R

EXERCICE

JFC

Exercice | S | **Orthonormalisation de Schmidt : exemple 1.**

Basique et bon entraînement.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'hyperplan d'équation $x + 2y - z + t = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. On pose : $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_2 - 2e_4$ et $u_3 = e_3 + e_4$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de F.

Q2. Construire une base orthonormée de F.

Q1 $1 + 2\times 0 - 1 + 0 = 0$, $2\times 1 - 0 + (-2) = 0$, $-1+1=0$ donc u_1, u_2 et u_3 sont trois éléments de F. Comme F est un hyperplan de E qui est de dimension 4, F est de dimension 3.

Pour montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de F il ne reste plus alors qu'à montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_E$

$0_E = \alpha(e_1 + e_3) + \beta(e_2 - 2e_4) + \gamma(e_3 + e_4) = \alpha e_1 + \beta e_2 + (\alpha+\gamma)e_3 + (-2\beta+\gamma)e_4$.

Ainsi $\alpha = \beta = \alpha + \gamma = -2\beta + \gamma = 0$. Alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(u_1, u_2, u_3) est une famille libre d'éléments de F, de cardinal 3 égal à la dimension de F. $\underline{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de F.}}$

Q2 Version 1 $\langle u_1, u_2\rangle = 1\times 0 + 0\times(1) + 1\times 0 + 0\times(-2) = 0$. u_1 et u_2 sont orthogonaux. cherchons un vecteur de F orthogonal à u_1 et u_2 ... et non nul.

Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E$.

$$v \in F \text{ et } \langle v, u_1\rangle = \langle v, u_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x + z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 2t \\ x + 4t + x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 2t \\ 2x + 5t = 0 \end{cases}$$

En prenant $x = 5$, $y = 4$, $z = -5$ et $t = 2$ on obtient une solution du système.

Posons $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2$ et $u'_3 = 5e_1 - 4e_2 - 5e_3 - 2e_4$.

(u'_1, u'_2, u'_3) est une famille orthogonale de F.

$\|u'_1\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\|u'_2\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et $\|u'_3\| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{70}$

Posons $u''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u'_1$, $u''_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} u'_2$ et $u''_3 = \frac{1}{\sqrt{70}} u'_3$. (u''_1, u''_2, u''_3) est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de F dont le cardinal coïncide avec la dimension de F donc (u''_1, u''_2, u''_3) est une base orthonormée de F.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3), \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2-2e_4), \frac{1}{\sqrt{70}}(5e_1-4e_2-5e_3-2e_4)\right)$ est une base orthonormée de F.

Version 2. Schmidt !

E1 Posons $v_1 = u_1$

E2 Posons $v_2 = u_2 + \alpha v_1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Cherchons alors α pour que v_2 soit orthogonal à v_1.

$$\langle v_2, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u_2+\alpha v_1, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u_2, v_1\rangle + \alpha\langle v_1, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Posons alors $\alpha = 0$. $v_2 = u_2 = e_2 - 2e_4$.

E3 Posons $v_3 = u_3 + \beta v_1 + \gamma v_2$. Cherchons β et γ pour que v_3 soit orthogonal à v_1 et v_2

$$\langle v_3, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle u_3+\beta v_1+\gamma v_2, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle + \beta\langle v_1, v_1\rangle + \gamma\underbrace{\langle v_2, v_1\rangle}_{=0} \Leftrightarrow \beta = -\frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$$

de même $\langle v_3, v_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}$.

$\langle u_3, v_1\rangle = \langle e_3+e_4, e_1+e_3\rangle = 1$, $\langle v_1, v_1\rangle = \langle e_1+e_3, e_1+e_3\rangle = 2$. Posons alors $\beta = -\frac{1}{2}$.

$\langle u_3, v_2\rangle = \langle e_3+e_4, e_2-2e_4\rangle = -2$, $\langle v_2, v_2\rangle = \langle e_2-2e_4, e_2-2e_4\rangle = 5$. Posons alors $\gamma = \frac{2}{5}$.

Ainsi $v_3 = u_3 - \frac{1}{2}v_1 + \frac{2}{5}v_2 = e_3+e_4-\frac{1}{2}(e_1+e_3)+\frac{2}{5}(e_2-2e_4) = \frac{1}{10}(-5e_1+4e_2+5e_3+2e_4)$.

Alors (v_1, v_2, v_3) est une famille orthogonale d'éléments de F.

$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{2}$, $\|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle} = \sqrt{5}$, $\|v_3\| = \frac{1}{10}\sqrt{5^2+4^2+5^2+2^2} = \frac{1}{10}\sqrt{70}$.

Posons alors $\omega_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1$, $\omega_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2$, $\omega_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3$. $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de F dont le cardinal coïncide avec la dimension de F. $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base orthonormée de F.

Alors $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3), \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2-2e_4), \frac{1}{\sqrt{70}}(-5e_1+4e_2+5e_3+2e_4)\right)$ est une base orthonormée de F.

R

EXERCICE 22

JFC

| Exercice | S | **Orthonormalisation de Schmidt : exemple 2.** |

Basique et bon entraînement.

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall (P,Q) \in E^2$, $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Construire à partir de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E une base orthonormée de E.

Remarquons avant de commencer que $\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, $\langle X^i, X^j \rangle = \int_0^1 t^i t^j\,dt = \frac{1}{i+j+1}$.

Posons $U_1 = 1$, $U_2 = X$ et $U_3 = X^2$. Déduisons de $\mathcal{B} = (1, X, X^2) = (U_1, U_2, U_3)$ une base orthonormée par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

E1 Posons $\underline{V_1 = U_1 = 1}$.

E2 Posons $V_2 = U_2 + \alpha V_1$. Cherchons α pour que V_2 soit orthogonal à V_1.

$\langle V_2, V_1 \rangle = 0 \iff \langle U_2 + \alpha V_1, V_1 \rangle = 0 \iff \cdots \iff \alpha = -\frac{\langle U_2, V_1 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle} \iff \alpha = -\frac{\langle X, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = -\frac{\frac{1}{1+0+1}}{\frac{1}{0+0+1}} = -\frac{1}{2}$

Posons alors $\alpha = -\frac{1}{2}$. $\underline{V_2 = U_2 - \frac{1}{2} V_1 = X - \frac{1}{2}}$.

E3 Posons $V_3 = U_3 + \beta V_1 + \gamma V_2$. Cherchons β et γ pour que V_3 soit orthogonal à V_1 et V_2.

$\langle V_3, V_1 \rangle = \langle U_3 + \beta V_1 + \gamma V_2, V_1 \rangle = \langle U_3, V_1 \rangle + \beta \langle V_1, V_1 \rangle + \gamma \underbrace{\langle V_2, V_1 \rangle}_{=0} = \langle U_3, V_1 \rangle + \beta \langle V_1, V_1 \rangle$

Donc $\langle V_3, V_1 \rangle = 0 \iff \beta = -\frac{\langle U_3, V_1 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle}$.

De même $\langle V_3, V_2 \rangle = 0 \iff \gamma = -\frac{\langle U_3, V_2 \rangle}{\langle V_2, V_2 \rangle}$.

Nous avons déjà vu que $\langle V_1, V_1 \rangle = 1$.

$\langle U_3, V_1 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle = \frac{1}{2+0+1} = \frac{1}{3}$. Nous posons alors $\beta = -\frac{1}{3}$.

$\langle V_2, V_2 \rangle \underset{\text{"Astuce"}}{=} \langle V_2, U_2 - \frac{1}{2} V_1 \rangle = \langle V_2, U_2 \rangle - \frac{1}{2} \langle V_2, V_1 \rangle = \langle V_2, U_2 \rangle = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})\, t\, dt = \int_0^1 (t^2 - \frac{1}{2} t)\, dt$

$\langle V_2, V_2 \rangle = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{4} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. $\langle U_3, V_2 \rangle = \int_0^1 t^2 (t - \frac{1}{2})\, dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{1}{6} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Nous posons alors $\gamma = -\frac{1/12}{1/12} = -1$.

