R

EXERCICE 14

J.F.C.

Exercice **D'après ECRICOME 2009 exercice 1 partie II**

▶ *Bon entraînement.*

On pose : $\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < M, N >= \operatorname{tr}({}^tMN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, n_{i,j}$

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\Gamma = \left\{\lambda - \mu\,;\,(\lambda,\mu) \in \left(\operatorname{Sp}(A)\right)^2\right\}$.

Φ_A est l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) = AM - MA$.

On se propose de montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\operatorname{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

1) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ < \Phi_A(M), N >=< M, \Phi_A(N) >$. En déduire que Φ_A est diagonalisable.

4) Soient X (resp. Y) un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (resp. μ). On pose alors $M_{X,Y} = X\,{}^tY$.

(a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ puis que ${}^tYA = \mu\,{}^tY$.

(b) Établir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)\, M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \operatorname{Sp}(\Phi_A)$.

5) Soit M un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.

(a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Montrer alors que $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

En déduire qu'il existe un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. On note μ la valeur propre de A associée à Z_0.

(b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression en fonction de α et μ.

(c) Conclure.

---

1. • Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM - MA$ est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Φ_A est donc une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de E et soit λ un réel.

$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda (AM - MA) + (AN - NA)$.

Donc $\Phi_A(\lambda M + N) = \lambda\, \Phi_A(M) + \Phi_A(M)$.

Ainsi Φ_A est linéaire.

$$\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. $\forall (M,N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \langle M \mid N\rangle = \operatorname{Tr}({}^tMN) \in \mathbb{R}\quad (0)$.

• Soient M, N et P trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

$\langle M \mid \lambda N + P\rangle = \operatorname{Tr}\left({}^tM(\lambda N + P)\right) = \operatorname{Tr}(\lambda\,{}^tMN + {}^tMP) = \lambda \operatorname{Tr}({}^tMN) + \operatorname{Tr}({}^tMP) = \lambda \langle M \mid N\rangle + \langle M \mid P\rangle$.

$\forall (M,N,P) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle M \mid \lambda N + P\rangle = \lambda \langle M \mid N\rangle + \langle M \mid P\rangle\quad (1)$.

• Soient $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle N \mid M\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{i,j}\, m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, n_{i,j} = \langle M \mid N\rangle$.

$\forall (M,N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \langle N \mid M\rangle = \langle M \mid N\rangle \quad (2).$

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle M \mid M\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}\, m_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geqslant 0.$

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle M \mid M\rangle \geqslant 0 \quad (3).$

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle M \mid M\rangle = 0$.

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 \geqslant 0$. Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0$. Donc M est la matrice nulle.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle M \mid M\rangle = 0 \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad (4).$

(0), (1), (2), (3), (4) suffisent pour dire que

$$\boxed{\text{l'application } (M,N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2 \to \langle M \mid N\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\langle \Phi_A(M) \mid N\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\Phi_A(M)N\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t(AM - MA)N\right) = \mathrm{Tr}\left(\left({}^t(AM) - {}^t(MA)\right)N\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t(AM)N - {}^t(MA)N\right).$

$\langle \Phi_A(M) \mid N\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tM\,{}^tAN - {}^tA^tMN\right) = \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}(A^tMN)$ car A est symétrique.

Notons que $\mathrm{Tr}(A^tMN) = \mathrm{Tr}({}^tMNA)$.

Alors $\langle \Phi_A(M) \mid N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}({}^tMNA) = \mathrm{Tr}\left({}^tMAN - {}^tMNA\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tM(AN - NA)\right) =< M, \Phi_A(M) >.$

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } M,\ N \text{ appartenant à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a} : \langle \Phi_A(M) \mid N\rangle = \langle M \mid \Phi_A(N)\rangle.}$$

Alors Φ_A est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

4. (a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$M_{X,Y} = X^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n) = (x_i\, y_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

X et Y sont des vecteurs propres de A. Ce sont donc des éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi on peut trouver deux éléments i_0 et j_0 de $[\![1,n]\!]$ tels que : $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0}\, y_{j_0}$ n'est pas nul. $M_{X,Y}$ ayant un coefficient non nul, ce n'est pas la matrice nulle.

$$\boxed{M_{X,Y} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

$AY = \mu Y$ donc ${}^t(AY) = {}^t(\mu Y)$. Alors ${}^tY\,{}^tA = \mu\,{}^tY$. Comme A est symétrique on obtient :

$$\boxed{{}^tYA = \mu\,{}^tY.}$$

(b) $\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX^tY - X^tYA = (\lambda X)\,{}^tY - X\,(\mu\,{}^tY) = \lambda X^tY - \mu X^tY = (\lambda - \mu)\, M_{X,Y}.$

$$\boxed{\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)\, M_{X,Y}.}$$

Comme $M_{X,Y}$ n'est pas la matrice nulle, $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A et $M_{X,Y}$ en est un vecteur propre associé.

Ce qui précède montre que si λ et μ sont deux valeurs propres quelconques de A, alors $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A. Comme $\Gamma = \left\{\lambda - \mu\,,\ (\lambda, \mu) \in \left(\operatorname{Sp} A\right)^2\right\}$, Γ est contenu dans le spectre de Φ_A.

$$\boxed{\Gamma \subset \operatorname{Sp} \Phi_A.}$$

5. (a) A est diagonalisable donc il existe une base $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Comme pour tout vecteur propre Z de A, $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\forall k \in [\![1, n]\!],\ MZ_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit U un élément quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

$$MU = M\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, Z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k\, MZ_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k\, 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi : $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MU = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ ME_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Cela signifie encore que pour tout élément j de $[\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de M est nulle. Donc M est la matrice nulle.

$$\boxed{\text{Si pour } \textbf{TOUT} \text{ vecteur propre } Z \text{ de } A,\ MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ alors } M \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

M est un vecteur propre de Φ_A donc M n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est alors impossible que : pour tout vecteur propre Z de A on ait $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe au moins un vecteur propre } Z_0 \text{ de } A \text{ tel que } MZ_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.}$$

(b) et (c) $\Phi_A(M) = \alpha\, M$ car M est un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.

Ceci s'écrit encore : $AM - MA = \alpha\, M$.

Alors $\alpha\, MZ_0 = (AM - MA)Z_0 = AMZ_0 - MAZ_0$.

Or $AZ_0 = \mu\, Z_0$. Ainsi : $\alpha\, MZ_0 = AMZ_0 - M(\mu\, Z_0) = AMZ_0 - \mu\, MZ_0$. Donc $AMZ_0 = (\alpha + \mu)\, MZ_0$.

Comme MZ_0 n'est pas nul(le), $\alpha + \mu$ est une valeur propre de A et MZ_0 en est un vecteur propre associé.

$$\boxed{MZ_0 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \alpha + \mu.}$$

Dès lors, posons : $\lambda = \alpha + \mu$. $\alpha = \lambda - \mu$ et, λ et μ sont deux valeurs propres de A. Par conséquent α est un élément de Γ.

Nous venons de montrer que toute valeur propre α de Φ_A appartient à Γ. Donc $\operatorname{Sp} \Phi_A \subset \Gamma$. Ceci et la question 4 permettent d'affirmer que :

$$\boxed{\operatorname{Sp} \Phi_A = \Gamma = \left\{\lambda - \mu\,,\ (\lambda, \mu) \in \left(\operatorname{Sp} A\right)^2\right\}.}$$

R

EXERCICE 15

Exercice **Un résultat de cours que l'on fait parfois redémontré.**

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Montrer que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, X_k \, {}^t X_k$.

Posons $B = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell X_\ell {}^t X_\ell$. Montrons que $S = B$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $BX_i = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell X_\ell \underbrace{{}^t X_\ell X_i}_{\in \mathbb{R}} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell ({}^t X_\ell X_i) X_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \langle X_\ell, X_i \rangle X_\ell = \alpha_i X_i$

$\langle X_\ell, X_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $BX_i = \alpha_i X_i = SX_i$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i X_i$.

