\lambda u_n+v_n)^2 \leqslant 2(\lambda u_n)^2+2(v_n)^2 = 2\lambda^2u_n^2+2v_n^2$.

→ $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant(\lambda u_n+v_n)^2\leqslant 2\lambda^2u_n^2+2v_n^2$

→ u et v sont dans E donc la série de terme général $2\lambda^2u_n^2+2v_n^2$ est convergente comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $(\lambda u_n+v_n)^2$ converge.

Ceci suffit pour dire que $\lambda u+v=(\lambda u_n+v_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à E.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(u,v)\in E^2,\ \lambda u+v\in E$

ceci achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'.

Ainsi <u>E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

Q2 * Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ et $v=(v_n)_{n\geq 0}$ deux éléments de E.

Montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ existe.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq |u_n v_n| = \frac{1}{2}\, 2|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$.

De plus les séries de termes généraux u_n^2 et v_n^2 convergent. Alors, par combinaison linéaire, la série de terme général $\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|u_n v_n|$ converge.

La série de terme général $u_n v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ existe.

<u>φ est bien une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.</u>

* Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\geq 0}$, $v=(v_n)_{n\geq 0}$, $w=(w_n)_{n\geq 0}$ trois éléments de E

$\varphi(\lambda u+v, w) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+v_n)w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n w_n + v_n w_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n$ <u>CAR</u>

toutes les séries convergent. Donc $\varphi(\lambda u+v,w) = \lambda\varphi(u,w)+\varphi(v,w)$.

<u>$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (u,v,w)\in E^3$, $\varphi(\lambda u+v,w) = \lambda\varphi(u,w)+\varphi(v,w)$.</u>

* Soient $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$\varphi(u,v)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = \varphi(v,u)$.

$\forall (u,v)\in E^2,\ \varphi(u,v)=\varphi(v,u)$.

* Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2\geqslant 0$. $\varphi(u,u)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant 0$.

$\forall u\in E,\ \varphi(u,u)\geqslant 0$.

* Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E tel que $\varphi(u,u)=0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2\geqslant 0$. Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2=0$. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=0$. $u=0_E$

$\forall u\in E,\ \varphi(u,u)=0 \Rightarrow u=0_E$.

Ceci achève de montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Q3 a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$\lambda u+v=(\lambda u_n+v_n)_{n\geqslant 0}$. Posons $f(u)=(u'_n)_{n\geqslant 0}$, $f(v)=(v'_n)_{n\geqslant 0}$ et

$f(\lambda u+v)=(w'_n)_{n\geqslant 0}$.

$\rightarrow w'_0=0=\lambda.0+0=\lambda u'_0+v'_0$.

$\rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ w'_n=\lambda u_{n-1}+v_{n-1}=\lambda u'_n+v'_n$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ w'_n=\lambda u'_n+v'_n$. Ainsi $f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(u,v)\in E^2,\ f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$; f est linéaire.

Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E. Posons $f(u)=(u'_n)_{n\geqslant 0}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u'_n=u_{n-1}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (u'_n)^2=u_{n-1}^2$.

La série de terme général u_n^2 converge donc la série de terme général u_{n-1}^2 converge. Ainsi la série de terme général $(u'_n)^2$ converge.

Alors $f(u)=(u'_n)_{n\geqslant 0}$ est un élément de E. $\forall u\in E,\ f(u)\in E$.

Les deux points précédents montrent que f est un endomorphisme de E.

b) Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$. Posons $f(u)=(u'_n)_{n\geqslant 0}$.

$$\|f(u)\|^2=\varphi(f(u),f(u))=\sum_{n=0}^{+\infty}(u'_n)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}(u'_n)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n-1}^2=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2.$$

$\|f(u)\|^2=\varphi(u,u)=\|u\|^2$. Comme les normes des éléments de E sont dans $\mathbb{R}_+$: $\|f(u)\|=\|u\|$.

$\forall u\in E,\ \|f(u)\|=\|u\|.$

c) Notons que si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à l'image de f : $v_0=0$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{n+1}$. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Donc la série de terme général u_n^2 converge.

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$ et $u_0\neq 0$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}\notin \operatorname{Im} f$.

f n'est pas surjectif.

Soit $u\in \operatorname{Ker} f$. $f(u)=0_E$. Alors $\|u\|=\|f(u)\|=\|0_E\|=0$ donc $u=0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$. f est injectif.

R

Exercice E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f,g)\in E^2,\ <f,g>=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

PO Soit f un élément de E. f est continue sur le segment $[-1,1]$. $|f|$ également. Alors $|f|$ possède un maximum M sur le segment $[-1,1]$.

$t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

- Alors $\varphi_f : t\mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$\sqrt{1+t}\geqslant 1$ car $t\geqslant 0$

- $\forall t\in[0,1[,\ 0\leqslant|\varphi_f(t)|=\dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant M\times\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\times\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}\leqslant\dfrac{M}{(1-t)^{1/2}}$.

$\forall t\in[0,1[,\ 0\leqslant|\varphi_f(t)|\leqslant\dfrac{M}{(1-t)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{M}{(1-t)^{1/2}}\,dt$ converge car $1/2<1$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1|\varphi_f(t)|\,dt$ converge.

- $\forall t\in]-1,0],\ 0\leqslant|\varphi_f(t)|=\dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant\dfrac{M}{\sqrt{1+t}}=\dfrac{M}{(1+t)^{1/2}}$.

$\sqrt{1-t}\geqslant 1$ car $t\leqslant 0$

De plus $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{M}{(1+t)^{1/2}}\,dt$ converge car $1/2<1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_{-1}^{0}|\varphi_f(t)|\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^1|\varphi_f(t)|\,dt$ converge. $\displaystyle\int_{-1}^1\varphi_f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente. Pour tout f dans E, $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

Soient f et g deux éléments de E. Notons que fg appartient à E.

R

Donc $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge. $\langle f,g\rangle$ existe et appartient à $\mathbb{R}$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

P1 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(f,g,\ell)\in E^3$.

$$\langle\lambda f+g,\ell\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{(\lambda f+g)(t)\,\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{0}^{1}\left(\lambda\frac{f(t)\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{g(t)\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

$$\langle\lambda f+g,\ell\rangle=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}+\int_{-1}^{1}\frac{g(t)\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$ car toutes les intégrales convergent.