Ainsi $V_3 = U_3 - \frac{1}{3} V_1 - V_2 = X^2 - \frac{1}{3} - (X - \frac{1}{2}) = X^2 - X - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

$\underline{V_3 = U_3 - \frac{1}{3} V_1 - V_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}$.

(V_1, V_2, V_3) est une famille orthogonale de $E = \mathbb{R}_2[X]$.

$$\|V_3\|^2 = \langle V_3, V_3\rangle \underset{\uparrow}{=} \langle V_3, U_3 - \tfrac{1}{3}V_1 - V_2\rangle = \langle V_3, U_3\rangle = \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})\,t^2\,dt = \left[\tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{4}t^4 + \tfrac{1}{18}t^3\right]_0^1$$

"Astuce"

$$\|V_3\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{180}(36 - 45 + 10) = \frac{1}{180} = \frac{1}{6^2 \times 5}. \quad \|V_3\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

Rappelons que $\|V_1\| = 1$ et $\|V_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Posons $W_1 = \frac{1}{\|V_1\|}V_1$, $W_2 = \frac{1}{\|V_2\|}V_2$ et $W_3 = \frac{1}{\|V_3\|}V_3$.

$W_1 = 1$, $W_2 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$ et $W_3 = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})$.

(W_1, W_2, W_3) est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de E dont le cardinal coïncide avec la dimension de E.

(W_1, W_2, W_3) est une base orthonormée de E.

$\left(1,\ 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}),\ 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})\right)$ est une base orthonormée de E.

R

EXERCICE 23

JFC

Exercice **Construction d'une base orthogonale.**

▶ *Q2 constitue un très bon entraînement.*

$n \in \mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire canonique. $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

Q1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et que $\mathcal{B} = \Big(X-1, X(X-1), X^2(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1)\Big)$ en est une base (les deux en 1 ou presque).

Q2. Dans cette question on suppose que $n = 3$. Construire à partir de $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F.

Frise $\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$, $\sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (1/2)X - (1/2))$ et $\sqrt{\frac{3}{4}}(X^3 - (1/3)X^2 - (1/3)X - (1/3))$.

Q3. On pose pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $P_k = \sqrt{\dfrac{k}{k+1}}\left(X^k - \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} X^i\right)$.

Montrer que $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est la base orthonormée de F déduite de la base $\mathcal{B}$ par le procédé de Schmidt.

Q1 Soit $P \in E$. $P \in F \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow X-1$ divise $P \Leftrightarrow \exists\, Q \in \mathbb{R}[X],\ P = (X-1)Q$.

Mieux $P \in F \Leftrightarrow \exists\, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = (X-1)Q \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ P = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

$P \in F \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X-1)X^k \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$

Alors $F = \mathrm{Vect}(X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = (X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ en est une famille génératrice. Or $\mathcal{B}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Ainsi $\mathcal{B} = (X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de F. $\dim F = n$.

Q2 Posons $U_1 = X-1$, $U_2 = X(X-1) = X^2 - X$ et $U_3 = X^2(X-1) = X^3 - X^2$.

$\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de F. Construisons à partir de cette base une base orthonormée de F en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- E1 Posons $V_1 = U_1 = X-1$
- E2 Cherchons α dans $\mathbb{R}$ tel que $V_2 = U_2 + \alpha V_1$ soit orthogonal à V_1.

$\langle V_2, V_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle U_2, V_1\rangle + \alpha\langle V_1, V_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{\langle U_2, V_1\rangle}{\langle V_1, V_1\rangle}$

$\langle U_2, V_1\rangle = \langle X^2 - X, X-1\rangle = -1$ et $\langle V_1, V_1\rangle = \langle X-1, X-1\rangle = 2$. Posons $\alpha = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Alors $V_2 = U_2 + \frac{1}{2}V_1$. $V_2 = X^2 - X + \frac{1}{2}(X-1) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ et V_2 est orthogonal à V_1

R

- E3 Posons $V_3 = U_3 + \beta V_1 + \gamma V_2$ et cherchons β et γ pour que V_3 soit orthogonal à V_1 et V_2.

$\langle V_3, V_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle U_3, V_1\rangle + \beta\langle V_1, V_1\rangle + \gamma\underbrace{\langle V_2, V_1\rangle}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{\langle U_3, V_1\rangle}{\langle V_1, V_1\rangle}$.

de même $\langle V_3, V_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\dfrac{\langle U_3, V_2\rangle}{\langle V_2, V_2\rangle}$.

$\langle V_1, V_1\rangle = 2$, $\langle U_3, V_1\rangle = \langle X^3 - X^2, X-1\rangle = 0$, $\langle V_2, V_2\rangle = \langle X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{2}\rangle = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

et $\langle U_3, V_2\rangle = \langle X^3 - X^2, X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\rangle = -1$.

Posons alors $\beta = 0$ et $\gamma = -\dfrac{-1}{3/2} = \dfrac{2}{3}$.

$V_3 = U_3 + \frac{2}{3}V_2 = X^3 - X^2 + \frac{2}{3}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right) = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$ et V_3 est orthogonal à

V_1 et V_2. (V_1, V_2, V_3) est une famille orthogonale d'éléments de F.

$\|V_1\| = \sqrt{\langle V_1, V_1\rangle} = \sqrt{2}$. $\|V_2\| = \sqrt{\langle V_2, V_2\rangle} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. $\|V_3\| = \sqrt{\langle V_3, V_3\rangle} = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Posons $W_1 = \dfrac{1}{\|V_1\|}V_1$, $W_2 = \dfrac{1}{\|V_2\|}V_2$ et $W_3 = \dfrac{1}{\|V_3\|}V_3$.

(W_1, W_2, W_3) est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de F dont le cardinal coïncide avec la dimension de F. (W_1, W_2, W_3) est une base orthonormée de F.

Ainsi $\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right), \sqrt{\frac{3}{4}}\left(X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)\right)}$ est une base orthonormée de F.

(Q3) Nous devons donc montrer que :

1°) $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base orthonormée de F.

2°) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(X-1, X(X-1), \dots, X^{k-1}(X-1))$.

3°) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle P_k, X^{k-1}(X-1)\rangle > 0$.

Posons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F_k = F \cap \mathbb{R}_k[X]$. Notons que $F = F_n$. Posons encore : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k = X^{k-1}(X-1)$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $F_k = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(1) = 0\}$. En faisant " $n \leftarrow k$ " dans Q1 on peut affirmer que $\underline{(U_1, U_2, \dots, U_k) \text{ est une base de } F_k}$. En particulier $\underline{\dim F_k = k}$.

$\boxed{P1}$ Pour montrer que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base orthonormée de F il suffit de montrer que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille orthonormée d'éléments de F car $\dim F = n$ et toute famille orthonormée et libre.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $\langle P_k, P_k\rangle = \sqrt{\frac{k}{k+1}}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\,\langle -\frac{1}{k}-\frac{1}{k}X-\dots-\frac{1}{k}X^{k-1}+X^k, -\frac{1}{k}-\frac{1}{k}X-\dots-\frac{1}{k}X^{k-1}+X^k\rangle$.

$$\langle P_k, P_k\rangle = \Big[\underbrace{(-\tfrac{1}{k})\times(-\tfrac{1}{k})+(-\tfrac{1}{k})\times(-\tfrac{1}{k})+\dots+(-\tfrac{1}{k})\times(-\tfrac{1}{k})}_{k \text{ fois}}+1\times 1\Big]\times\frac{k}{k+1}.$$

$$\langle P_k, P_k\rangle = \left(k\times\frac{1}{k^2}+1\right)\frac{k}{k+1} = \left(\frac{1}{k}+1\right)\frac{k}{k+1} = \frac{1+k}{k}\times\frac{k}{k+1} = 1.$$

Donc $\|P_k\|^2 = 1$. Ainsi $\|P_k\| = 1$.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $\underline{\underline{i<j}}$.