$BX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i BX_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i SX_i = S\Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i X_i\Big) = SX$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BX = SX$.

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $BE_j = SE_j$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de B est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de S.

Donc $B = S$.

Ainsi $S = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell X_\ell {}^t X_\ell$.

R.

EXERCICE 16 contenu dans ESSEC 2004, 2007 et 2012 J.F.C.

Exercice **Décomposition spectrale d'une matrice symétrique**

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont ses valeurs propres distinctes.

Pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$ on note P_k la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale f_k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace propre SEP (S,λ_k) de S associé à la valeur propre λ_k.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k = I_n$ et que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, P_k$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

X a pour matrice X dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $f_k(X)$ a pour matrice $P_k X$ dans $\mathcal{B}_0$. Mais $f_k(X)$ a également pour matrice $f_k(X)$ dans $\mathcal{B}_0$.

Ainsi $f_k(X) = P_k X$ et ceci pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f_k(X) = P_k X$

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} SEP(S,\lambda_k)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists!\,(X_1, X_2, \dots, X_p) \in SEP(S,\lambda_1) \times SEP(S,\lambda_2) \times \dots \times SEP(S,\lambda_p)$, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. $f_k(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_k(X_i)$.

$\operatorname{Im} f_k = \operatorname{Ker}(f_k - \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}) = SEP(S,\lambda_k)$ et $\operatorname{Ker} f_k = (SEP(S,\lambda_k))^{\perp}$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Si $i = k$: $f_k(X_i) = X_i$ car $X_i = X_k \in SEP(S,\lambda_k)$. Supposons $i \neq k$.

Alors $SEP(S,\lambda_i)$ et $SEP(S,\lambda_k)$ sont orthogonaux donc $SEP(S,\lambda_i) \subset (SEP(S,\lambda_k))^{\perp}$.

Ainsi $f_k(X_i) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car $(SEP(S,\lambda_k))^{\perp} = \operatorname{Ker} f_k$.

Finalement : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ f_k(X_i) = \begin{cases} X_k & \text{si } i = k \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } i \neq k \end{cases}$.

Donc $f_k(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_k(X_i) = X_k$

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_k(X) = \sum_{k=1}^{p} X_k = X$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_k = \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k = I_n$

et ceci pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists!\,(X_1, X_2, \dots, X_p) \in SEP(S,\lambda_1) \times SEP(S,\lambda_2) \times \dots \times SEP(S,\lambda_p)$, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

$SX = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} S X_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(X) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i X = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ SX = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X$.

R.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $SE_j = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) E_j$

donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ la $j^{ième}$ colonne de S coïncide avec la $j^{ième}$ colonne de $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$

Alors $\underline{\underline{S = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i}}$.

R

EXERCICE 17

Exercice **Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

Q1. W est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont positifs ou nuls, telle que ${}^tWW = D^2$.

Pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, on note C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de W.

a) Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Montrer que ${}^tC_iC_i = d_i^2$ et calculer ${}^tC_iC_j$ pour $i \neq j$.

Montrer que si d_i est nul alors C_i est nulle.

b) On pose $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid d_i \neq 0\}$. Montrer que si I n'est pas vide, $\left(\dfrac{1}{d_i} C_i\right)_{i\in I}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ C_i = d_i\, F_i$.

c) Soit F la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $(F_1, F_2, \dots, F_n)$.

Dire pourquoi F est une matrice orthogonale et justifier l'égalité $W = FD$ (au pire "travailler avec des éléments génériques").

Q2. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXRX \geqslant 0$ ou $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles.

A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On pose $H = {}^tAA$. Montrer que H est un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telles que $\Delta = {}^tPHP = {}^t({}^tPAP)({}^tPAP)$.

En déduire qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telle que ${}^t({}^tPAP)({}^tPAP) = D^2$.

c) Utiliser Q1. pour montrer qu'il existe une matrice orthogonale F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PFD{}^tP = (PF{}^tP)(PD{}^tP).$$

En déduire qu'il existe une matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. C'est **la décomposition polaire** de A.

Q1 a) Posons $W = (w_{i,j})$ et ${}^tWW = (\gamma_{i,j})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_{k,i}w_{k,j} = (w_{1,i}\ w_{2,i}\ \cdots\ w_{n,i}) \begin{pmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n,j} \end{pmatrix} = {}^tC_iC_j$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{i,j} = {}^tC_iC_j$.

Or $(\gamma_{i,j}) = {}^tWW = D^2 = (\mathrm{Diag}(d_1,d_2,\dots,d_n))^2 = \mathrm{Diag}(d_1^2,d_2^2,\dots,d_n^2)$.

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = \gamma_{i,j} = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, ${}^tC_iC_i = d_i^2$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow {}^tC_iC_j = 0$.

R

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $d_i = 0$. Alors $\|C_i\|^2 = \langle C_i, C_i\rangle = {}^tC_i C_i = d_i^2 = 0$. Donc $\|C_i\| = 0$
Ainsi $C_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

si $i \in [\![1,n]\!]$ et si $d_i = 0$ alors C_i est nulle (... et réciproquement).

b) Supposons I non vide. Posons $\forall i \in I$, $F_i = \frac{1}{d_i} C_i$.

$\forall i \in I$, $\langle F_i, F_i\rangle = \frac{1}{d_i^2}\langle C_i, C_i\rangle = \frac{1}{d_i^2}\,{}^tC_i C_i = \frac{1}{d_i^2} \times d_i^2 = 1$. $\forall i \in I$, $\|F_i\|^2 = 1$ et $\|F_i\| \geq 0$

Ainsi $\forall i \in I$, $\|F_i\| = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle F_i, F_j\rangle = \frac{1}{d_i d_j}\langle C_i, C_j\rangle = \frac{1}{d_i d_j}\,{}^tC_i C_j \overset{i \neq j \text{ donc } {}^tC_i C_j = 0}{=} 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle F_i, F_j\rangle = 0$. Ceci achève de montrer que $(F_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors si I n'est pas vide, $\left(\frac{1}{d_i} C_i\right)_{i \in I}$ est une famille orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1er cas.. I est vide. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Soit $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ une base orthonormée quelconque de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0 \times F_i = d_i F_i$.

Donc si I est vide, il existe une base orthonormée $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = d_i F_i$.

2e cas.. I n'est pas vide. Posons $\forall i \in I$, $F_i = \frac{1}{d_i} C_i$.

$(F_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut donc la compléter en une base orthonormée $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in I$, $C_i = d_i\left(\frac{1}{d_i} C_i\right) = d_i F_i$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!] - I$ (s'il en existe un). Alors $d_i = 0$. Donc $C_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0 \cdot F_i = d_i F_i$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = d_i F_i$

Si I n'est pas vide il existe une base orthonormée $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = d_i F_i$.

c) La base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ sont deux bases orthonormées de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

donc la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(F_1, F_2, \dots, F_n)$

est orthogonale.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = WE_j$ et $FDE_j = F(d_j E_j) = d_j FE_j \underset{\uparrow}{=} d_j F_j = C_j$

F_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de F.

donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $WE_j = FDE_j$.

Alors pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de W coïncide avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de FD.

Ainsi $W = FD$.

Q2 a) ${}^tH = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = H$. H est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXHX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$

H est symétrique et $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXHX \geqslant 0$. Ainsi $H \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b) H est une matrice symétrique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ donc il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $\Delta = P^{-1}HP = {}^tPHP$.

H et Δ sont semblables donc $Sp\,H = Sp\,\Delta$. Comme H appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ ses valeurs propres sont positives ou nulles donc les coefficients de Δ sont positifs ou nuls puisque Δ est diagonale.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telles que $\Delta = {}^tPHP$.