$\langle\lambda f+g,\ell\rangle=\lambda\langle f,\ell\rangle+\langle g,\ell\rangle$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(f,g,\ell)\in E^2,\ \langle\lambda f+g,\ell\rangle=\lambda\langle f,\ell\rangle+\langle g,\ell\rangle$.

P2 .. $\forall(f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\langle g,f\rangle$

$\forall(f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$.

P3 .. Soit $f\in E$. $\forall t\in]-1,1[,\ \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$. Comme $-1\leq 1$: $\langle f,f\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\geqslant 0$.

$\forall f\in E,\ \langle f,f\rangle\geqslant 0$.

P4. Soit $f\in E$. Supposons $\langle f,f\rangle=0$. Alors

1° $\int_{-1}^{1}\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0$

2° $t\mapsto\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$

3° $t\mapsto\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive sur $]-1,1[$

4° $-1\neq 1$

Dans ces conditions : $\forall t\in]-1,1[,\ \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0$. Alors $\forall t\in]-1,1[,\ f^2(t)=0$

R

Ainsi $\forall t \in]-1,1[$, $f(t)=0$. Cela ne suffit encore pas pour dire que $f=0_E$!!

f est continue en 1 et -1 et f est nulle sur $]-1,1[$.

Alors $f(1)=\lim_{t\to 1^-} f(t)=0$ et $f(-1)=\lim_{t\to -1^+} f(t)=0$. $f(1)=f(-1)=0$.

Alors $\forall t \in [-1,1]$, $f(t)=0$. $f=0_E$.

$\forall f \in E$, $\langle f,f \rangle =0 \Rightarrow f=0_E$.

P0, P1, P2, P3 et P4 permettent de dire que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

R

EXERCICE 7

JFC

Exercice | S | avec l'indication. **QSP HEC 2006 et QSP ESCP 2009.**

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs unitaires de E telle que $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$.

Q1. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E.

Q2. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Attention au départ rien n'indique que n est la dimension de E.

Indication : $||x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \ e_k||^2 = ...$

Q1 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. D'abord, par hypothèse $||e_i|| = 1$.

$||e_i||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = ||e_i||^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2$. $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$ et

$\forall k \in [\![1, n]\!] - \{i\},\ \langle e_i, e_k \rangle^2 \geq 0$.

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{i\},\ \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$ ou $\langle e_i, e_k \rangle = 0$.

ceci achève de montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E.

Q2 Remarque.. si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E : $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ ...

Soit $x \in E$. Montrons que $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Pour cela montrons que $||x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k||^2 = 0$

Posons $\alpha = ||x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k||^2$ et $u = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

$\alpha = ||x - u||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, u \rangle + ||u||^2$.

$\langle x, u \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = ||x||^2$. $\langle x, u \rangle = ||x||^2$

$||u||^2 = \langle u, u \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_i \rangle \langle e_k, e_i \rangle$.

Or $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée donc $\forall (k, i) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle e_k, e_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $||u||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = ||x||^2$. $||u||^2 = ||x||^2$

Donc $\alpha = ||x||^2 - 2\langle x, u \rangle + ||u||^2 = ||x||^2 - 2||x||^2 + ||x||^2 = 0$. $\alpha = 0$. $||x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k||^2 = 0$.

Donc $||x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k|| = 0$. $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = 0_E$. $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

$\forall x \in E$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice et orthonormée, donc libre, de E.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

R

EXERCICE 8

JFC

Exercice **PC** **QSP ESCP 2009 et QSP ESCP 2011.**

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille de cardinal n qui est la dimension de E. Pour montrer que cette famille est une base de E il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0_E$.

$0 = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_i \rangle$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $1 = \|e_k - e_i\|^2 = \|e_k\|^2 - 2\langle e_k, e_i \rangle + \|e_i\|^2 = 2 - 2\langle e_k, e_i \rangle$.

donc $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{i\}$, $\langle e_k, e_i \rangle = \frac{1}{2}[2 - 1] = \frac{1}{2}$.

Alors $0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_i \rangle = \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_i \rangle = \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\alpha_i$ et ceci pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Posons $S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -S$. $nS = -S$. $(n+1)S = 0$. Ainsi $S = 0$.

Par conséquent $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -S = 0$.

ceci achève de montrer la liberté de $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Alors $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E.

R

EXERCICE 3

JFC

Exercice | S avec l'indiction **Une caractérisation des isométries vectorielles.**

S avec l'indication f est un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.

ii) $\forall x \in E,\ ||f(x)|| = ||x||$.

Indication : Utiliser une identité de polarisation.

Supposons i). $\forall x \in E,\ < f(x), f(x) > = < x, x >$

$\forall x \in E,\ ||f(x)||^2 = ||x||^2,\ ||f(x)|| \geqslant 0$ et $||x|| \geqslant 0$

Alors $\forall x \in E,\ ||f(x)|| = ||x||$.

Supposons ii). Soit $(x,y) \in E^2$.

$< f(x), f(y) > = \frac{1}{2}\left[||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2\right] = \frac{1}{2}\left[||f(x+y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2\right]$.

En appliquant ii) il vient :

$< f(x), f(y) > = \frac{1}{2}\left[||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right]$ donc $< f(x), f(y) > = < x, y >$.

Exercice .. f est une application de E dans E vérifiant i). Montrer que f est linéaire.

Indiction .. Montrer que $||f(\alpha x+y) - \alpha f(x) - f(y)||^2 = 0$.

R

EXERCICE 10

JFC

Exercice | S | avec l'indication **Une caractérisation des endomorphismes antisymétriques.**

f est un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$.

ii) $\forall x \in E,\ < f(x), x >= 0$.

Indication : $< f(x+y), x+y >= \ldots$

Supposons i) Soit $x \in E$. $< f(x), x > = - < x, f(x) >$ donc $2 < f(x), x > = 0$.

Alors $< f(x), x > = 0$.

Supposons ii) Soit $(x,y) \in E^2$.

$$0 \underset{ii)}{=} < f(x+y), x+y > = < f(x)+f(y), x+y > = \underbrace{< f(x), x >}_{=0\ ii)} + < f(x), y > + < f(y), x > + \underbrace{< f(y), y >}_{=0\ ii)}.$$

Alors $< f(x), y > + < f(y), x > = 0$ donc $< f(x), y > = - < x, f(y) >$.