$\langle P_i, P_j\rangle = \sqrt{\frac{i}{i+1}}\sqrt{\frac{j}{j+1}}\,\langle -\frac{1}{i}-\frac{1}{i}X-\dots-\frac{1}{i}X^{i-1}+X^i, -\frac{1}{j}-\frac{1}{j}X-\dots-\frac{1}{j}X^{j-1}+X^j\rangle$.

$$\langle P_i, P_j\rangle = \sqrt{\frac{i}{i+1}}\sqrt{\frac{j}{j+1}}\Big[\underbrace{(-\tfrac{1}{i})\times(-\tfrac{1}{j})+(-\tfrac{1}{i})\times(-\tfrac{1}{j})+\dots+(-\tfrac{1}{i})(-\tfrac{1}{j})}_{i \text{ fois}}+1\times(-\tfrac{1}{j})+\underbrace{0\times(-\tfrac{1}{j})+0\times(-\tfrac{1}{j})+\dots+0\times(-\tfrac{1}{j})}_{j-1-i \text{ fois}}+0\times 1\Big]$$

$$\langle P_i, P_j\rangle = \sqrt{\frac{i}{i+1}}\sqrt{\frac{j}{j+1}} = i\left(-\frac{1}{i}\right)\left(-\frac{1}{j}\right)-\frac{1}{j} = \frac{1}{j}-\frac{1}{j} = 0.$$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\|P_k\| = 1$ et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i<j \Rightarrow \langle P_i, P_j\rangle = 0$.

Ceci suffit pour dire que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille orthonormée de $\underline{\underline{E}}$ car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique... et $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$, $P_\ell \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P_k(1) = \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}1^i\right) = \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{1}{k}\times k\right) = 0$. $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$, $P_\ell\in F$.

$(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de F dont le cardinal coïncide avec la dimension de F. $\underline{\underline{(P_1, P_2, \dots, P_n) \text{ est une base orthonormée de } F.}}$

$\boxed{P2}$ Notons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_k)$.

Rappelons que $F_k = \mathbb{R}_k[X]\cap F = \mathrm{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_k)$ et que $\dim F_k = k$.

$\forall i\in[\![1,k]\!]$, $P_i\in\mathbb{R}_k[X]\cap F$. $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $P_i\in F_k$. Alors $(P_1, P_2, \dots, P_k)$ est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de F_k dont le cardinal coïncide avec la dimension de F_k. $(P_1, P_2, \dots, P_k)$ est une base orthonormée de F_k.

donc $\underline{\underline{\mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k) = F_k = \mathrm{Vect}(U_1, U_2, \ldots, U_k)}}$ et ceci pour tout k dans $[\![1, n]\!]$.

$\boxed{P3}$ Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\langle P_k, U_k \rangle = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \langle -\frac{1}{k} - \frac{1}{k} X - \cdots - \frac{1}{k} X^{k-1} + X^k, -X^{k-1} + X^k \rangle$$

$$\langle P_k, U_k \rangle = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \Big[\underbrace{(-\tfrac{1}{k}) \times 0 + (-\tfrac{1}{k}) \times 0 + \cdots + (-\tfrac{1}{k}) \times 0}_{k-1 \text{ fois}} + (-\tfrac{1}{k}) \times (-1) + 1 \Big] = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(\frac{1}{k} + 1 \right) > 0$$

$\underline{\underline{\forall k \in [\![1, n]\!], \ \langle P_k, U_k \rangle > 0}}$

ceci achève de montrer que $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est la base orthonormée de F déduite de $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ donc de $(X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

R

EXERCICE 24

JFC

Exercice | **Par ♡** | **Construction d'une base orthonormée dans $\mathbb{R}_n[X]$.**

► *Classique et incontournable*

n est in élément de $\mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Q1. a) Montrer que pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, il existe un polynôme normalisé (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) P_k et un seul appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

b) Montrer que pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, P_k est de degré k.

On pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ Q_k = \dfrac{1}{||P_k||} P_k$.

Q2. a) Montrer que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de E.

b) Montrer que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est la base orthonormée de E déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Q1 a) Commençons par montrer un résultat classique.

Lemme.. Une droite vectorielle de $\mathbb{K}[X]$ contient un polynôme normalisé et un seul.

▲ Preuve.. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{K}[X]$ et P un élément non nul de D.

$D = \text{Vect}(P)$.

Soit α le coefficient du terme de plus haut degré de P. Alors $Q = \frac{1}{\alpha} P$ est un polynôme normalisé de D. Notons que Q n'est pas nul donc $D = \text{Vect}(Q)$.

Soit $\hat{Q}$ un autre polynôme normalisé de D. Notons que $\hat{Q} \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

$\exists \beta \in \mathbb{K},\ \hat{Q} = \beta Q$. $\beta \neq 0$ car $\hat{Q} \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Le coefficient du terme de plus haut degré de $\hat{Q}$ est 1. Celui de βQ est β.

Comme $\hat{Q} = \beta Q$: $1 = \beta$. Alors $\hat{Q} = Q$. Ceci achève la preuve du lemme ▼

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\dim \mathbb{R}_{k-1}[X] = k$, $\dim \mathbb{R}_k[X] = k+1$ et $\mathbb{R}_{k-1}[X] \subset \mathbb{R}_k[X]$.

Alors l'orthogonal D_k de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$ est une droite vectorielle. Elle contient un polynôme normalisé et un seul que nous noterons P_k.

Or un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ si et seulement si il appartient à D_k. Donc P_k est l'unique polynôme normalisé appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Il existe un polynôme normalisé P_k et un seul appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

R

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Supposons que $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Alors $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X] \cap (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp} = \{0_E\}$

Donc $P_k = 0_E$. ceci est impossible car P_k est normalisé.

Alors $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ et $P_k \notin \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Donc $\underline{\deg P_k = k}$.

(Q2) a) $P_0 = 1$ donc $\varphi_0 = \frac{1}{\|P_0\|} 1$; $\deg \varphi_0 = 0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\deg \varphi_k = \deg\left(\frac{1}{\|P_k\|} P_k\right) = k$. On a aussi $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

Alors $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille de polynômes non nuls de E ($E = \mathbb{R}_n[X]$) de degrés échelonnés. Donc $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre de E dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de E. Alors $\underline{(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est une base de } E}$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\|\varphi_k\| = \left\|\frac{1}{\|P_k\|} P_k\right\| = \left|\frac{1}{\|P_k\|}\right| \|P_k\| = \frac{1}{\|P_k\|}\|P_k\| = 1$.

Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $i<j$.

$\deg P_i = i$ et $i<j$ donc $P_i \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$. Or P_j est orthogonal à $\mathbb{R}_{j-1}[X]$ donc $\langle P_i, P_j \rangle = 0$

Alors $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \frac{1}{\|P_i\|}\frac{1}{\|P_j\|} \langle P_i, P_j \rangle = 0$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\|\varphi_k\| = 1$ et $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $i<j \Rightarrow \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$.

ceci suffit pour dire que $\underline{(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est une famille orthonormée}}$.

~~Finalement~~ $\underline{\underline{(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est une base orthonormée de } E}}$.

b) $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base orthonormée de E. Il ne reste plus qu'à montrer que :

1) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k)$.

2) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\langle \varphi_k, X^k \rangle > 0$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg \varphi_k = k$ donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_k[X]$ de degrés échelonnés.

donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_k[X]$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_k[X]$.

Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

Finalement $\underline{\underline{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) = \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k)}}$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$ et $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$.

$\exists (r_0, r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, $X^k = \sum_{i=0}^{k} r_i \varphi_i$. Or pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, φ_i est normalisé de degré i. Alors le coefficient de X^k dans $\sum_{i=1}^{k} r_i \varphi_i$ est r_k. Comme $\sum_{i=1}^{k} r_i \varphi_i = X^k$: $r_k = 1$

$$\langle X^k, \varphi_k \rangle = \sum_{i=0}^{k} r_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) \text{ est une famille orthonormée}}}{=} r_k = 1 > 0 .$$

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\langle X^k, \varphi_k \rangle > 0$.