On a encore $\Delta = {}^tP\,{}^tAAP \underset{\uparrow}{=} {}^tP\,{}^tAP\,{}^tPAP = {}^tP{}^tA\,{}^t({}^tP)\,{}^tPAP = {}^t({}^tPAP)\,{}^tPAP$.

$P{}^tP = {}^tPP = I_n$

$\Delta = {}^t({}^tPAP)\,{}^tPAP$.

$\Delta = \mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\delta_k \geqslant 0$. Posons $D = \mathrm{Diag}(\sqrt{\delta_1}, \sqrt{\delta_2}, \dots, \sqrt{\delta_n})$.

D est une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls et telle que $D^2 = \Delta = {}^t({}^tPAP)\,{}^tPAP$.

Il existe une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls et telle que ${}^t({}^tPAP)({}^tPAP)=D^2$.

c) Posons $W={}^tPAP$. ${}^tWW=D^2$ et D est une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls. Q1 montre alors l'existence d'une matrice orthogonale F de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $W=FD$.

Alors ${}^tPAP=FD$. $P^{-1}AP=FD$. $A=PFDP^{-1}=PFI_nD\,{}^tP=PF\,{}^tP\,P\,D\,{}^tP$.

Donc il existe une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls telle que $A=(PF\,{}^tP)(PD\,{}^tP)$. Posons $U=PF\,{}^tP$ et $S=PD\,{}^tP$. $A=US$.

- ${}^tUU={}^t(PF\,{}^tP)PF\,{}^tP=P\,{}^tF\,{}^tP\,P\,F\,{}^tP \underset{{}^tPP=I_n}{=} P\,{}^tF\,F\,{}^tP \underset{{}^tFF=I_n}{=} P\,{}^tP = I_n$. Donc U est orthogonale.
  P est orthogonale
- ${}^tS={}^t(PD\,{}^tP)=P\,{}^tD\,{}^tP=PD\,{}^tP=S$. S est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

$S={}^tPDP=P^{-1}DP$. S et D sont semblables. Ainsi $Sp\,S=Sp\,D$.

D est diagonale à coefficients positifs ou nuls donc $Sp\,D\subset\mathbb{R}_+$. Alors $Sp\,S\subset\mathbb{R}_+$.

S est symétrique à valeurs propres positives ou nulles donc $S\in S_n^+(\mathbb{R})$.

Donc il existe une matrice orthogonale U de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique S de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles telles que $A=US$.

R

EXERCICE 18

Exercice | S | **Matrice symétrique.**

Je regroupe quelques petits exercices de la même famille... Les questions sont indépendantes.

▶ *On peut sans doute faire Q2 et Q3.*

Q1. **QSP ESCP 2009**

Trouver l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^tAA^tAA = I_n$.

Q2. **Contenu dans ESCP 1997 2-15**

Trouver l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^tMM = I_n$.

Q3. **D'après oral ESCP 1998 2-23**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : ${}^tAA = A^tA$ et qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que A^p soit la matrice nulle.

Montrer que $S = {}^tAA$ est diagonalisable. Calculer S^p et en déduire que S est la matrice nulle puis que A est également la matrice nulle.

Q4. **Oral ESCP.**

Trouver l'ensemble des couples (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $\begin{cases} {}^tXYX = I_n \\ \quad \text{et} \\ {}^tYXY = I_n \end{cases}$.

Q1) Posons $\mathcal{S}=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A{}^tAA{}^tAA=I_n\}$

• Soit $A\in\mathcal{S}$. $A({}^tAA{}^tAA)=I_n$ donc A est inversible et $A^{-1}={}^tAA{}^tAA$.

${}^tA^{-1}={}^t({}^tAA{}^tAA)={}^tA\,{}^t({}^tA)\,{}^tA\,{}^t({}^tA)={}^tAA{}^tAA=A^{-1}$; A^{-1} est symétrique.

${}^tA={}^t((A^{-1})^{-1})=({}^tA^{-1})^{-1}\underset{\uparrow}{=}(A^{-1})^{-1}=A$. ${}^tA=A$. <u>A est symétrique</u>.

A^{-1} est symétrique.

Alors $A^5=A{}^tAA{}^tAA=I_n$. $A^5-I_n=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. X^5-1 est un polynôme annulateur de A dont le seul zéro réel est 1. $\mathrm{Sp}\,A=\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\subset\{1\}$.

Comme A est symétrique et à coefficients réels elle est diagonalisable. Elle admet donc une valeur propre au moins. Alors <u>$\mathrm{Sp}\,A=\{1\}$</u>.

A est diagonalisable donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=SEP(A,1)$.

$n=\dim SEP(A,1)=n-\mathrm{rg}(A-I_n)$. $\mathrm{rg}(A-I_n)=0$. $A-I_n=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $A=I_n$.

• $I_n \overset{!}{=} I_n{}^tI_nI_n{}^tI_nI_n$ donc $I_n\in\mathcal{S}$

Finalement $\mathcal{S}=\{I_n\}$. <u>$\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A{}^tAA{}^tAA=I_n\}=\{I_n\}$</u>.

R.

Q2 Idée ! Notons $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M\,{}^tM\,M = I_n\}$.

- Soit $M \in \mathcal{S}$. $M({}^tM\,M) = I_n$. Donc M est inversible et $M^{-1} = {}^tM\,M$.

  ${}^tM^{-1} = {}^t({}^tM\,M) = {}^tM\,({}^t({}^tM)) = {}^tM\,M = M^{-1}$; M^{-1} est symétrique.

  ${}^tM = {}^t((M^{-1})^{-1}) = ({}^tM^{-1})^{-1} = (M^{-1})^{-1} = M$. $\underline{M \text{ est symétrique}}$.

  Alors $M^3 = M\,M\,M = M\,{}^tM\,M = I_n$. $M^3 - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de M dont le seul zéro réel est 1. Alors $Sp\,M = Sp_{\mathbb{R}}\,M \subset \{1\}$.

  Comme M est diagonalisable $Sp\,M \neq \emptyset$ donc $\underline{Sp\,M = \{1\}}$.

  Comme M est diagonalisable $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(M,1)$.

  $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(M,1) = n - rg(M - I_n)$. $rg(M - I_n) = 0$. $M - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

  Donc $M = I_n$.

- $I_n\,{}^tI_n\,I_n = I_n^3 = I_n$; $I_n \in \mathcal{S}$.

Finalement $\mathcal{S} = \{I_n\}$. $\underline{\underline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M\,{}^tM\,M = I_n\} = \{I_n\}}}$.

Q3 • Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ {}^tA\,A^k = A^k\,{}^tA$.

→ c'est clair pour $k = 0$ car $A^0 = I_n$.

→ Supposons l'égalité vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$${}^tA\,A^{k+1} = {}^tA\,A^k\,A \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} A^k\,{}^tA\,A \underset{{}^tA\,A = A\,{}^tA}{=} A^k\,A\,{}^tA = A^{k+1}\,{}^tA.$$ Ceci achève la récurrence.

Donc $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ {}^tA\,A^k = A^k\,{}^tA}$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ S^k = ({}^tA)^k A^k$.

→ C'est clair pour $k = 1$ car $S = {}^tA\,A$.

→ Supposons la propriété vraie pour k élément de $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $k+1$.

$$S^{k+1} = S^k S \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} ({}^tA)^k A^k\,{}^tA\,A \underset{A^k\,{}^tA = {}^tA\,A^k}{=} ({}^tA)^k\,{}^tA\,A^k A = ({}^tA)^{k+1} A^{k+1}.$$ Ceci achève la récurrence

$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ S^k = ({}^tA)^k A^k}$.

Alors $S^p = ({}^tA)^p A^p = ({}^tA)^p\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $\underline{\underline{S^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}}$.

X^p est un polynôme annulateur de S dont 0 est la seule racine. Ainsi $Sp\, S \subset \{0\}$.