EXERCICE

JFC

Exercice | S | **ECRICOME 97**

▶ *Basique et bon entraînement*

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note Id_E l'application identique de E dans lui-même.

Lorsque x et y sont deux vecteurs de E, le produit scalaire de x par y s'écrit $< x, y >$ et $||x||$ représente la norme de x.

Quand u est un vecteur *non nul* de E, on définit l'application φ_u de E dans lui-même par

$$\forall x \in E \quad \varphi_u(x) = 2\frac{< x, u >}{< u, u >}u - x$$

Dans Q1, Q2, Q3 et Q4, u est un vecteur non nul de E.

Q1 Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{Id}_E$).

Q2 Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u associé à une valeur propre que l'on précisera.

Q3 Établir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ < \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) >=< x_1, x_2 >$.

En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que $\forall x \in E,\ ||\varphi_u(x)|| = ||x||$.

Q4 On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

a) Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

b) φ_u est-il diagonalisable ?

c) t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu}.

Q5 *Etude d'une réciproque.* On suppose que ψ est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant

$$\forall y \in \Delta \quad \psi(y) = y \quad \text{et} \quad \forall z \in \Delta^{\perp} \quad \psi(z) = -z$$

a) Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.

b) Établir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait : $\psi = \varphi_u$.

c) Soit $\mathcal{M} = (m_{i,j})$ la matrice de ψ dans une base orthonormé $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Soit $a_{i,j}$ (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$.

Montrer que $a_{i,j} =< \psi(e_i), \psi(e_j) >$. En déduire que : ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$. où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

ECRICOME 1997

EXERCICE 1

Q1 Soit u un élément non nul de E. φ_u est clairement une application de E dans E.
Montrons que φ_u est linéaire.

$\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi_u(\lambda x+y) = 2\,\dfrac{\langle \lambda x+y,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - \lambda x - y = 2\,\dfrac{\lambda\langle x,u\rangle+\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - \lambda x - y$

$\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi_u(\lambda x+y) = \lambda\left(\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - x\right) + \dfrac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - y = \lambda\varphi_u(x)+\varphi_u(y).$

Donc φ_u est un endomorphisme de E. Montrons que φ_u est involutif.

Soit $x\in E$. $\langle \varphi_u(x),u\rangle = \left\langle 2\,\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - x, u\right\rangle = 2\,\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,\langle u,u\rangle - \langle x,u\rangle = \langle x,u\rangle$

Par conséquent :

$\varphi_u(\varphi_u(x)) = 2\,\dfrac{\langle \varphi_u(x),u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - \varphi_u(x) = 2\,\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - \left(2\,\dfrac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - x\right) = x.$

$\forall x\in E, \ (\varphi_u\circ\varphi_u)(x) = x$. $\varphi_u\circ\varphi_u = id_E$. $\underline{\underline{\varphi_u \text{ est un endomorphisme involutif de } E.}}$

Q2 Soit u un élément non nul de E. $\varphi_u(u) = 2\,\dfrac{\langle u,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - u = u$

$\underline{\underline{u \neq 0_E \text{ et } \varphi_u(u) = u}}$. $\underline{\underline{u \text{ est un vecteur propre de } \varphi_u \text{ associé à la valeur propre } 1.}}$

Q3 u est un élément non nul de E. Soit $(x_1,x_2)\in E^2$.

$\langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = \left\langle 2\,\dfrac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - x_1 \ , \ 2\,\dfrac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - x_2\right\rangle$

$\langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = 2\,\dfrac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}\,2\,\dfrac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\,\langle u,u\rangle - 2\,\dfrac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}\,\langle u,x_2\rangle - 2\,\dfrac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\,\langle x_1,u\rangle + \langle x_1,x_2\rangle$

Donc $\langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = 4\,\dfrac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} - 2\,\dfrac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} - 2\,\dfrac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} + \langle x_1,x_2\rangle = \langle x_1,x_2\rangle$

$\underline{\underline{\forall (x_1,x_2)\in E^2, \ \langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle.}}$

$\forall x\in E, \ \|\varphi_u(x)\| = \sqrt{\langle \varphi_u(x),\varphi_u(x)\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\|$. $\underline{\underline{\forall x\in E, \ \|\varphi_u(x)\| = \|x\|.}}$

Q4 a) $u \in E$ et $u \neq 0_E$. Soit x un élément de E.

$$\varphi_u(x) = -x \iff 2\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u = 0_E \underset{u\neq 0_E}{\iff} \langle x,u\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Vect}(u))^{\perp} \iff x \in \mathcal{D}_u^{\perp} = \mathcal{H}_u$$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi_u + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{H}_u$. Notons que $\mathcal{H}_u \neq \{0_E\}$ car $\dim \mathcal{H}_u = n-1 \geq 1$.

$\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

b) $E = \mathcal{D}_u \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_u$. Si $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathcal{H}_u$ alors

1°. $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base de E

2°. les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de φ_u car $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathcal{D}_u = \mathrm{Vect}(u)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_u + \mathrm{Id}_E)$.

$\mathcal{B}$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de φ_u ; φ_u est diagonalisable.

c) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. $\forall x \in E$, $\varphi_{tu}(x) = 2\frac{\langle x,tu\rangle}{\langle tu,tu\rangle}tu - x = 2\frac{t^2}{t^2}\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x = \varphi_u(x)$.

$\forall x \in E$, $\varphi_{tu}(x) = \varphi_u(x)$. $\varphi_{tu} = \varphi_u$.

Remarque. Ne nous cachons pas que φ_u est la symétrie orthogonale de base la droite $\mathcal{D}_u$.

Q5 ψ est la symétrie orthogonale de base Δ !

a) Soit $x \in E$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x = y+z$.

$\psi(x) = \psi(y+z) = \psi(y) + \psi(z) = y - z = y + (-z)$.

$y \in \Delta$ et $-z \in \Delta^{\perp}$ donc $\psi(\psi(x)) = \psi(y+(-z)) = \psi(y) + \psi(-z) = y - (-z) = y + z = x$.

$\forall x \in E$, $\psi(\psi(x)) = x$. $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. ψ est involutif.

Soit $(x,x') \in E^2$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x = y+z$ et $\exists!(y',z') \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x' = y'+z'$.