$\underline{\underline{(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est la base orthonormée de } E \text{ déduite de la base } (1, X, \dots, X^n) \text{ par le}}}$
$\underline{\underline{\text{procédé d'orthonormalisation de Schmidt.}}}$

EXERCICE 25

Exercice **Par ♡** **Construction d'une base orthonormée dans $\mathbb{R}_n[X]$.**

▶ *Classique et incontournable*

a et b sont deux réels tels que $a < b$. p est une application continue et strictement positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Si P et Q sont deux éléments de $E = \mathbb{R}[X]$ on pose : $< P, Q >= \displaystyle\int_a^b P(t)\, Q(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Q2. k est élément de $\mathbb{N}^*$. D_k est l'ensemble de éléments de E_k orthogonaux à E_{k-1}.

a) Montrer que D_k est une droite vectorielle.

b) Montrer que D_k contient un polynôme P_k normalisé (ou unitaire) de degré k et un seul.

Q3. On pose $P_0 = 1$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Q4. n est élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\forall Q \in E_{n-1},\ < Q, P_n >= 0$.

b) Si P_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $]a, b[$ on pose $D = 1$. Si P_n a, dans $]a, b[$, r racines d'ordre impair, y_1, y_2, ..., y_r, on pose $D = (X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_r)$.

Montrer rapidement que DP_n garde un signe constant sur $[a, b]$. En déduire en raisonnant par l'absurde que $r = n$. Que dire alors pour P_n ?

Q5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. a) Montrer qu'il existe un élément $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que : $XP_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k P_k$.

Montrer que $\gamma_i = 0$ si i appartient à $[\![0, n-2]\!]$ $(< XP_n, P_i >=< P_n, XP_i >)$

b) Montrer $\gamma_{n+1} = 1$ et qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.

Montrer que $a_n = -\dfrac{< XP_n, P_n >}{||P_n||^2}$ et $b_n = -\dfrac{||P_n||^2}{||P_{n-1}||^2}$.

Remarque *On peut encore renforcer cet exercice de la manière suivante. On suppose que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et que p est continue et strictement positive sur $]a, b[$ et telle que $\displaystyle\int_a^b R(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t$ converge pour tout élément R se $\mathbb{R}[X]$... ou de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.*

La correction qui suit est assez ancienne. Je la renie... presque, mais on ne peut pas tout refaire.

Exercice .. Q1.. Soient P, Q, R trois éléments de E et λ un réel.

- $\langle \lambda P+Q, R\rangle = \int_a^b (\lambda P+Q)(t)R(t)p(t)dt = \lambda \int_a^b P(t)R(t)p(t)dt + \int_a^b Q(t)R(t)p(t)dt = \lambda \langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle$.
- $\langle P,Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)p(t)dt = \int_a^b Q(t)P(t)p(t)dt = \langle Q,P\rangle$.
- $\forall t\in[a,b]$, $P^2(t)p(t)\geq 0$ donc $\int_a^b P^2(t)p(t) \geq 0$; $\langle P,P\rangle \geq 0$.
- Supposons $\langle P,P\rangle = 0$. $\int_a^b P^2(t)p(t)dt = 0$. P^2p est une fonction continue positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle. P^2p est donc nulle sur $[a,b]$. p est strictement positive sur $[a,b]$ donc P^2 est nulle et P aussi.

ceci achève de prouver que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Q2 a) D_k n'est autre que l'orthogonal de E_{k-1} dans E_k. Ainsi D_k est le supplémentaire orthogonal de E_{k-1} dans E_k. $E_k = E_{k-1} \overset{\perp}{\oplus} D_k$

$\dim E_k = k+1$ et $\dim E_{k-1} = k$ donc $\dim D_k = 1$.

D_k est une droite vectorielle.

b) Notons S_k un élément non nul de D_k. $D_k = \mathrm{Vect}(S_k)$.

$S_k \in E_k$ donc $\deg S_k \leq k$. Si $S_k \in E_{k-1}$ alors $D_k = \mathrm{Vect}(S_k) \subset E_{k-1}$ or D_k est un supplémentaire de E_{k-1} de dimension 1 !!

Donc $\deg S_k \leq k$ et $S_k \notin E_{k-1}$. Ainsi $\deg S_k = k$.

Notons A_k le coefficient de X^k dans S_k et posons : $P_k = \frac{1}{A_k} S_k$

$P_k \in D_k$, $\deg P_k = k$ et P_k est unitaire. Notons que $D_k = \mathrm{Vect}(P_k)$

Supposons que : $\hat{P}_k \in D_k$, $\deg \hat{P}_k = k$ et $\hat{P}_k$ est unitaire.

$\hat{P}_k \in \mathrm{Vect}(P_k)$ donc $\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $\hat{P}_k = \lambda P_k$. Le coefficient de X^k dans P_k et dans $\hat{P}_k$ est 1

donc $1 = \lambda \times 1$; $\lambda = 1$; $\hat{P}_k = P_k$.

D_k contient un polynôme P_k unitaire de degré k et un seul.

Q3. Notons que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, P_k est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ car P_k est orthogonal à tous les éléments de E_{k-1}.

Montrons dès lors que (P_k) est une famille orthogonale de E.

Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tel que $i\neq j$

Si $i<j$: $P_i \in E_{j-1}$ donc P_i et P_j sont orthogonaux. Si $i>j$: $P_j \in E_{i-1}$ donc P_i et P_j sont orthogonaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$ ainsi la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre (polynômes de degrés échelonnés) de $n+1$ éléments de E_n qui est de dimension $n+1$. Donc $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E_n. Mieux $\underline{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } E_n}$.

(Q4) $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Résulte de la définition de P_n ! $\forall Q \in E_{n-1}$, $\langle Q, P_n \rangle = 0$.

Donc $\forall Q \in E_{n-1}$,

b) Rappels. - Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans zéro

• Tout polynôme de degré au moins 1 est produit de polynômes irréductibles

• Un polynôme de degré 2, de $\mathbb{R}[X]$, sans zéro garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. Ce qui précède montre, en regroupant ses racines dont l'ordre de multiplicité est pair et ses racines dont l'ordre de multiplicité est impair, que l'on peut écrire P sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i \in I} (X - \alpha_i)^{2 t_i} \times \prod_{j \in J} (X - \beta_j)^{2 s_j + 1} \times \prod_{k \in K} (X^2 + a_k X + b_k)$$ (les α_i étant deux à deux distincts ainsi que les β_j ; I, J ou K pouvant être vides)

Ainsi P change de signe uniquement aux points β_j.

Par construction de D, DP_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $]a,b[$ donc ne change de signe en aucun point de cet intervalle.

Ainsi DP_n garde un signe constant sur $[a,b]$.

Supposons $r < n$. Alors $D \in E_{n-1}$ et donc $\langle D, P_n \rangle = 0$.

Par conséquent : $\int_a^b D(t) P_n(t) p(t) \, dt = 0$. Or $DP_n p$ garde un signe constant sur $[a,b]$ et est une fonction continue sur $[a,b]$ donc $DP_n p$ est nulle sur $[a,b]$!

Ceci est absurde. Donc $r = n$ (on ne peut avoir $r > n$ car $\deg P_n = n$).

Par conséquent P_n admet n racines distinctes d'ordre impair dans $]a,b[$. Or P_n est de degré n. Par conséquent

1°. P_n admet n racines réelles distinctes (d'ordre 1 !)

2°. Ces n racines sont dans $]a,b[$.

Q5) a) $\deg P_n = n$ donc $\deg XP_n = n+1$. Alors $XP_n \in E_{n+1}$. Or $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$ est une base de E_{n+1} donc $\exists (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}, XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k P_k$

Soit $i \in [\![0, n-2]\!]$.

$\langle XP_n, P_i \rangle = \langle \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k, P_i \rangle = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \langle P_k, P_i \rangle = \gamma_i \langle P_i, P_i \rangle = \gamma_i \|P_i\|^2$

$\langle P_k, P_i \rangle = 0$ si $k \neq i$

$\langle XP_n, P_i \rangle = \gamma_i \|P_i\|^2$.

$\langle XP_n, P_i \rangle = \int_a^b t P_n(t) P_i(t)\,dt = \int_a^b P_n(t)(tP_i(t))\,dt = \langle P_n, XP_i \rangle$.