<u>S est symétrique</u> à coefficients réels donc S est diagonalisable. Alors $Sp\, S \neq \emptyset$

Finalement $Sp\, S = \{0\}$. $\quad {}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = S$

Comme S est diagonalisable : $SEP(S,0) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(S,0) = n - \operatorname{rg} S$. Donc $\operatorname{rg} S = 0$. $\underline{\underline{S = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}}$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tXSX = {}^tX\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}X = 0$.

Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| = 0$. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $AE_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est nulle.

Finalement <u><u>A est la matrice nulle.</u></u>

(Q4) Posons $\mathcal{S} = \{(X,Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mid {}^tXYX = I_n$ et ${}^tYXY = I_n\}$.

• Soit $(X,Y) \in \mathcal{S}$. ${}^tXYX = I_n$ et ${}^tYXY = I_n$.

Alors ${}^tXYX = I_n$ et $I_n = {}^tI_n = {}^t({}^tYXY) = {}^tY\,{}^tXY$.

Donc ${}^tXY$ est inversible et son inverse est à la fois X à la fois ${}^tY$. Alors $X = {}^tY$.

Donc $X = {}^tY$ et ${}^tX = {}^t({}^tY) = Y$. Alors $I_n = {}^tYXY = XX\,{}^tX$.

Donc X est inversible et $X^{-1} = X\,{}^tX$. Or ${}^t(X\,{}^tX) = {}^t({}^tX)\,{}^tX = X\,{}^tX$; $X\,{}^tX$ est symétrique.

Alors X^{-1} est symétrique. ${}^tX = {}^t((X^{-1})^{-1}) = ({}^tX^{-1})^{-1} = (X^{-1})^{-1} = X$. <u>$X$ est symétrique.</u>

Alors $Y = {}^tX = X$. Ainsi $I_n = {}^tXYX = XXX = X^3$. $X^3 - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors X admet un polynôme annulateur dont le seul zéro dans $\mathbb{R}$ est 1.

Donc $Sp\, X \subset \{1\}$ (X est symétrique et à coefficients réels donc ses valeurs propres sont réelles).

Mais $Sp\, X$ n'est pas vide car X est diagonalisable (X est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Finalement $Sp\, X = \{1\}$.

Comme X est diagonalisable, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(X,1)$.

$n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(X,1) = n - \operatorname{rg}(X - I_n)$. $\operatorname{rg}(X - I_n) = 0$. $X - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $X = I_n$. $Y = X = I_n$. $\underline{(X,Y) = (I_n, I_n)}$.

- ${}^tI_n I_n I_n = I_n^3 = I_n$ et ${}^tI_n I_n I_n = I_n^3 = I_n$!! Donc $(I_n, I_n) \in \mathcal{S}$.

Finalement $\underline{\underline{\mathcal{S} = \{(I_n, I_n)\}}}$.

$$\underline{\underline{\{(X,Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mid {}^tXYX = I_n \text{ et } {}^tYXY = I_n\} = \{(I_n, I_n)\}}}$$

R

EXERCICE 13

Exercice **Oral ESCP 2010 2.15**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On suppose que A est une matrice symétrique réelle.

Q1. Justifier l'existence d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $f(\varepsilon_k) = \lambda_k\, \varepsilon_k$.

Montrer que l'on peut supposer $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

Cette hypothèse est supposée réalisée dans la suite de cet exercice.

On note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Q2. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}^2$, puis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^2$.

Q3. a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \langle e_i, \varepsilon_j \rangle$.

b) Établir que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i) \rangle$ puis en déduire que : $a_{i,i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2$.

Q4. a) Montrer que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $a_{i,i} \leqslant \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2$.

b) En déduire que pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

- *Voir sur le même thème oral ESCP 2009 2.16.*

Q1 f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Il existe une base orthonormée $\hat{\mathcal{B}} = (\hat\varepsilon_1, \hat\varepsilon_2, \dots, \hat\varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$ respectivement associés aux valeurs propres $\hat\lambda_1, \hat\lambda_2, \dots, \hat\lambda_n$.

En ordonnant les éléments de la suite $(\hat\lambda_1, \hat\lambda_2, \dots, \hat\lambda_n)$ dans l'ordre décroissant on définit une bijection σ de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ telle que $\hat\lambda_{\sigma(1)} \geqslant \hat\lambda_{\sigma(2)} \geqslant \cdots \geqslant \hat\lambda_{\sigma(n)}$.

Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_k = \hat\varepsilon_{\sigma(k)}$ et $\lambda_k = \hat\lambda_{\sigma(k)}$.

1) $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$

2) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ε_k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k.

3) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \langle \hat\varepsilon_{\sigma(i)}, \hat\varepsilon_{\sigma(j)} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Or $\sigma(i) = \sigma(j) \Leftrightarrow i = j$ car σ est injective.

Donc $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est alors une famille orthonormée donc libre d'éléments de $\mathbb{R}^n$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}^n$. C'est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

R

Finalement $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f respectivement associée aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$.

Q2 P est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ (base canonique de $\mathbb{R}^n$) à la base orthonormée $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ donc P est une matrice orthogonale. ${}^tPP = I_n$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell,i}\, p_{\ell,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

En particulier $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (p_{\ell,j})^2 = 1$ ... ou $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$.

$P\,{}^tP = I_n$ donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell}\, p_{j,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

En particulier $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (p_{i,\ell})^2 = 1$ ... ou $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$

Q3 a) P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\, e_i$.

Or $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle e_i$.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ étant une base : $\forall j \in [\![1,n]\!], \forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_{i,j} = \langle e_i, \varepsilon_j \rangle$.

b) A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$ donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$.

Or $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, f(e_j) \rangle e_i$.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ étant une base : $\forall j \in [\![1,n]\!], \forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$.

En particulier $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i) \rangle$.

Posons $D = (d_{i,j}) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Or A est la matrice de f dans $\mathcal{B}_0$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

Ainsi $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$. Alors $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

R

$PD = \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} d_{\ell,j}\right) = \left(p_{i,j} d_{j,j}\right).$

Alors $PD\,{}^tP = \left(\sum_{\ell=1}^{n} (p_{i,\ell} d_{\ell,\ell} p_{j,\ell})\right)$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad a_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (p_{i,\ell} d_{\ell,\ell} p_{j,\ell}).$

En particulier $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} (p_{i,\ell})^2 d_{\ell,\ell}$. Mais $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ d_{\ell,\ell} = \lambda_\ell$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad a_{i,i} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell (p_{i,\ell})^2 \underset{\substack{4\\ a)}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell (\langle e_i, \varepsilon_\ell\rangle)^2.$

ce qui donne aussi $\underline{\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \;(\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2.}}$

(Q4) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$.

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas.. } \ell < n.}}$ $\quad a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 + \sum_{j=\ell+1}^{n} \lambda_j (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2.$

or $\forall j \in [\![\ell+1,n]\!],\ \lambda_j \leq \lambda_\ell$ et $(\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 \geqslant 0$.

Donc $a_{i,i} \leq \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 + \lambda_\ell \sum_{j=\ell+1}^{n} (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2.$

or $\sum_{j=\ell+1}^{n} (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 = \sum_{j=\ell+1}^{n} p_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 - \sum_{j=1}^{\ell} p_{i,j}^2 = 1 - \sum_{j=1}^{\ell} p_{i,j}^2 = 1 - \sum_{j=1}^{\ell} (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2.$

Donc $a_{i,i} \leq \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 + \lambda_\ell \left[1 - \sum_{j=1}^{\ell} (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2\right].$

Alors $a_{i,i} \leq \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2.$

$\underline{\underline{2^{ième}\text{ cas.. } \ell = n.}}$ $\quad a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2 + \lambda_n - \lambda_n$

$a_{i,i} = \lambda_n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (p_{i,j})^2 - \lambda_n = \lambda_n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (p_{i,j})^2 - \lambda_n \sum_{j=1}^{n} (p_{i,j})^2.$

Alors $a_{i,i} = \lambda_n + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_n)(p_{i,j})^2 = \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(p_{i,j})^2 \leq \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(p_{i,j})^2$!!