$\langle \psi(x), \psi(x')\rangle = \langle y-z, y'-z'\rangle = \langle y,y'\rangle - \langle z,y'\rangle - \langle y,z'\rangle + \langle z,z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle z,z'\rangle$

$\langle x,x'\rangle = \langle y+z, y'+z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle y,z'\rangle + \langle z,y'\rangle + \langle z,z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle z,z'\rangle$ — z et y' sont orthogonaux et y et z' aussi.

$\forall (x,x') \in E^2$, $\langle \psi(x), \psi(x')\rangle = \langle x,x'\rangle$. ψ conserve le produit scalaire.

b) Soit u un élément non nul de $\underline{\Delta}$. $\Delta = \mathrm{Vect}(u)$.

Montrons que : $\psi = \varphi_u$

Soit $x \in E$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x = y+z$. $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$, $y = \alpha u$. $x = \alpha u + z$.

$$\varphi_u(x) = 2\,\frac{\langle \alpha u + z, u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - (\alpha u + z) = 2\,\underbrace{\frac{\alpha\langle u,u\rangle + \langle z,u\rangle}{\langle u,u\rangle}}_{=\alpha \text{ car } \langle z,u\rangle = 0}\,u - \alpha u - z = 2\alpha u - \alpha u - z = \alpha u - z$$

$\varphi_u(x) = \alpha u - z = y - z = \psi(y) + \psi(z) = \psi(y+z) = \psi(x)$.

$\forall x \in E$, $\varphi_u(x) = \psi(x)$. $\varphi_u = \psi$.

$\underline{\exists u \in \Delta - \{0_E\},\ \psi = \varphi_u}$.

c) Supposons que $M = (m_{ij})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, m_{kj}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, e_k , \sum_{l=1}^{n} m_{lj}\, e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{ki}\, m_{lj}\, \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}$$

donc

$$\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, m_{kj} = a_{ij}$$

$\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = \langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle}$.

Or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$. $\underline{{}^tM M = I_n}$.

Exercice.. Montrer que si la matrice $\widehat{M}$, dans la base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'un endomorphisme $\widehat{\varphi}$ de E vérifie ${}^t\widehat{M}\widehat{M} = I_n$ alors $\widehat{\varphi}$ conserve le produit scalaire et réciproquement.

R

EXERCICE 12

JFC

Exercice | PC | QSP HEC 2007 et HEC 2012

n appartient à $[\![2,+\infty[\![$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

f est un endomorphisme de E tel que : $\forall (x,y)\in E^2,\ <x,y>=0 \Rightarrow <f(x),f(y)>=0$.

Q1. Montrer que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$ (considérer e_i+e_j et e_i-e_j).

Q2. En déduire qu'il existe un réel c tel que : $\forall (x,y)\in E^2,\ <f(x),f(y)>=c<x,y>$.

Q3. Réciproque ?

Q1 $\langle e_i+e_j, e_i-e_j\rangle = \|e_i\|^2-\|e_j\|^2 = 1-1=0$.

Alors $0=\langle f(e_i+e_j), f(e_i-e_j)\rangle = \langle f(e_i)+f(e_j), f(e_i)-f(e_j)\rangle = \|f(e_i)\|^2-\|f(e_j)\|^2$.

Donc $\|f(e_i)\|^2=\|f(e_j)\|^2$, $\|f(e_i)\|\geqslant 0$, $\|f(e_j)\|\geqslant 0$. Alors $\|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$.

Q2 Posons $c=\|f(e_1)\|^2=\|f(e_2)\|^2=\dots=\|f(e_n)\|^2$.

Soient $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y=\sum_{j=1}^n y_j e_j$ deux éléments de E. $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

$\langle f(x),f(y)\rangle = \langle f(\sum_{i=1}^n x_i e_i), f(\sum_{j=1}^n y_j e_j)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n y_j f(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i),f(e_j)\rangle$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $i\neq j \Rightarrow \langle e_i,e_j\rangle=0$ donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j\Rightarrow \langle f(e_i),f(e_j)\rangle=0$.

Alors $\langle f(x),f(y)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle f(e_i),f(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \|f(e_i)\|^2 = c\sum_{i=1}^n x_i y_i = c\langle x,y\rangle$.

$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = c\langle x,y\rangle$ avec $c=\|f(e_1)\|^2=\|f(e_2)\|^2=\dots=\|f(e_n)\|^2$

Q3 Supposons que f est un endomorphisme de E tel qu'il existe c dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = c\langle x,y\rangle$. ⊛

Alors $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle x,y\rangle=0 \Rightarrow \langle f(x),f(y)\rangle = c\times 0=0$!

La réciproque est vraie.

Exercice.. Montrer que si f est une application de E dans E vérifiant ⊛ alors f est linéaire.

R

EXERCICE 13

JFC

Exercice | S | **Un peu de pratique.**

▶ *Bon entraînement pour les débutants en algèbre bilinéaire.*

Q1. $E=\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.

Trouver l'orthogonal du sous-espace vectoriel $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\mid x+2y-z=0 \text{ et } x-y+z+t=0\right\}$.

Q2. On considère les sous-espaces vectoriels $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(1)=0\}$, $G=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(1)=P(-1)=0\}$ et $H=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P''=0_E\}$ de $E=\mathbb{R}_3[X]$.

a) Trouver l'orthogonal de F (resp. de G) lorsque $E=\mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire canonique.

b) Trouver l'orthogonal de H lorsque $E=\mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$\forall(P,Q)\in E,\ <P,Q>=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. $X\in F\iff\begin{cases}z=x+2y\\t=-x+y-z=-x+y-x-2y=-2x-y\end{cases}$.

$$F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+2y\\-2x-y\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right).$$

$$X\in F^\perp\iff\begin{cases}\left\langle X,\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle=0\\ \left\langle X,\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+z-2t=0\\y+2z-t=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-z+2t\\y=-2z+t\end{cases}.$$

$$F^\perp=\left\{\begin{pmatrix}-z+2t\\-2z+t\\z\\t\end{pmatrix}\in(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{z\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix};(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.\quad \underline{\underline{F^\perp=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}}.$$

Q2 a) Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$. $P\in F\iff P(1)=0\iff X-1$ divise $P\iff\exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P=(X-1)Q$

mieux $P\in F\iff\exists Q\in\underline{\underline{\mathbb{R}_2}}[X],\ P=(X-1)Q\iff\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ P=(X-1)(aX^2+bX+c)$.

$P\in F\iff\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ P=c(X-1)+b(X-1)X+a(X-1)X^2$.