Or XP_i est de degré $i+1$ et $i \leq n-2$ donc $XP_i \in E_{n-1}$.

Comme P_n est orthogonal à E_{n-1} : $\langle P_n, XP_i \rangle = 0$. Alors $\langle XP_n, P_i \rangle = 0$.

On en déduit que $\gamma_i \|P_i\|^2 = 0$. Or $P_i \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\|P_i\|^2 \neq 0$. Ainsi $\gamma_i = 0$.

$\forall i \in [\![0, n-2]\!], \gamma_i = 0$. $\forall i \in [\![0, n-2]\!], \gamma_i = 0$ ... au moins si $n \geq 2$.

Alors $XP_n = \gamma_{n+1} P_{n+1} + \gamma_n P_n + \gamma_{n-1} P_{n-1}$ qui vaut bien pour $n \geq 1$!

b) P_{n-1}, P_n et P_{n+1} sont normalisés et de degrés respectifs $n+1$, n et $n-1$.

Alors le coefficient de X^{n+1} dans XP_n est 1 et le coefficient de X^{n+1} dans $\gamma_{n+1} P_{n+1} + \gamma_n P_n + \gamma_{n-1} P_{n-1}$ est γ_{n+1}. Alors $\gamma_{n+1} = 1$.

Donc $XP_n = P_{n+1} + \gamma_n P_n + \gamma_{n-1} P_{n-1}$. $P_{n+1} = (X - \gamma_n) P_n - \gamma_{n-1} P_{n-1}$.

Posons $a_n = -\gamma_n$ et $b_n = -\gamma_{n-1}$. Il vient alors $P_{n+1} = (X + a_n) P_n + b_n P_{n-1}$

$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \quad P_{n+1} = (X + a_n) P_n + b_n P_{n-1}$.

$\langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = 0$ car $P_{n-1} \in E_n$!

Alors $0 = \langle (X+a_n)P_n + b_n P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = \langle X P_n, P_{n-1} \rangle + a_n \underbrace{\langle P_n, P_{n-1} \rangle}_{=0} + b_n \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle$.

donc $b_n \|P_{n-1}\|^2 = - \langle X P_n, P_{n-1} \rangle = - \langle P_n, X P_{n-1} \rangle$. $b_n = - \dfrac{\langle P_n, X P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}$.

$X P_{n-1} \in E_n$ donc $\exists (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X P_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i$.

Le coefficient de X^n dans $X P_{n-1}$ est 1 et le coefficient de X^n dans $\sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i$ est β_n.

Alors $\beta_n = 1$. Ainsi $\langle P_n, X P_{n-1} \rangle = \langle P_n, \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i \rangle = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \langle P_n, P_i \rangle = \beta_n \langle P_n, P_n \rangle = \langle P_n, P_n \rangle$

donc $\langle P_n, X P_{n-1} \rangle = \|P_n\|^2$. Finalement $b_n = - \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.

$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \langle (X+a_n)P_n + b_n P_{n-1}, P_n \rangle = \langle X P_n, P_n \rangle + a_n \langle P_n, P_n \rangle + b_n \underbrace{\langle P_{n-1}, P_n \rangle}_{=0}$

donc $a_n = - \dfrac{\langle X P_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2}$.

Exercice **PC** **Construction d'une base orthonormée. Edhec 2011 ex 3.**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

Q1. Montrer que, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,dt$ est convergente.

On admet que l'application, notée $\langle .,. \rangle$, de $\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (P,Q)\in \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X],\ \langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. On note $\|\ \|$ la norme associe.

Q2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P',Q\rangle + \langle P,Q'\rangle = \langle P,Q\rangle - P(0)\,Q(0).$$

(b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

Q3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant :

$$(\mathcal{R})\quad \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k\in [\![0,n]\!],\ \deg L_k = k \\ \forall k\in [\![0,n]\!],\ L_k(0)=1 \\ (L_0,L_1,\ldots,L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

(a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ vérifiant les relations $(\mathcal{R})$.

Montrer que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $L_k = M_k$.

(b) On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille obtenue à partir de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

i) Justifier, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, la relation $P_k(0)\neq 0$.

ii) En déduire une famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant $(\mathcal{R})$.

(c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.

---

1. • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{(k+1)-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,dt$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

• Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tel que $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\,X^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{r} a_k\, t^k\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

Pour tout élément R de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

• Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$P\,Q$ appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (PQ)(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge !

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P,Q) \text{ d'éléments de } \mathbb{R}_n[X] : \text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Remarque On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ *en montrant que* $\left|P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *par croissance comparée.*

Remarque Montrons que $< .,. >$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

• *Soit* (P, Q) *un couple d'éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ *converge ! Ainsi* $< P, Q >$ *existe.*

$< .,. >$ *est une application de* $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ *dans* $\mathbb{R}$.

• *Soit* λ *un réel et soient* P, Q, R *trois éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$.

$$< \lambda\, P + Q, R >= \int_0^{+\infty} (\lambda\, P + Q)(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(\lambda\, P(t)\, R(t) + Q(t)\, R(t)\big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

$$< \lambda\, P + Q, R >= \int_0^{+\infty} \left(\lambda\, P(t)\, R(t)\, e^{-t} + Q(t)\, R(t)\, e^{-t}\right) \mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\, P + Q, R >= \lambda\, < P, R > + < Q, R >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q, R) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^3$, $< \lambda\, P + Q, R >= \lambda\, < P, R > + < Q, R >$. $< .,. >$ *est linéaire à gauche.*

• *Soit* (P, Q) *un couple d'éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$. $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)\, P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t =< Q, P >$.

$\forall (P, Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$, $< P, Q >=< Q, P >$. $< .,. >$ *est symétrique.*

• *Soit* P *un élément de* $\mathbb{R}_n[X]$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left(P(t)\right)^2 e^{-t} \geqslant 0$ et $0 \leqslant +\infty$ *! donc* $< P, P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(P(t)\right)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t \geqslant 0$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $< P, P > \geqslant 0$. $< .,. >$ *est positive.*

• *Soit* P *un élément de* $\mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $< P, P >= 0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(P(t)\right)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t = 0$.

▼ $t \to \left(P(t)\right)^2 e^{-t}$ *est positive sur* $[0, +\infty[$.

▼ $t \to \left(P(t)\right)^2 e^{-t}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

▼ $0 \neq +\infty$ *!*

Alors $t \to \left(P(t)\right)^2 e^{-t}$ *est nulle sur* $[0, +\infty[$. *Comme* $t \to e^{-t}$ *ne s'annule pas sur* $[0, +\infty[: \forall t \in [0, +\infty[$, $\left(P(t)\right)^2 = 0$.

Ainsi $\forall t \in [0, +\infty[,\ P(t) = 0$. *$P$ admet alors une infinité de zéros donc* $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ < P, P > \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. $< .,. >$ *est définie.*

Les cinq points précédents permettent de dire que $< .,. >$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons que P' et Q' sont encore des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$< P', Q > + < P, Q' > = \int_0^{+\infty} P'(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} P(t)\, Q'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(P'(t)\, Q(t) + P(t)\, Q'(t)\big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

$$< P', Q > + < P, Q' > = \int_0^{+\infty} (P\, Q)'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Intégrons alors par parties. Soit A dans $\mathbb{R}_+$. PQ et $t \to e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors :

$$\int_0^A (P\, Q)'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \Big[(P\, Q)(t)\, e^{-t}\Big]_0^A - \int_0^A (P\, Q)(t)\, (-e^{-t})\, \mathrm{d}t = (P\, Q)(A)\, e^{-A} - P(0)\, Q(0) + \int_0^A (P\, Q)(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Montrons que $\lim\limits_{A \to +\infty} \big((P\, Q)(A)\, e^{-A}\big) = 0$. C'est clair si $P\, Q$ est le polynôme nul.

Supposons maintenant que $P\, Q$ n'est pas le polynôme nul, notons r son degré et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré.