On a encore $a_{i,i} \leq \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(\langle e_i, \varepsilon_j\rangle)^2.$

R

$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall \ell \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} \leq \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(\langle e_i, \varepsilon_j \rangle)^2.$

b) Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} \leq \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(\langle e_i, \varepsilon_j \rangle)^2.$

En sommant il vient :

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_{i,i} \leq \ell \lambda_\ell + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell)(\langle e_i, \varepsilon_j \rangle)^2 = \ell \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} \left[(\lambda_j - \lambda_\ell) \sum_{i=1}^{\ell} (p_{i,j})^2 \right]$$

Or $\forall j \in [\![1,\ell]\!]$, $\lambda_j - \lambda_\ell \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{\ell} (p_{i,j})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (p_{i,j})^2 = 1$.

donc $\forall j \in [\![1,\ell]\!]$, $(\lambda_j - \lambda_\ell) \sum_{i=1}^{\ell} (p_{i,j})^2 \leq \lambda_j - \lambda_\ell$.

Alors $\sum_{i=1}^{\ell} a_{i,i} \leq \ell \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_\ell) = \ell \lambda_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j - \ell \lambda_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$.

Finalement $\sum_{i=1}^{\ell} a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ et ceci pour tout ℓ dans $[\![1,n]\!]$.

R

EXERCICE 20

Exercice **S** **Par ♡** **Encadrement de Rayleigh.**

► *Incontournable.*

• *Contenu dans Oral ESCP 2000 2-5, 2001 2.6, HEC 2006, ESSEC 2004, ESSEC 2005.*

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit α sa plus petite valeur propre et soit β sa plus grande valeur propre.

Q1 Montrer que :

$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha\,\|X\|^2 \leqslant {}^tXSX =< SX, X >\leqslant \beta\,\|X\|^2}$ ou que $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ \alpha \leqslant \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \beta}$.

Q2. Montrer que : $\displaystyle \underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Min}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \alpha$ et $\displaystyle \underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Max}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \beta$.

Q1. S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associée aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, V_k$ donc $SX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, SV_k = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \lambda_k\, V_k$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée : $\|X\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $< SX, X >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k\,\lambda_k)\, x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2$.

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha \leqslant \lambda_k \leqslant \beta$ et $x_k^2 \geqslant 0$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha\, x_k^2 \leqslant \lambda_k\, x_k^2 \leqslant \beta\, x_k^2$.

Ainsi $\alpha \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2 \leqslant \beta \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Ce qui donne : $\alpha\,\|X\|^2 \leqslant< SX, X >\leqslant \beta\,\|X\|^2$.

Supposons X non nul. Alors $\|X\|^2$ est un réel strictement positif.

Comme $< SX, X >= {}^tXSX$ et $\|X\|^2 = {}^tXX$, ${}^tXX$ est strictement positif et $\alpha \leqslant \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \beta$.

Q2. Soit V un vecteur propre associé à la valeur propre β.

V n'est pas nul et ${}^tVSV = {}^tV(\beta\, V) = \beta\, {}^tVV$ donc $\dfrac{{}^tVSV}{{}^tVV} = \beta$.

Alors V est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $\dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \dfrac{{}^tVSV}{{}^tVV}$.

Donc $\displaystyle \underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Max}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ existe et vaut β.

En considérant un vecteur propre de S associé à la valeur propre α on montre de même que $\displaystyle \underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\mathrm{Min}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ existe et vaut α.

R

EXERCICE 21 J.F.C.

Exercice | S | Par ♡ | **Caractérisation des matrices symétriques positives.**

▶ *Incontournable.*

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est positive.

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

• *Contenu dans oral ESCP 2009 2.10, 2009 2.16, 2011 2.19, problème 1 LYON 2012.*

• Supposons i') et montrons ii).

Soit λ une valeur propre de S. Soit X un vecteur propre associé.

$0 \leqslant {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, \|X\|^2$. Donc $\lambda\, \|X\|^2$ est positif ou nul.

Comme $\|X\|^2$ est strictement positif, puisque X n'est pas nul, la valeur propre λ est positive ou nulle.

Les valeurs propres de S sont positives ou nulles d'où ii).

• Supposons ii) et montrons i').

Soit $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associées aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k \text{ donc } SX = \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k\, SX_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k\, \alpha_k\, X_k\big).$$

$\mathcal{B}$ étant une base orthonormée : ${}^tXSX =< X, SX >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k\, \gamma_k\, \alpha_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k^2\, \alpha_k\big)$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \gamma_k^2 \geqslant 0$ et $\alpha_k \geqslant 0$ donc ${}^tXSX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k^2\, \alpha_k\big) \geqslant 0$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$. Donc i') est vérifiée.

EXERCICE 22

J.F.C.

Exercice | PC | **Caractérisation des matrices symétriques positives again.**

▶ *ii) ⇒ i') est incontournable.*

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est positive

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0.$

ii) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$

• Supposons i') et montrons ii).

S est une matrice symétrique à coefficients réels donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles ${}^tPSP = P^{-1}SP = D$.

Posons $D = \text{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. D est semblable à S donc les valeurs propres de D sont celles de S.

Ainsi $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \text{Sp}\, S$. Montrons que les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

Soit λ une valeur propre de S. Soit X un vecteur propre associé.

$0 \leqslant {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, ||X||^2$. Alors $\lambda\, ||X||^2$ est positif ou nul.

Comme $||X||^2$ est strictement positif, puisque X n'est pas nul, la valeur propre λ est positive ou nulle.

Donc les valeurs propres de S sont positives ou nulles. Alors α_1, α_2, ..., α_n sont des réels positifs ou nuls.

Posons $\Delta = \text{Diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. On a : $\Delta\, {}^t\Delta = \Delta^2 = D$.

Alors $S = PDP^{-1} = P\Delta\, {}^t\Delta\, {}^tP = P\Delta\, {}^t(P\Delta) = {}^t({}^t(P\Delta))\, {}^t(P\Delta)$. Posons $A = {}^t(P\Delta)$.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

• Supposons ii) et montrons i').

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXSX = {}^tX\, {}^tAAX = {}^t(AX)AX = ||AX||^2$. Ainsi ${}^tXSX \geqslant 0$.

Finalement : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0.$

EXERCICE 23

J.F.C.

Exercice | S | Par ♡ | **Caractérisation des matrices symétriques définies positives.**

▶ *Incontournable.*

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est définie positive.

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

• *Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-9, 2006 2.20, 2008 2.14, 2009 2.9, 2010 2.5, ESSEC 2007*

• Supposons i') et montrons ii).

Soit λ une valeur propre de S. Soit X un vecteur propre associé.

X n'est pas nul donc : $0 < {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, ||X||^2$. Donc $\lambda\, ||X||^2$ est strictement positif.

Comme $||X||^2$ est strictement positif, puisque X n'est pas nul, la valeur propre λ est strictement positive.

Les valeurs propres de S sont strictement positives d'où ii).

• Supposons ii) et montrons i').

Soit $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associées aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k$ donc $SX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k\, SX_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k\, \alpha_k\, X_k\big)$.

$\mathcal{B}$ étant une base orthonormée : ${}^tXSX = < X, SX > = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k\, \gamma_k\, \alpha_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k^2\, \alpha_k\big)$.

Or $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \gamma_k^2 \geqslant 0$ et $\alpha_k > 0$ donc ${}^tXSX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k^2\, \alpha_k\big) \geqslant 0$.

Supposons que ${}^tXSX$ est nul. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\gamma_k^2\, \alpha_k\big) = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \gamma_k^2\, \alpha_k \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \gamma_k^2\, \alpha_k = 0$ et $\alpha_k > 0$.