Ainsi $F=\mathrm{Vect}(X-1,X^2-X,X^3-X^2)$.

Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d$.

$P\in F^\perp\iff<P,X-1>=<P,X^2-X>=<P,X^3-X^2>=0$

Or la base $(1,X,X^2,X^3)$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

Donc $P\in F^\perp\iff c-d=b-c=a-b=0\iff a=b=c=d=0$

$F^\perp=\{aX^3+aX^2+aX+1\ ;a\in\mathbb{R}\}$.

$\underline{\underline{F^\perp=\mathrm{Vect}(X^3+X^2+X+1)}}$. Retrouvons ce résultat plus rapidement.

R

Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d$.

$P\in F \Leftrightarrow P(1)=0 \Leftrightarrow a+b+c+d=0$. F est donc l'hyperplan (*) d'équation $1\times d+1\times c+1.b+1.a=0$ dans la base orthonormée $(1,X,X^2,X^3)$ donc $F^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par $1.1+1.X+1.X^2+1.X^3$ donc par X^3+X^2+X+1

<u>Remarque</u> .. Hyperplan ? Normal pour le noyau d'une forme linéaire non nulle, non ?

Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$.

$P\in G \Leftrightarrow P(1)=P(-1)=0 \Leftrightarrow (X-1)(X+1)$ divise $P \Leftrightarrow \exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P=(X-1)(X+1)Q$

$P\in G \Leftrightarrow \exists Q\in\mathbb{R}_1[X],\ P=(X-1)(X+1)Q \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P=(X-1)(X+1)(aX+b)$

$P\in G \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P=a(X-1)(X+1)X+b(X-1)(X+1)$.

$G=\mathrm{Vect}((X-1)(X+1),(X-1)(X+1)X)=\mathrm{Vect}(X^2-1,X^3-X)$.

Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{R}_3[X]$

$P\in G^\perp \Leftrightarrow \langle P,X^2-1\rangle=\langle P,X^3-X\rangle=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-d=0\\ a-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=b\\ c=a\end{cases}$

$G^\perp=\{aX^3+bX^2+aX+b\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\{a(X^3+X)+b(X^2+1)\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

$$\underline{\underline{G^\perp=\mathrm{Vect}(X^2+1,X^3+X)}}.$$

<u>b)</u> $\forall i\in[\![0,3]\!],\ \forall j\in[\![0,3]\!],\ \langle X^i,X^j\rangle=\int_0^{+\infty}t^i t^j e^{-t}\,dt=\Gamma(i+j+1)=(i+j)!$

<u>Remarque</u> .. $(1,X,X^2,X^3)$ n'est pas orthonormée ! Donc prudence.

Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$. $P\in H \Leftrightarrow P''=0 \Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P=aX+b$. $H=\mathrm{Vect}(1,X)=\mathbb{R}_1[X]$.

Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{R}_3[X]$. $P\in H^\perp \Leftrightarrow \langle P,1\rangle=\langle P,X\rangle=0$

$P\in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} a\langle X^3,1\rangle+b\langle X^2,1\rangle+c\langle X,1\rangle+d\langle 1,1\rangle=0\\ a\langle X^3,X\rangle+b\langle X^2,X\rangle+c\langle X,X\rangle+d\langle 1,X\rangle=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3!\,a+2!\,b+1!\,c+0!\,d=0\\ 4!\,a+3!\,b+2!\,c+1!\,d=0\end{cases}$

$P\in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+2b+c+d=0\\ 24a+6b+2c+d=0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} d=-6a-2b-c\\ 18a+4b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-18a-4b\\ d=-6a-2b+18a+4b=12a+2b\end{cases}$

$H^\perp=\{aX^3+bX^2-(18a+4b)X+12a+2b\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

$H^\perp=\{a(X^3-18X+12)+b(X^2-4X+2)\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

$$\underline{\underline{H^\perp=\mathrm{Vect}(X^2-4X+2,X^3-18X+12)}}.$$

R

EXERCICE 14

JFC

Exercice **Orthogonal de la somme de deux sous-espaces.**

F et G sont deux sous-espaces d'un espace préhilbertien E.

Q1. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Q2. On suppose ici que E est de dimension finie.

a) Utiliser Q1 pour montrer que : $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

b) En déduire que si F et G sont supplémentaires il en est de même pour $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$. Retrouver ce résultat directement.

Q1 • $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ et $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$.

Alors $\underline{(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}}$.

• Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit $z \in F+G$. $\exists (z_1, z_2) \in F \times G$, $z = z_1 + z_2$.

$\langle x, z \rangle = \langle x, z_1 \rangle + \langle x, z_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ car $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

$\forall z \in F+G$, $\langle x, z \rangle = 0$ donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

Alors $\underline{F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}}$. Finalement $\underline{\underline{(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}}}$.

Q2 a) $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E donc $(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp}$

Comme E est de dimension finie : $(F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp} = F \cap G$. Pour les mêmes raisons :

$(F \cap G)^{\perp} = ((F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$. $\underline{\underline{(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}}}$.

b) Supposons que F et G sont supplémentaires. Montrons qu'il en est de même pour $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

V1 $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp} = (\{0_E\})^{\perp} = E$ et $F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F+G)^{\perp} = E^{\perp} = \{0_E\}$.

Ainsi $\underline{\underline{E = F^{\perp} \oplus G^{\perp}}}$.

V2 • $\dim F^{\perp} + \dim G^{\perp} = \dim E - \dim F + \dim E - \dim G \overset{\dim F + \dim G = \dim E}{=} \dim E$

• Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. $\exists ! (x_1, x_2) \in F \times G$, $x = x_1 + x_2$ car $E = F \oplus G$.

$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, x_1 + x_2 \rangle = \langle x, x_1 \rangle + \langle x, x_2 \rangle = 0 + 0 = 0$. $\|x\|^2 = 0$. $\|x\| = 0$. $x = 0_E$

Donc $F^{\perp} \cap G^{\perp} = \{0_E\}$. car $\begin{cases} x \in F^{\perp} \text{ et } x_1 \in F \\ x \in G^{\perp} \text{ et } x_2 \in G \end{cases}$

On retrouve ainsi la supplémentarité de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ car $\dim E = \dim F^{\perp} + \dim G^{\perp}$, $F^{\perp} \cap G^{\perp} = \{0_E\}$... et E est de dimension finie.