Alors $(P\, Q)(A)\, e^{-A} \underset{A \to +\infty}{\sim} a_r\, A^r\, e^{-A}$. Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \big((P\, Q)(A)\, e^{-A}\big) = \lim\limits_{A \to +\infty} \big(a_r\, A^r\, e^{-A}\big) = 0$ par croissance comparée.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité $\displaystyle\int_0^A (P\, Q)'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = (P\, Q)(A)\, e^{-A} - P(0)\, Q(0) + \int_0^A (P\, Q)(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$

il vient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (P\, Q)'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = -P(0)\, Q(0) + \int_0^{+\infty} (P\, Q)(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle < P', Q > + < P, Q' > = \int_0^{+\infty} (P\, Q)'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = -P(0)\, Q(0) + \int_0^{+\infty} (P\, Q)(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = < P, Q > - P(0)\, Q(0)$.

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P, Q) \text{ d'éléments de } \mathbb{R}_n[X] : < P', Q > + < P, Q' > = < P, Q > - P(0)\, Q(0).}$$

(b) Soit P un polynôme non constant orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur.

$\deg P' < \deg P$ donc $< P', P > = < P, P' > = 0$. Alors (a) donne : $< P, P > - P(0)\, P(0) = 0$ ou $\|P\|^2 = \big(P(0)\big)^2$.

Comme $\|P\|$ est un réel positif : $\|P\| = |P(0)|$

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un polynôme non constant de } \mathbb{R}_n[X], \text{ orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a } |P(0)| = \|P\|.}$$

3. (a) Nous allons d'abord montrer que pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ sont des bases orthonormées ou orthonormales de $\mathbb{R}_k[X]$. Soit k un élément de $[\![0, n]\!]$.

$\forall i \in [\![0, k]\!], \deg L_i = i$. Alors $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_k[X]$ de degrés échelonnés.

$(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est alors une famille libre (normal pour une famille orthonormée...) de cardinal $k + 1$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui est de dimension $k + 1$.

Donc $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$. C'est même une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

De même $(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

- $L_0 = 1 = M_0$.
- Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Montrons que $L_k = M_k$.

L_k est orthogonal à tous les éléments de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_{k-1})$ de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc L_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. De même M_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Version 1 L'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$ est une droite vectorielle D_k car $\dim \mathbb{R}_k[X] = k+1$ et $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_k[X]$ de dimension k

D_k contient L_k et M_k. L_k et M_k étant non nuls ils engendrent D_k.

Alors il existe un réel λ (non nul) tel que $L_k = \lambda\, M_k$. Or $L_k(0) = 1 = M_k(0)$ donc $\lambda = 1$ et ainsi $L_k = M_k$.

Version 2 L_k et M_k sont orthogonaux à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc $L_k - M_k$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Supposons $L_k - M_k$ non constant ; alors $1 \leqslant \deg(L_k - M_k) \leqslant k$. Dans ces conditions $L_k - M_k$ est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur puisqu'il est orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors d'après **2. (b)**, $\|L_k - M_k\| = |(L_k - M_k)(0)| = |L_k(0) - M_k(0)| = |1 - 1| = 0$.

Donc $L_k - M_k$ est nul ce qui contredit le fait que ce n'est pas un polynôme constant.

Finalement $L_k - M_k$ est constant ! Comme il est nul en 0 c'est le polynôme nul. On retrouve $L_k = M_k$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ L_k = M_k.}$$

(b) i. Rappelons que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est l'unique base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$:

$\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^k) = \mathbb{R}_k[X]$ et $< P_k, X^k >> 0$.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une famille orthonormée donc libre de $\mathbb{R}_k[X]$ qui a pour cardinal $k+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_k[X]$. Donc $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

- $\mathrm{Vect}(P_0) = \mathrm{Vect}(1)$. Alors P_0 est constant et non nul. Donc $P_0(0)$ n'est pas nul.

- Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. $\deg P_k \leqslant k$ car P_k appartient à $\mathbb{R}_k[X]$.

Si $\deg P_k < k$ alors $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une famille libre de cardinal $k+1$ de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui est de dimension k !! Donc $\deg P_k = k$.

P_k est orthogonal à tous les éléments de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{k-1})$ qui engendre $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Donc P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

P_k est alors un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$ (!) orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur.

D'après **2. (b)** : $|P_k(0)| = \|P_k\|$. Or $\|P_k\|$ n'est pas nulle car P_k n'est pas nul. Donc $P_k(0) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ P_k(0) \neq 0.}$$

Remarque Nous venons de voir que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ |P_k(0)| = \|P_k\|$. *Montrons que ceci vaut encore pour* $k = 0$.

$P_0 = 1$ *et* $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1^2 \times e^{-t}\, dt = \Gamma(1) = 1$. *Donc* $\|P_0\| = 1 = |1| = |P_0(0)|$.

Retenons donc que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ |P_k(0)| = \|P_k\|$.

ii. Posons alors $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k = \dfrac{1}{P_k(0)}\, P_k$.

- P_0 engendre $\mathbb{R}_0[X]$ donc P_0 est constant. Alors $P_0 = P_0(0)$ et ainsi $L_0 = 1$.

- $\deg L_0 = 0$.

Nous avons vu plus haut que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $\deg P_k = k$. Alors pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $\deg L_k = k$.

Finalement $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \deg L_k = k$.

• $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k(0) = \dfrac{1}{L_k(0)}\, L_k(0) = 1.$

• Soient i et j deux éléments de $[\![0,n]\!]$. $L_i = \dfrac{1}{P_i(0)}\, P_i$ et $L_j = \dfrac{1}{P_j(0)}\, P_j$ donc $< L_i, L_j >= \dfrac{1}{P_i(0)}\, \dfrac{1}{P_j(0)}\ < P_i, P_j >$.

Si $i \neq j$, $< P_i, P_j >= 0$ donc $< L_i, L_j >= 0$. Supposons $i = j$.

$< L_i, L_j >=< L_i, L_i >= \dfrac{1}{P_i(0)}\, \dfrac{1}{P_i(0)}\ < P_i, P_i >= \dfrac{1}{\big(P_i(0)\big)^2}||P_i||^2$. Or $|P_i(0)| = ||P_i||$ donc $\big(P_i(0)\big)^2 = ||P_i||^2$.

Ceci donne $< L_i, L_j >=< L_i, L_i >= \dfrac{1}{\big(P_i(0)\big)^2}||P_i||^2 = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ < L_i, L_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

$(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

Alors $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. Ceci achève de montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifie $(\mathcal{R})$.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_n) = \left(\frac{1}{P_0(0)}\, P_0, \frac{1}{P_1(0)}\, P_1, \ldots, \frac{1}{P_n(0)}\, P_n\right) \text{ est une famille qui vérifie } (\mathcal{R}).}$$

(c) (a) et (b) montrent que :

$$\boxed{\text{il existe une famille } (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ de polynômes et une seule vérifiant } (\mathcal{R}).}$$

Rappelons avant de déterminer L_1 et L_2 que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt = (n-1)!$.

• L_1 est de degré 1 et $L_1(0) = 1$ donc il existe un réel non nul a tel que $L_1 = a\,X + 1$.

$L_0 = 1$ et L_1 est orthogonal à L_0.

Donc $0 =< L_0, L_1 >= \displaystyle\int_0^{+\infty} L_0(t)\, L_1(t)\, e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} (a\,t + 1)\, e^{-t}\, dt = a \int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\, dt + a \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt.$

$0 = a\,\Gamma(2) + \Gamma(1) = a \times 1 + 1$. Alors $a = -1$ et $L_1 = -X + 1$.

• L_2 est de degré 2 et $L_2(0) = 1$ donc il existe un réel non nul b et un réel c tels que $L_2 = b\,X^2 + c\,X + 1$.

Notons que $L_2 = b\,X^2 - c\,(-X+1) + c + 1 = X^2 - c\,L_1 + (c+1)\,L_0$ et que L_2 est orthogonal à L_0 et L_1. De plus (L_0, L_1) est une famille orthonormée.