Par conséquent $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \gamma_k^2 = 0$. Ceci donne $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \gamma_k = 0$. Ainsi X est nul. Ceci contredit l'hypothèse de départ. Donc ${}^tXSX$ n'est pas nul. Finalement ${}^tXSX$ est strictement positif et ceci pour tout élément X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. i') est donc vérifiée.

EXERCICE 24

Exercice **PC** **Caractérisation des matrices symétriques définies positives again.**

▶ *ii) ⇒ i') est incontournable.*

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est définie positive.

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Il existe une matrice <u>inversible</u> A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

• Supposons i') et montrons ii).

S est une matrice symétrique à coefficients réels donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles ${}^tPSP = P^{-1}SP = D$.

Posons $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. D est semblable à S donc les valeurs propres de D sont celles de S.

Ainsi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \mathrm{Sp}\, S$. Montrons que les valeurs propres de S sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de S. Soit X un vecteur propre associé.

X n'est pas nul donc : $0 < {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, ||X||^2$. Donc $\lambda\, ||X||^2$ est strictement positif.

Comme $||X||^2$ est strictement positif, puisque X n'est pas nul, la valeur propre λ est strictement positive.

Donc les valeurs propres de S sont strictement positives. Alors α_1, α_2, ..., α_n sont des réels strictement positifs.

Posons $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On a : $\Delta^t\Delta = \Delta^2 = D$.

Alors $S = PDP^{-1} = P\Delta^t\Delta^tP = P\Delta^t(P\Delta) = {}^t({}^t(P\Delta))^t(P\Delta)$. Posons $A = {}^t(P\Delta)$.

Ainsi $S = {}^tAA$. Δ est inversible car elle est diagonale et sans zéro sur sa diagonale. P étant inversible $P\Delta$ l'est également et sa transposée aussi. $A = {}^t(P\Delta)$ est inversible.

Finalement $S = {}^tAA$ où A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Supposons ii) et montrons i').

Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXSX = {}^tX^tAAX = {}^t(AX)AX = ||AX||^2$. Ainsi ${}^tXSX \geqslant 0$.

Supposons que ${}^tXSX = 0$. Alors $||AX||^2 = 0$. Ainsi $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Comme A est inversible : $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ce qui n'est pas donc ${}^tXSX$ est strictement positif.

Finalement : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

R

EXERCICE 25

Exercice | PC | **Matrice symétrique définie positive. Matrice de Hilbert**

On considère la matrice $A = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est symétrique. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXAX > 0$ (on pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{i-1}\,t^{j-1}\,\mathrm{d}t$).

Ainsi A est une matrice symétrique définie positive.

• *Voir sur le sujet LYON 1997 Pb 1 et le très intéressant HEC I 2006. Contenu aussi dans Oral ESCP 2000 2-5.*

${}^tA = \left(\dfrac{1}{j+i-1}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = A$. ${}^tA = A$. $\underline{\underline{A \text{ est symétrique}}}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1} x_j$. ${}^tXAY = {}^tXY = \langle X, Y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \left(x_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1} x_j\right)\right)$.

${}^tXAX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \frac{1}{i+j-1}$. Notons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1}\,dt$.

${}^tXAX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1}\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j\, t^{i-1} t^{j-1}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right) dt$

donc $\underline{{}^tXAX = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 dt}$. $\forall t \in [0,1], \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 \geqslant 0$ et $0 \leqslant 1$ donc

$\underline{{}^tXAX = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0}$. Supposons que ${}^tXAX = 0$. Alors $P : t \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2$ est continue

et positive sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$. Comme $0 \neq 1$ (!) P est nulle sur $[0,1]$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 = 0$ donc $\forall t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} = 0$.

La fonction polynôme $t \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ admet une infinité de zéros, c'est donc la fonction

polynôme nulle. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ... ce qui n'est pas. Ainsi $\underline{{}^tXAX \neq 0}$

ceci achève de montrer que $\underline{\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXAX > 0}}$.

A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons que les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.

<u>Remarque</u>. Notons que A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \to \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

R

EXERCICE 25

Exercice **PC** **Matrice symétrique définie positive.**

A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.

Montrer que les coefficients de A de plus grande valeur absolue se trouvent sur la diagonale.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $A = (a_{i,j})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = {}^tE_i A E_j$

Rappelons que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tXAX > 0$ car A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E_i \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = {}^tE_i A E_i > 0$. $\underline{\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} > 0.}$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. $E_i + E_j \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $E_i - E_j \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car la famille (E_i, E_j) est libre.

Alors ${}^t(E_i+E_j)A(E_i+E_j) > 0$ et ${}^t(E_i-E_j)A(E_i-E_j) > 0$.

${}^t(E_i+E_j)A(E_i+E_j) = ({}^tE_i + {}^tE_j)(AE_i + AE_j) = {}^tE_iAE_i + {}^tE_iAE_j + {}^tE_jAE_i + {}^tE_jAE_j$.

${}^t(E_i+E_j)A(E_i+E_j) = a_{i,i} + a_{i,j} + a_{j,i} + a_{j,j} = a_{i,i} + 2a_{i,j} + a_{j,j}$ car A est symétrique.

On montre de même que ${}^t(E_i-E_j)A(E_i-E_j) = a_{i,i} - 2a_{i,j} + a_{j,j}$.

Alors $a_{i,i} + 2a_{i,j} + a_{j,j} > 0$ et $a_{i,i} - 2a_{i,j} + a_{j,j} > 0$.

Ainsi $|a_{i,i}| + |a_{j,j}| = a_{i,i} + a_{j,j} > -2a_{i,j}$ et $|a_{i,i}| + |a_{j,j}| = a_{i,i} + a_{j,j} > 2a_{i,j}$.

Donc $2|a_{i,j}| = |2a_{i,j}| < |a_{i,i}| + |a_{j,j}| \leqslant 2 \max\limits_{1 \leqslant \ell \leqslant n} |a_{\ell,\ell}|$. $|a_{i,j}| < \max\limits_{1 \leqslant \ell \leqslant n} |a_{\ell,\ell}|$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow |a_{i,j}| < \max\limits_{1 \leqslant \ell \leqslant n} |a_{\ell,\ell}|$.

Donc <u>les coefficients de A de plus grande valeur absolue se trouvent sur la diagonale de A.</u>

R

EXERCICE 27

Exercice | S | **Matrice symétrique définie positive. QSP ESCP 2011 et HEC 2012**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice symétrique définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

- Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} a_{i,j} x_i x_j.$$

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right).$$

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2.$$

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\exists i_0 \in [\![1,n]\!],\ x_{i_0} \neq 0$. Alors $x_{i_0}^2 > 0$.

$${}^tXAX \geqslant \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + (a_{i_0,i_0} - 1) x_{i_0}^2 \geqslant (a_{i_0,i_0} - 1) x_{i_0}^2.$$

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} - 1 > 0$ et $x_i^2 \geqslant 0$

${}^tXAX \geqslant (a_{i_0,i_0} - 1) x_{i_0}^2$ avec $a_{i_0,i_0} - 1 > 0$ et $x_{i_0}^2 > 0$.

Plus de doute ${}^tXAX > 0$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXAX > 0.$

- de plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1 = a_{j,i}$.

  $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = a_{j,i}$.

comme $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = a_{i,i}$ (!) : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$. A est symétrique.

A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

R

EXERCICE 28

Exercice **S** **Matrice symétrique définie positive. QSP ESCP 2011 et HEC 2012**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1 = a_{j,i}$.

Comme $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = a_{i,i}$ (!), alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AX = \lambda X$.

1er cas. $\sum_{i=1}^n x_i \geqslant 0$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda x_i = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j + a_{ii} x_i = \sum_{j=1}^n x_j + a_{ii} x_i - x_i$.