R

Exercice **Un contre-exemple important.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\forall (f,g) \in E^2$, $< f, g > = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

On considère $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

Q1. Montrer rapidement que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E et que F est un sous-espace vectoriel de E.

Q2. Soit g un élément de $F^\perp$. On pose $\forall t \in [0,1]$, $g_1(t) = \begin{cases} 2tg(t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ g(t) & \text{si } t \in]1/2,1] \end{cases}$

Montrer que g_1 est dans F et en déduire que g est nulle. En déduire que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

Q3. Que dire de $F^{\perp\perp}$?

Q1 ▲ • Soit $(f,g) \in E^2$. $f \times g$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ existe.

$<.,.>$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(f,g,h) \in E^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$<\lambda f+g, h> = \int_0^1 (\lambda f+g)(t)h(t)\,dt = \int_0^1 (\lambda f(t)h(t) + g(t)h(t))\,dt = \lambda \int_0^1 f(t)h(t)\,dt + \int_0^1 g(t)h(t)\,dt$

$<\lambda f+g, h> = \lambda < f,h> + < g,h>$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g,h) \in E^3$, $<\lambda f+g,h> = \lambda <f,h> + <g,h>$.

• $\forall (f,g) \in E^2$, $<f,g> = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = <g,f>$.

$\forall (f,g) \in E^2$, $<f,g> = <g,f>$.

• Soit $f \in E$. $\forall t \in [0,1]$, $<f,f> = \int_0^1 (f(t))^2\,dt$, $\forall t \in [0,1], (f(t))^2 \geq 0$ et $0 \leq 1$.

Alors $<f,f> = \int_0^1 (f(t))^2\,dt \geq 0$.

$\forall f \in E, <f,f> \geq 0$.

• Soit $f \in E$. Supposons $<f,f> = 0$. Alors 1) f^2 est continue sur $[0,1]$
2) f^2 est positive sur $[0,1]$
3) $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$
4) $0 \neq 1$

dans ces conditions $\forall t \in [0,1], f^2(t) = 0$. Alors $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$. $f = 0_E$.

$\forall f \in E, <f,f> = 0 \Rightarrow f = 0_E$.

R

ce qui précède de montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

▲ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

- $F \subset E$
- $0_E \in F$ car $0_E(0) = 0$. Ainsi $F \neq \emptyset$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in F^2$. $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda . 0 + 0 = 0$ ($f \in F, g \in F$)

  Alors $\lambda f + g \in F$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in F^2, \lambda f + g \in F$.

ceci achève de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(Q2) a) $g \in F^{\perp}$. $t \mapsto t$ et g sont continues sur $[0,1]$. $t \mapsto 2t g(t)$ est continue

sur $[0,1]$. Alors g_1 est continue sur $[0,1/2]$ et $]1/2,1]$.

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}^+} g_1(t) = \lim_{t \to \frac{1}{2}^+} g(t) = g\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \times \tfrac{1}{2}\, g\left(\tfrac{1}{2}\right) = g_1(1/2).$$

(g est continue sur $[0,1]$)

Alors g_1 est continue à droite en $1/2$.

Finalement g_1 est continue sur $[0,1]$. De plus $g_1(0) = 2 \times 0 \times g(0) = 0$; $g_1(0) = 0$.

Alors $g_1 \in F$

Comme $g \in F^{\perp}$: $0 = \langle g_1 , g \rangle = \int_0^1 g_1(t) g(t)\,dt = \int_0^{1/2} 2t (g(t))^2\,dt + \int_{1/2}^1 (g(t))^2\,dt$.

$\forall t \in [0, \frac{1}{2}], 2t(g(t))^2 \geqslant 0$, $\forall t \in [\frac{1}{2}, 1], (g(t))^2 \geqslant 0$.

Alors $\int_0^{1/2} 2t(g(t))^2\,dt \geqslant 0$ et $\int_{1/2}^1 (g(t))^2\,dt \geqslant 0$ car $0 \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leqslant 1$.

Comme $\int_0^{1/2} 2t(g(t))^2\,dt + \int_{1/2}^1 (g(t))^2\,dt = 0$: $\int_0^{1/2} 2t(g(t))^2\,dt = 0$ et $\int_{1/2}^1 (g(t))^2\,dt = 0$.

1° $\int_0^{1/2} 2t(g(t))^2\,dt=0$ | 1°) $\int_{1/2}^{1}(g(t))^2\,dt=0$

2°) $t\mapsto 2t(g(t))^2$ est positive sur $[0,\frac{1}{2}]$ | 2°) $t\mapsto (g(t))^2$ est positive sur $[\frac{1}{2},1]$

3°) $t\mapsto 2t(g(t))^2$ est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$ | 3°) $t\mapsto (g(t))^2$ est continue sur $[\frac{1}{2},1]$

4°) $0\neq 1$ | 4°) $1/2\neq 1$

Alors $\forall t\in[0,\frac{1}{2}]$, $2t(g(t))^2=0$ et $\forall t\in[\frac{1}{2},1]$, $(g(t))^2=0$.

Donc $\forall t\in\,]0,1]$, $(g(t))^2=0$. $\forall t\in\,]0,1]$, $g(t)=0$.

Alors $g(0)=\lim_{t\to 0^+} g(t)=0$. [$g$ est nulle sur $]0,1]$]

Finalement $\underline{\underline{g=0_E}}$. Alors $\underline{\underline{F^{\perp}=\{0_E\}}}$.

Ainsi $F+F^{\perp}=F$. Or F est strictement contenu dans E (la fonction h définie sur $[0,1]$ par $\forall t\in[0,1]$, $h(t)=1$ appartient à E mais pas à F).

<u>F et $F^{\perp}$ ne sont pas supplémentaires.</u>

Q3 $F^{\perp}=\{0_E\}$ donc $\underline{\underline{F^{\perp\perp}=E}}$.

Ainsi $\underline{\underline{F\neq F^{\perp\perp}}}$.

R

EXERCICE 16

JFC

Exercice 1 PC **$F^\perp$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F en dimension infinie again**

$E = \mathbb{R}[X]$. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{\mathrm{Min}(p,q)} a_k b_k$.

Q1. Montrer rapidement que φ est un produit scalaire sur E

Q2. Montrer que $(X^k)_{k\geqslant 0}$ est une famille orthonormée de E.