Alors $0 =< L_2, L_0 >= b\ < X^2, L_0 > -c < L_1, L_0 > +(c+1)\ < L_0, L_0 >= b\ < X^2, L_0 > -c \times 0 + (c+1) \times 1$.

Donc $0 = b\ < X^2, L_0 > +c + 1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t}\, dt + c + 1 = b\,\Gamma(3) + c + 1 = 2b + c + 1$. Ainsi $2b + c = -1$.

De même $0 =< L_2, L_1 >= b\ < X^2, L_1 > -c < L_1, L_1 > +(c+1)\ < L_1, L_0 >= b\ < X^2, L_1 > -c \times 1 + (c+1) \times 0 = b\ < X^2, L_1 > -c$.

$0 = b \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,(-t+1)\, e^{-t}\, dt - c = -b \int_0^{+\infty} t^3\, e^{-t}\, dt + b \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t}\, dt - c = -b\,\Gamma(4) + b\,\Gamma(3) - c = -6b + 2b - c.$

$c = -4b$ et $2b + c = -1$. Alors $-1 = 2b - 4b = -2b$. $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = -2$. Ainsi $L_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - 2\,X + 1$.

$$\boxed{L_1 = -X + 1 \text{ et } L_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2\,X + 1.}$$

R

EXERCICE

JFC

Exercice | PC | QSP ESCP 2005

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, x_2, ..., x_n sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

V1 $$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \underset{\uparrow}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right).$$

Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

Donc $$n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}. \quad \underline{\underline{n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}}.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$

V2 Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t) = \frac{1}{t}$. f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $f''(t) = \frac{2}{t^3} \geqslant 0$. Alors f est convexe sur $]0,+\infty[$.

Donc $$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Ainsi $\displaystyle\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$. Alors $\displaystyle\frac{n^2}{1} \leq \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$; $\displaystyle n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.

V3 Il est de notoriété publique que $\displaystyle\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ car $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont strictement positifs (la moyenne harmonique est inférieure à la moyenne géométrique elle même inférieure à la moyenne arithmétique ...)

Donc $\displaystyle\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{n}$. Comme $n>0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k} > 0$: $\displaystyle n^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k}$.

R

EXERCICE 28

JFC

Exercice | PC | **Oral ESCP et QSP HEC 2011 (ou presque)**

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\displaystyle \operatorname*{Max}_{(a_{i,j})\in O_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ existe et en donner la valeur.

Indication *On pourra faire intervenir l'élément U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent* 1.

Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. Soit U la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Posons $V=AU=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$.

$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad v_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\times 1=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$.

${}^tUAU=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}1\times v_i=\sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\langle U,AU\rangle$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous notons $\|\cdot\|$ la norme associée.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\langle U,AU\rangle\leqslant|\langle U,AU\rangle|\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant}\|U\|\,\|AU\|.$$

$\|U\|=\sqrt{\langle U,U\rangle}=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}1^2}=\sqrt{n}$.

$\|AU\|=\sqrt{\langle AU,AU\rangle}=\sqrt{{}^t(AU)AU}=\sqrt{{}^tU\,{}^tAAU}\overset{A\in O_n(\mathbb{R})}{=}\sqrt{{}^tUU}=\sqrt{\langle U,U\rangle}=\|U\|=\sqrt{n}$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\leqslant\sqrt{n}\times\sqrt{n}=n$. Montrons que le maximum cherché existe et vaut n.

Il suffit de trouver un élément de O_n pour lequel la double somme vaut n.

Or $I_n\in O_n$ car ${}^tI_nI_n=I_n^2=I_n$ et la double somme associée à I_n vaut n.

Plus de doute $\displaystyle\operatorname*{Max}_{(a_{i,j})\in O_n(\mathbb{R})}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$ existe et vaut n.

R

EXERCICE 23

JFC

Exercice **Utilisation de Cauchy-Schwarz dans un problème d'optimisation.**

▶ *Intéressant mais il faut savoir qu'une fonction numérique de n variables continue sur un fermé borné F possède un maximum et un minimum sur F.*

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$.

$$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F,\ f(X) = \sum_{i \neq j} x_i\, x_j$$

Q1. Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de F. Exprimer $f(X)$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Q2. Montrer que f possède un maximum que nous noterons M. Montrer que $M = n-1$ et trouver les éléments de F qui réalisent ce maximum.

Q1 Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F$. $f(X)=\displaystyle\sum_{i\neq j} x_i x_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} x_i x_j$

En faisant " $i \leftrightarrow j$ " dans la deuxième somme il vient $f(X)=\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_j x_i$.

donc $f(X) = 2\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$

Or $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$. Ainsi $f(X) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Q2 F est la boule fermée de centre $O=(0,0,\dots,0)$ et de rayon 1.

Alors F est un fermé borné.

f est polynomiale donc f est continue sur le fermé borné F.

Alors f possède un maximum sur F que nous noterons M.

Remarque.. f possède également un minimum sur F que nous pouvons noter m.

Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F$.

$$f(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\times x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \underset{①}{\overset{\text{Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^n}{\leqslant}} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1^2}_{=n}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big) - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = (n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \underset{②}{\overset{X\in F}{\leqslant}} n-1$$

cherchons alors un élément (et même les éléments) X de F tel que $f(X)=n-1$.

Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F$.

$f(X)=n-1$ ssi ① et ② sont des égalités.

① est une égalité si et seulement si la famille $((1,1,\dots,1),(x_1,x_2,\dots,x_n))$ est liée d'après le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz.

R

Comme $(1,1,\cdots,1)$ n'est pas $0_{\mathbb{R}^n}$, ① est une égalité si et seulement si

$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda(1,1,\cdots,1)$ ce qui est équivalent à $x_1=x_2=\cdots=x_n$, non ?

② est une égalité si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$ $(n-1>0)$

Alors $f(X)=n-1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ n x_1^2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{\sqrt{n}} \\ \text{ou} \\ x_1=x_2=\cdots=x_n=-\frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$.

Posons $A=(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ fois}})$ et $B=(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ fois}})$ et résumons les résultats obtenus.

1) $A\in F$ et $B\in F$

2) $\forall X\in F,\ f(X)\le n-1=f(A)=f(B)$.

3) $\forall X\in F,\ f(X)=n-1 \Longleftrightarrow X=A$ ou $X=B$.

Alors $n-1$ est le maximum de f sur F. A et B sont les seuls points de F qui réalisent le maximum.

Exercice.. Montrer que le minimum de f sur F est -1.

R

EXERCICE 30

Exercice **PC** f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge (on pourra montrer que $A \to \int_1^A \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ est majorée en utilisant une intégration par parties et Cauchy-Schwarz).

---

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f^2(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right)^2 = \left(f'(0)\right)^2.$

Ainsi $t \to \dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) $t \to \dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. Ainsi pour montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge, il suffit de montrer que $g : A \to \displaystyle\int_1^A \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

Soit A un élément de $]1,+\infty[$. $t \to -\dfrac{1}{t}$ et f^2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. En intégrant par parties il vient alors :

$$g(A) = \left[-\frac{1}{t} f^2(t)\right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{t}\right) 2\, f(t)\, f'(t)\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{A} f^2(A) + f^2(1) + 2\int_1^A \frac{f(t)}{t} f'(t)\, \mathrm{d}t \leqslant f^2(1) + 2\int_1^A \frac{f(t)}{t} f'(t)\, \mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué à la dernière intégrale donne :

$$g(A) \leqslant f^2(1) + 2\sqrt{\int_1^A \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t}\sqrt{\int_1^A \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t} \leqslant f^2(1) + 2\sqrt{g(A)}\sqrt{\int_1^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

Posons $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t$. Alors $g(A) \leqslant f^2(1) + 2\sqrt{g(A)}\,\sqrt{J}$. Envisageons deux cas.

Premier cas : $g(A) \geqslant 1$. Alors en divisant par $\sqrt{g(A)}$ on obtient : $\sqrt{g(A)} \leqslant \dfrac{f^2(1)}{\sqrt{g(A)}} + 2\sqrt{J} \leqslant f^2(1) + 2\sqrt{J}$.