Alors $(\lambda - a_{ii} + 1) x_i = \sum_{j=1}^n x_j \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(\lambda - a_{ii} + 1) x_i \geqslant 0$.

Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda - a_{ii} + 1 < 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \leqslant 0$ donc $\sum_{i=1}^n x_i \leqslant 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Mais $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \leqslant 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!!!

On ne peut donc pas avoir $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda - a_{ii} + 1 < 0$.

Ainsi $\exists k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda - a_{k,k} + 1 \geqslant 0$. $\lambda \geqslant a_{k,k} - 1 > 0$. $\lambda > 0$.

2e cas. $\sum_{i=1}^n x_i < 0$. Posons $X' = -X$. $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x'_i = -x_i$.

$AX = \lambda X$ donne $AX' = \lambda X'$. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne $X' \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et

$\sum_{i=1}^n x_i < 0$ donne $\sum_{i=1}^n x'_i > 0$ donc $\sum_{i=1}^n x'_i \geqslant 0$.

Nous sommes donc ramené au premier cas. Nous pouvons donc dire que $\lambda > 0$.

Ainsi A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. A est une matrice symétrique définie positive.

R

EXERCICE

J.F.C.

Exercice **Matrice symétrique définie positive**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives

---

(*) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}A$. $\exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AX = \lambda X$.

$\exists k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$.

$\lambda x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$ car $\lambda X = AX$. $\lambda x_k - a_{k,k} x_k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{k,j} x_j$.

$(\lambda - a_{k,k}) x_k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{k,j} x_j$.

$|x_k| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$ et $\forall j \in [\![1,n]\!], |a_{k,j}| \geq 0$

$|a_{k,k} - \lambda|\,|x_k| = |(a_{k,k} - \lambda) x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{k,j} x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j} x_j| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,|x_j| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,|x_k|$

$|a_{k,k} - \lambda|\,|x_k| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,|x_k|$.

Supposons que $|x_k| = 0$. Alors $\max_{1\leq j\leq n} |x_j| = 0$. Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $0 \leq |x_j| \leq 0$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|x_j| = 0$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $x_j = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!! Donc $|x_k| \neq 0$. Mieux $|x_k| > 0$.

Alors (*) donne $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|$. Donc $|a_{k,k} - \lambda| < a_{k,k}$.

car $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}| < a_{k,k}$.

Par conséquent $a_{k,k} - \lambda \leq |a_{k,k} - \lambda| < a_{k,k}$. $a_{k,k} - \lambda < a_{k,k}$; $\lambda > 0$.

<u>Les valeurs propres de A sont strictement positives.</u>

(*) Notons que les valeurs propres de A sont réelles car A est symétrique.

R

EXERCICE 30

J.F.C.

Exercice | PC | **Matrice symétrique définie positive.**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} > \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est définie positive, c'est à dire que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Supposons $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} x_i x_j .$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $a_{i,j} x_i x_j \geqslant -|a_{i,j} x_i x_j| = -|a_{i,j}||x_i||x_j|$.

$(|x_i| - |x_j|)^2 \geqslant 0$ donc $|x_i|^2 - 2|x_i||x_j| + |x_j|^2 \geqslant 0$; $|x_i|^2 + |x_j|^2 \geqslant 2|x_i||x_j|$. Alors :

$x_i^2 + x_j^2 \geqslant 2|x_i||x_j|$ donc $-2|x_i||x_j| \geqslant -x_i^2 - x_j^2$. Comme $|a_{i,j}| \geqslant 0$:

$-|a_{ij}||x_i||x_j| \geqslant -\frac{1}{2}|a_{ij}|(x_i^2 + x_j^2)$.

Ainsi ${}^tXAX \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|(x_i^2 + x_j^2)$.

$${}^tXAX \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} |a_{i,j}| x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} |a_{i,j}| x_j^2 .$$

En échangeant i et j dans la dernière somme il vient :

$${}^tXAX \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} |a_{i,j}| x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(j,i)\in[\![1,n]\!]^2\\ j\neq i}} |a_{j,i}| x_i^2$$

Comme A est symétrique les deux dernières sommes sont égales. Ainsi :

$${}^tXAX \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 - \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} |a_{i,j}| x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| x_i^2$$

${}^tXAX \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big[a_{i,i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\Big] x_i^2$. Par hypothèse $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| > 0$.

De plus $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i^2 \geqslant 0$ et $\exists k \in [\![1,n]\!]$, $x_k^2 > 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors ${}^tXAX \geqslant \Big(a_{k,k} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\Big) x_k^2 > 0$. Donc <u>${}^tXAX > 0$ ... pour tout élément X</u>

<u>non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \Big[a_{i,i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{i,j}|\Big] x_i^2 \geqslant \Big(a_{k,k} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\Big) x_k^2 .$$

R

EXERCICE 31

Exercice **PC** **Matrice définie positive encore. Optimisation.**

▶ *Un grand classique, sans doute à savoir faire. On peut aussi le traiter au niveau des fonctions de plusieurs variables en identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.*

A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = \frac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tXB.$

Q1. Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(Y+H) - f(Y) = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + {}^tH(AY - B)$.

Q2. En déduire que f possède un minimum réalisé pour le seul élément $A^{-1}B$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque.. A est symétrique et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXAX > 0$.

Notons que les valeurs propres de A sont strictement positives.

0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

Q1) Soit $(Y,H) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$f(Y+H) - f(Y) = \frac{1}{2}\,{}^t(Y+H)A(Y+H) - {}^t(Y+H)B - \frac{1}{2}\,{}^tYAY + {}^tYB$.

$f(Y+H) - f(Y) = \frac{1}{2}\,{}^tYAY + \frac{1}{2}\,{}^tYAH + \frac{1}{2}\,{}^tHAY + \frac{1}{2}\,{}^tHAH - {}^tYB - {}^tHB - \frac{1}{2}\,{}^tYAY + {}^tYB$

$f(Y+H) - f(Y) = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + \frac{1}{2}\,{}^tYAH + \frac{1}{2}\,{}^tHAY - {}^tHB$.

${}^tYAH \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^t({}^tYAH) = {}^tYAH$; ${}^tH\,{}^tA\,{}^t({}^tY) = {}^tYAH$; ${}^tHAY = {}^tYAH$; ${}^tYAH = {}^tHAY$.

Alors $f(Y+H) - f(Y) = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + \frac{1}{2}\,{}^tHAY + \frac{1}{2}\,{}^tHAY - {}^tHB = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + {}^tHAY - {}^tHB = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + {}^tH(AY-B)$.

$\underline{\underline{\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(Y+H) - f(Y) = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + {}^tH(AY-B)}}$.

Q2) A est inversible donc $\exists!\ X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX_0 = B \quad (X_0 = A^{-1}B)$.

Alors $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X_0+H) - f(X_0) = \frac{1}{2}\,{}^tHAH + {}^tH(AX_0 - B) = \frac{1}{2}\,{}^tHAH$.

donc $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ f(X_0+H) - f(X_0) > 0$

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{X_0\},\ f(X) - f(X_0) > 0$. $\underline{\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{X_0\},\ f(X) > f(X_0)}}$.

ce qui montre que :

1) f possède un minimum.

2) $X_0 = A^{-1}B$ est le seul élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

Exercice	Ordre sur l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\preceq$ est la relation définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \preceq B \text{ si } \big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \leqslant {}^tXBX\big).$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit montrer que :

- $\preceq$ est réflexive ($\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \preceq A$).
- $\preceq$ est antisymétrique (si A et B sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \preceq B$ et $B \preceq A$ donne $A = B$).
- $\preceq$ est transitive (si A, B et C sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \preceq B$ et $B \preceq C$ donne $A \preceq C$.)

$\preceq$ est-il un ordre total ? Autrement dit si A et B sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a-t-on $A \preceq B$ ou $B \preceq A$?