Q3. $F = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

a) Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E.

b) Montrer que $F^\perp = \mathbb{R}_0[X]$ et que $G^\perp = \{0_E\}$.

F et $F^\perp$ sont-ils supplémentaires ? Même question pour G et $G^\perp$.

c) Comparer F et $F^{\perp\perp}$ puis G et $G^{\perp\perp}$.

Q1 Preuve rapide. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q, R) \in E^3$. $\exists \delta \in \mathbb{N}$, $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_\delta[X])^3$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_\delta) \in \mathbb{R}^{\delta+1}$, $\exists (b_0, b_1, \dots, b_\delta) \in \mathbb{R}^{\delta+1}$, $\exists (c_0, c_1, \dots, c_\delta) \in \mathbb{R}^{\delta+1}$, $P = \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell X^\ell$, $Q = \sum_{\ell=0}^{\delta} b_\ell X^\ell$ et $R = \sum_{\ell=0}^{\delta} c_\ell X^\ell$.

Notons que $\lambda Q + R = \sum_{\ell=0}^{\delta} (\lambda b_\ell + c_\ell) X^\ell$

- $\varphi(P, \lambda Q + R) = \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell(\lambda b_\ell + c_\ell) = \lambda \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell b_\ell + \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell c_\ell = \lambda \varphi(P, Q) + \varphi(P, R)$.
- $\varphi(P, Q) = \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell b_\ell = \sum_{\ell=0}^{\delta} b_\ell a_\ell = \varphi(Q, P)$.
- $\varphi(P, P) = \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell^2 \geqslant 0$ $\quad \forall \ell \in [\![0, \delta]\!], a_\ell^2 \geqslant 0$
- $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell^2 = 0 \Rightarrow \forall \ell \in [\![0, \delta]\!], a_\ell^2 = 0 \Rightarrow \forall \ell \in [\![0, \delta]\!], a_\ell = 0 \Rightarrow P = 0_E$

Le tout suffit sans doute pour dire que φ est un produit scalaire sur E.

Q2 Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \leqslant j$.

Posons $\forall \ell \in [\![0, i]\!]$, $a_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\forall \ell \in [\![0, j]\!]$, $b_\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$X^i = \sum_{\ell=0}^{i} a_\ell X^\ell$, $X^j = \sum_{\ell=0}^{j} b_\ell X^\ell$ et $i \leqslant j$. $\varphi(X^i, X^j) = \sum_{\ell=0}^{i} a_\ell b_\ell = b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \leqslant j \Rightarrow \varphi(X^i, X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ceci suffit pour dire que $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de E.

Q3 a) Lemme ! Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall P \in E$, $f_a(P) = P(a)$.

f_a est une forme linéaire sur E.

R

▲ Preuve du lemme .. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P,\varphi) \in E^2$. $f_a(\lambda P+\varphi)=(\lambda P+\varphi)(a)=\lambda P(a)+\varphi(a)=\lambda f_a(P)+f_a(\varphi)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,\varphi)\in E^2, f_a(\lambda P+\varphi)=\lambda f_a(P)+f_a(\varphi)$. f_a est linéaire.

de plus f_a est une application de E dans $\mathbb{R}$. Ainsi f_a est une forme linéaire sur E ▼

Alors $\ker f_a$ est un sous-espace vectoriel de E. Or $F=\ker f_0$ et $G=\ker f_1$.

Ainsi <u>F et G sont deux sous-espaces vectoriel de E.</u>

b) * • Soit $P \in F^\perp$. $\exists r \in \mathbb{N}^*, \exists (a_0,a_1,\dots,a_r)\in \mathbb{R}^{r+1}, P=\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$. ← confat !

$\forall k \in \mathbb{N}^*, X^k \in F$. Alors $\forall k \in [\![1,r]\!]$, $0=\varphi(X^k,P)=\varphi(X^k,\sum_{i=0}^{k} a_i X^i)=1\times a_k$.

$\forall k\in[\![1,r]\!], a_k=0$. Alors $P=a_0 \in \mathbb{R}_0[X]$.

donc $F^\perp \subset \mathbb{R}_0[X]$

• Réciproquement soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, P=\lambda$. Montrons que $P \in F^\perp$.

Soit $\varphi \in F$. $\exists r \in \mathbb{N}^*_{\text{confat ecrire}}, \exists (b_0,b_1,\dots,b_r)\in\mathbb{R}^{r+1}, \varphi=\sum_{k=0}^{r} b_k X^k$.

$\varphi(0)=0$ donc $b_0=0$. Alors $\varphi(P,\varphi)=\varphi(\lambda, b_1X+b_2X^2+\dots+b_rX^r)=0$.

$\forall \varphi \in F, \varphi(P,\varphi)=0$. $P \in F^\perp$.

donc $\mathbb{R}_0[X] \subset F^\perp$. Finalement <u>$F^\perp=\mathbb{R}_0[X]$.</u>

* Soit $P \in G^\perp$. $\exists r \in \mathbb{N}^{*}$ (!), $\exists (c_0,c_1,\dots,c_r)\in\mathbb{R}^{r+1}, P=\sum_{k=0}^{r} c_k X^k$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $X^{i+1}-X^i \in G$ (car $1^{i+1}-1^i=0$!).

donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0=\varphi(P,X^{i+1}-X^i)=\varphi(P,X^{i+1})-\varphi(P,X^i)$.

$\forall i \in \mathbb{N}, \varphi(P,X^{i+1})=\varphi(P,X^i)$. Donc $\varphi(P,1)=\varphi(P,X)=\dots=\varphi(P,X^r)=\varphi(P,X^{r+1})$.

$\forall i \in [\![0,r]\!]$, $\varphi(P,X^i)=\varphi(\sum_{k=0}^{r} c_k X^k, X^i)=c_i$ et $\varphi(P,X^{r+1})=\varphi(\sum_{k=0}^{r} c_k X^k, X^{r+1})=0$

Alors $c_0=c_1=\dots=c_r=0$. $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ainsi <u>$G^\perp=\{0_{\mathbb{R}[X]}\}=\{0_E\}$.</u>

R

* Comme $G^\perp = \{0_E\}$: <u>G et $G^\perp$ sont supplémentaires.</u>

* Soit $P \in E$. Posons $P_1 = P - P(0)$ et $P_2 = P(0)$.

$P = P_1 + P_2$, $P_1(0) = 0$ et $P_2 \in \mathbb{R}_0[X]$.

Alors $P = P_1 + P_2$ avec $(P_1, P_2) \in F \times F^\perp$. $P \in F + F^\perp$.

donc $E \subset F + F^\perp$. Comme $F + F^\perp \subset E$: $E = F + F^\perp$.

De plus : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Ainsi $E = F \oplus F^\perp$.

<u>F et $F^\perp$ sont supplémentaires.</u>

c) * $G^{\perp\perp} = (G^\perp)^\perp = (\{0_E\})^\perp = E$. $G^{\perp\perp} = E$. Or $X \in E$ et $X \notin G$.

donc <u>G est strictement contenu dans $G^{\perp\perp}$.</u>

* Soit $P \in E$. $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$. Remarquons que $\alpha_0 = P(0)$.

$P \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow \forall Q \in \mathbb{R}_0[X], \varphi(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(P, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi\left(\sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k, \lambda\right) = 0$

$P \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0 \Leftrightarrow P \in F$.

Ainsi <u>$F^{\perp\perp} = F$.</u>

R.

EXERCICE 17

JFC

Exercice | S | Par ♡ **Un classique.**

Clairement à savoir faire.

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall (A,B) \in E^2$, $< A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$. On rappelle que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

$\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{A}_n$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{S}_n$.

---

* Montrons par analyse-synthèse que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.

Soit $M \in E$. Montrons que : $\exists ! (S,A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$, $M = S + A$.

Analyse / Unicité. SUPPOSONS que $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$

Alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$

donc $\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$. Ainsi $M + {}^tM = 2S$ et $M - {}^tM = 2A$.

Alors $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. d'où l'unicité de la décomposition.

Synthèse / Existence. POSONS $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$

. $S + A = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) = M$; $M = S + A$.

. ${}^tS = {}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$; $S \in \mathcal{S}_n$.

. ${}^tA = {}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$; $A \in \mathcal{S}_n$.

d'où l'existence de la décomposition

$\forall M \in E$, $\exists ! (S,A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$, $M = S + A$. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* Montrons que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont orthogonaux. Soit $(S,A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$.

$\mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}({}^tSA) = \langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \mathrm{tr}({}^tAS) = \mathrm{tr}(-AS) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA)$

classique...

Alors $2\,\mathrm{tr}(SA) = 0$. $\mathrm{tr}(SA) = 0$. Donc $\langle S, A \rangle = \mathrm{tr}({}^tSA) = \mathrm{tr}(SA) = 0$.

$\forall (S,A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$, $\langle S, A \rangle = 0$. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont orthogonaux.

$\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{S}_n$) est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$).

Remarque... Soit $M \in E$. $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ (resp. $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$) est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$). $d(M, \mathcal{S}_n) = \left\| \frac{1}{2}(M - {}^tM) \right\|$ et $d(M, \mathcal{A}_n) = \left\| \frac{1}{2}(M + {}^tM) \right\|$.

R

EXERCICE 18

JFC

Exercice S **Une propriété intéressante des endomorphismes symétriques (resp. antisymétriques).**

Soit F un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme symétrique (resp. antisymétrique) de E.

Montrer que si F est stable par f, $F^{\perp}$ est stable par f.

Traitons les deux cas en un en supposant que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \varepsilon \langle x, f(y)\rangle$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrons que $F^{\perp}$ est stable par f.

Soit $x \in F^{\perp}$. Montrons que $f(x) \in F^{\perp}$.

Soit $y \in F$. $\langle f(x), y\rangle = \varepsilon \langle x, f(y)\rangle$.

Or $f(y) \in F$ car F est stable par f donc $\langle f(x), y\rangle = \varepsilon \langle x, f(y)\rangle = 0$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x\in F^{\perp} \\ f(y)\in F\end{array}\right.$

Finalement $\forall y \in F$, $\langle f(x), y\rangle = 0$. $f(x) \in F^{\perp}$.

$\forall x \in F^{\perp}$, $f(x) \in F^{\perp}$. $F^{\perp}$ est stable par f.

R

EXERCICE 13

JFC

Exercice | S | **Utilisation de $E^{\perp} = \{0_E\}$. Encore une propriété intéressante des endomorphismes symétriques (resp. antisymétriques).**

▶ *Pratique usuelle et résultat qui peut être utile.*

Soit f un endomorphisme symétrique (resp. antisymétrique) de E. Montrer que $(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f$.

En déduire que si E est un espace vectoriel euclidien $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f$.

Traitons les deux cas en un en supposant que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \varepsilon \langle x, f(y)\rangle$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

Soit $x \in E$.

$x \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} \Leftrightarrow \forall y \in \operatorname{Im} f, \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall z \in E, \langle x, f(z)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall z \in E, \varepsilon \langle f(x), z\rangle = 0.$

$x \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} \Leftrightarrow \forall z \in E, \langle f(x), z\rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) \in E^{\perp} \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f.$

$(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f.$

Notons que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont orthogonaux donc $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

Supposons que E est de dimension finie.

$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp\perp} = ((\operatorname{Im} f)^{\perp})^{\perp} = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$. $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f.$

Notons qu'ici $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires et orthogonaux.

R

EXERCICE 20

JFC

Exercice **PC** **Utilisation de $\mathbf{E}^\perp = \{0_\mathbf{E}\}$.**

f et g sont deux applications de E dans E telles que $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, g(y) >$.

Montrer que f et g sont linéaires.

Soit $(x,y)\in E^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y)$ ou que $f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y)=0_E$. Pour cela montrons que $f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y)\in E^\perp$.

Soit $z\in E$

$<f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y),z> = <f(\alpha x+y),z> - \alpha<f(x),z> - <f(y),z>$.

$<f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y),z> = <\alpha x+y, f(z)> - \alpha<x,f(z)> - <y,f(z)>$

$<f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y),z> = <\alpha x+y-\alpha x-y, f(z)> = 0$ et ceci pour tout $z\in E$.

Alors $f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y)\in E^\perp$ et $E^\perp=\{0_E\}$.

Donc $f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y)=0_E$ ou $f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y)$.

$\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in E^2$, $f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y)$. f est linéaire.

$\forall (x,y)\in E^2$, $<g(x),y> = <y,g(x)> = <f(y),x> = <x,f(y)>$.

Alors ce qui précède montre que g est linéaire...