▶ *On trouve ce thème dans ESSEC 2007, oral ESCP 2009 2.10, QSP HEC 2007.*

• $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leqslant {}^tXAX$! donc $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \preceq A$. $\preceq$ est réflexive.

• Soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A \preceq B$ et $B \preceq A$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$ et ${}^tXBX \leqslant {}^tXAX$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tXBX$ donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(A-B)X = 0$. Posons $C = A-B$ et montrons que C est nulle. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXCX = 0$.

${}^t(A-B) = {}^tA - {}^tB = A - B$ car A et B sont symétriques. Ainsi $C = A-B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

<u>V1</u> $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXCX = 0$. Alors les initiés savent que C est antisymétrique.

donc $-C = {}^tC \underset{C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{=} C$. $2C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

<u>V2</u> Soit $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$0 = {}^t(X+Y)C(X+Y) = \underbrace{{}^tXCX}_{=0} + {}^tXCY + {}^tYCX + \underbrace{{}^tYCY}_{=0} = {}^tXCY + {}^tYCX.$$

donc ${}^tXCY = -{}^tYCX$ ... ici on retrouve l'antisymétrie non ? $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

${}^tXCY \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tXCY = {}^t({}^tXCY) = {}^tY\,{}^tC\,{}^t({}^tX) = {}^tY\,{}^tCX \overset{\downarrow}{=} {}^tYCX$.

Ainsi ${}^tXCY = -{}^tYCX$ et ${}^tXCY = {}^tYCX$. Alors ${}^tXCY = 0$.

$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXCY = 0$. Posons $C = (c_{i,j})$. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = {}^tE_i C E_j = 0$. $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$C = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $A - B = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $A = B$.

$\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A \Rightarrow A = B$. $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

• Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq C$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leq {}^tXBX$ et ${}^tXBX \leq {}^tXCX$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leq {}^tXCX$ donc $A \preccurlyeq C$.

$\forall (A,B,C) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^3$, $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq C \Rightarrow A \preccurlyeq C$. $\preccurlyeq$ est transitive.

ceci achève de montrer que $\preccurlyeq$ est un ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

• Supposons $n \geq 2$. Posons $A = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, 2, 0, \dots, 0}_{n \text{ termes}})$ et $B = \mathrm{Diag}(\underbrace{2, 1, 0, \dots, 0}_{n \text{ termes}})$.

A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$AE_1 = E_1$ et $BE_1 = 2E_1$. ${}^tE_1AE_1 = 1$ et ${}^tE_1BE_1 = 2$. ${}^tE_1AE_1 < {}^tE_1BE_1$ donc il n'est pas possible d'avoir $B \preccurlyeq A$.

$AE_2 = 2E_2$ et $BE_2 = E_2$. ${}^tE_2AE_2 = 2$ et ${}^tE_2BE_2 = 1$. ${}^tE_2BE_2 < {}^tE_2AE_2$ donc il n'est pas possible d'avoir $A \preccurlyeq B$.

Il existe donc deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que l'on n'ait ni $A \preccurlyeq B$ ni $B \preccurlyeq A$.

$\preccurlyeq$ n'est pas un ordre total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si $n \geq 2$.

• Supposons $n = 1$. Soit $A = (a)$ et $B = (b)$ deux éléments de $\mathcal{S}_1(\mathbb{R})$.

Soit $X = (x) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXAX = xax = ax^2$ et ${}^tXBX = bx^2$.

Si $a \leq b$ ${}^tXAX \leq {}^tXBX$ et ceci pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $A \preccurlyeq B$.

Si $a \geq b$ ${}^tXBX \leq {}^tXAX$ et ceci pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $B \preccurlyeq A$.

donc $A \preccurlyeq B$ ou $B \preccurlyeq A$.

Si $n = 1$, $\preccurlyeq$ est un ordre total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

R

EXERCICE 33 J.F.C.

Exercice S Matrice d'un produit scalaire... ou matrice symétrique définie positive Oral ESCP 2008 2.11

Il faut noter que la notion de matrice d'un produit scalaire n'est pas du programme. Il faudra comprendre qu'il s'agit d'une matrice symétrique définie positive

Q 1. Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que
$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A.$$

Q2. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1}.

Q3. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$.

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Q1 $A-B \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $B-A \in GL_n(\mathbb{R})$ (l'opposé d'une matrice inversible est inversible).

Ainsi $B(B-A)^{-1}A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $D = B(B-A)^{-1}A$.

Pour montrer que $A^{-1}-B^{-1}$ est inversible d'inverse D il suffit de montrer que $(A^{-1}-B^{-1})D = I_n$.

$(A^{-1}-B^{-1})D = (A^{-1}-B^{-1})B(B-A)^{-1}A = A^{-1}B(B-A)^{-1}A - B^{-1}B(B-A)^{-1}A$.

$(A^{-1}-B^{-1})D = A^{-1}(B-A+A)(B-A)^{-1}A - (B-A)^{-1}A = A^{-1}\underbrace{(B-A)(B-A)^{-1}}_{I_n}A + \underbrace{A^{-1}A}_{I_n}(B-A)^{-1}A - (B-A)^{-1}A$.

$(A^{-1}-B^{-1})D = A^{-1}A + (B-A)^{-1}A - (B-A)^{-1}A = A^{-1}A = I_n$.

Ainsi $\underline{A^{-1}-B^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})}$ et $\underline{(A^{-1}-B^{-1})^{-1} = B(B-A)^{-1}A}$.

Q2 Supposons que C soit une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. C est symétrique et définie positive.

Donc C est symétrique et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXCX > 0$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $CX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. ${}^tXCX = 0$ donc nécessairement $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $CX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $\underline{C \text{ est inversible}}$.

${}^tC^{-1} = ({}^tC)^{-1} = C^{-1}$. $\underline{C^{-1} \text{ est symétrique}}$. $C^{-1} = {}^tC^{-1}$

Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tXC^{-1}X = {}^tXC^{-1}CC^{-1}X = {}^tX\,{}^tC^{-1}CC^{-1}X$.

${}^tXC^{-1}X = {}^t(C^{-1}X)C(C^{-1}X)$. Or $C^{-1}X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car C^{-1} est inversible.

R

Comme X n'est pas nul : $C^{-1}X$ n'est pas nul. Alors ${}^t(C^{-1}X)C(C^{-1}X) > 0$ donc ${}^tXC^{-1}X > 0$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ C \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXC^{-1}X > 0$.

Finalement C^{-1} est symétrique et définie positive.

Donc C^{-1} est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Q3 On suppose ici que A, B et $B-A$ sont des matrices de produits scalaires de $\mathbb{R}^n$.

Donc $A, B, B-A$ sont des matrices symétriques définies positives de $\mathbb{R}^n$. Elles sont inversibles.

a) $B(B-A)^{-1}A = (B-A+A)(B-A)^{-1}A = \underbrace{(B-A)(B-A)^{-1}}_{I_n}A + A(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$

$B(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$.

b) D'après Q1 $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ existe et vaut $B(B-A)^{-1}A$ ou $A + A(B-A)^{-1}A$.

A et B sont symétriques donc A^{-1} et B^{-1} le sont également. Alors $A^{-1}-B^{-1}$ est symétrique.

ceci permet alors de dire que $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est symétrique.

Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. A est symétrique

${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X = {}^tXAX + {}^tXA(B-A)^{-1}AX = {}^tXAX + {}^tX\,{}^tA(B-A)^{-1}AX$.

${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X = {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}AX$

$B-A$ est la matrice d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ donc, d'après Q2, il en est de même pour $(B-A)^{-1}$.

Cette matrice est donc définie positive. Ainsi ${}^t(AX)(B-A)^{-1}AX \geq 0$ (et même >0 mais ce n'est pas utile). De plus ${}^tXAX > 0$ car A est définie positive et X est non nul.

Alors ${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X = {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)AX > 0$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X > 0$.

Donc $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est une matrice symétrique définie positive.

$(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.