$g(A) \leqslant \left(f^2(1) + 2\sqrt{J}\right)^2$. $g(A) \leqslant \mathrm{Max}\left(\left(f^2(1) + 2\sqrt{J}\right)^2, 1\right)$!!

Deuxième cas : $g(A) < 1$. Alors on a encore $g(A) \leqslant \mathrm{Max}\left(\left(f^2(1) + 2\sqrt{J}\right)^2, 1\right)$.

Ainsi g est majorée sur $[1,+\infty[$ ce qui achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

EXERCICE

JFC

Exercice Q1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E.

$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une famille déléments de E de cardinal n et P est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Q2. $\boxed{\text{P}}$ P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

> P est orthogonale si et seulement si les colonnes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :
>
> P est orthogonale si et seulement si les colonnes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

> P est orthogonale si et seulement si les lignes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :
>
> P est orthogonale si et seulement si les lignes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

Q1 Posons $P = (p_{i,j})$ et $Q = {}^tPP = (q_{i,j})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $q_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell,i}\, p_{\ell,j}$.

De plus $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $e'_j = \sum_{k=1}^{n} p_{k,j}\, e_k$.

La base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant orthonormée : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e'_i, e'_j \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell,i}\, p_{\ell,j} = q_{i,j}$.

Notons que $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une famille de cardinal égale à la dimension de E et rappelons qu'une famille orthonormée de E est libre. Alors :

$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ base orthonormée de E

$\Updownarrow$ $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ famille orthonormée de E

$\Updownarrow$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e'_i, e'_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $q_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Updownarrow$

${}^tPP = I_n$

$\Updownarrow$

P est orthogonale.

Ainsi $\underline{(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \text{ est une base orthonormée de } E \text{ si et seulement si } P \text{ est orthogonale}}$.

R

(Q2) * Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice P.

P est alors la matrice de la famille $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée.

Alors d'après Q1 : <u>P est orthogonale si et seulement si $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormée</u> de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de cardinal n qui est la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme une famille orthonormée est libre : $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc <u>P est orthogonale si et seulement si $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

Notons $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de P et $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n$ les colonnes de ${}^tP$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \hat{C}_i = {}^tL_i$.

De plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle L_i, L_j \rangle \underset{}{\overset{\text{produit scalaire canonique de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}{=}} L_i\,{}^tL_j = {}^t\hat{C}_i \hat{C}_j = \langle \hat{C}_i, \hat{C}_j \rangle$ produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors : $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée si et seulement si $(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n)$ est une famille orthonormée.

Ainsi : P orthogonale $\underset{\text{adé}}{\Leftrightarrow}$ ${}^tP$ orthogonale $\Leftrightarrow$ $(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n)$ famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc : <u>P orthogonale $\Leftrightarrow$ $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.</u>

Ici encore $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Donc : <u>P orthogonale $\Leftrightarrow$ $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.</u>

R.

EXERCICE 32

JFC

Exercice Q1. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) $\boxed{\mathbf{P}}$ Montrer que si P est orthogonale : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.

b) Réciproquement on suppose que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.

Montrer que $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ < PX, PY >=< X, Y >$. En déduire que P est orthogonale.

Finalement $\boxed{P \text{ est orthogonale si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|.}$

Q2. f est un endomorphisme de E de matrice P dans la base **orthonormée** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

P est orthogonale si et seulement si $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Q1 a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\|PX\|^2 = {}^t(PX)PX = {}^tX\,{}^tPPX \underset{{}^tPP = I_n}{=} {}^tXX = \|X\|^2$. Or $\|PX\| \geqslant 0$ et $\|X\| \geqslant 0$,

donc $\underline{\|PX\| = \|X\|}$.

b) Soit $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\langle PX, PY\rangle \overset{*}{=} \frac{1}{2}\left[\|PX+PY\|^2 - \|PX\|^2 - \|PY\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|P(X+Y)\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\right]$.

$\langle PX, PY\rangle = \frac{1}{2}\left[\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\right] \overset{*}{=} \langle X, Y\rangle$.

* " $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left[\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right]$ "

$\underline{\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ \langle PX, PY\rangle = \langle X, Y\rangle}$.

$\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ {}^tXY = \langle X, Y\rangle = \langle PX, PY\rangle = {}^t(PX)PY = {}^tX\,{}^tPPY$.

$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tX({}^tPP - I_n)Y = 0$.

$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \langle X, ({}^tPP - I_n)Y\rangle = 0$.

$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ({}^tPP - I_n)Y \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^\perp$. Or $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ({}^tPP - I_n)Y = 0$. Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $({}^tPP - I_n)E_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tPP - I_n$ est nulle.

Alors ${}^tPP - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. ${}^tPP = I_n$. $\underline{P \text{ est orthogonale}}$.

Q2 . Supposons que P est orthogonale. Soit x un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$. $f(x)$ a pour matrice PX dans $\mathcal{B}$.

Alors $\|f(x)\| \underset{\mathcal{B} \text{ est orthonormée}}{=} \|PX\| \underset{P \text{ est orthogonale}}{=} \|X\| \underset{\mathcal{B} \text{ est orthonormée}}{=} \|x\|$. Donc $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

R.

• Réciproquement supposons que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit x l'élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ est orthonormée donc $\|f(x)\| = \|PX\|$ et $\|x\| = \|X\|$.

Alors $\|PX\| = \|f(x)\| = \|x\| = \|X\|$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$. Alors d'après Q1 P est orthogonale.

<u>P est orthogonale si et seulement si $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.</u>

R

EXERCICE 33

Exercice **D'après HEC 2005** **Matrice symétrique. Matrice orthogonale.**

Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétriques, orthogonales et dont la première ligne est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

JFC Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ont ces qualités.

---

* Supposons que A est solution. Sa première ligne est $(1\ 0\ 0)$ et comme elle est symétrique sa première colonne est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Alors $\exists(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}^3$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&\beta\\0&\beta&\delta\end{pmatrix}$. Comme A est orthogonale ses colonnes constituent une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\alpha^2+\beta^2=\beta^2+\delta^2=1$ et $\alpha\beta+\beta\delta=0$. Donc $\exists\theta\in[0,2\pi[$, $\alpha=\cos\theta$ et $\beta=\sin\theta$.

Alors $\delta^2=1-\beta^2=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$; $\delta=\cos\theta$ ou $\delta=-\cos\theta$.

Notons que si $\delta=-\cos\theta$: $\alpha\beta+\beta\delta=0$.

Supposons $\delta=\cos\theta$. Alors $0=\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=\sin(2\theta)$. $2\theta\equiv 0\ [\pi]$.

$\theta\equiv 0\ [\frac{\pi}{2}]$. Alors $\theta\in\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\}$.

Ainsi $A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$ ou $A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{K}$ ou $A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{L}$ ou $A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}}$

Si A est solution ou $\exists\theta\in[0,2\pi[$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$ ou $A\in\{I_3,K,L,-K\}$

Notons que K et $-K$ sont contenues dans "le premier ensemble" ($\theta=\frac{\pi}{2}$ et $\theta=\frac{3\pi}{2}$)

Ainsi l'ensemble S des solutions est contenu dans $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix};\ \theta\in[0,2\pi[\right\}\cup\left\{I,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$

* Notons qu'il est assez clair que I_3 et $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ sont solutions.

Soit $\theta\in[0,2\pi[$. Posons $A_\theta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$. A_θ est symétrique et sa première ligne est $(1\,0\,0)$

$${}^tA_\theta A_\theta=A_\theta^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos^2\theta+\sin^2\theta&\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\0&\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta&\sin^2\theta+(-\cos\theta)^2\end{pmatrix}=I_3$$

car A_θ est orthogonale et ainsi A_θ est solution.

Finalement l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix};\ \theta\in[0,2\pi[\right\}\cup\left\{I_3,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

R

EXERCICE 34 — JFC

Exercice **S** **Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. E est un espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

$\mathcal{B}'$ est la base de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M (autrement dit M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

$\mathcal{B}''$ est la base orthonormée de E déduite de $\mathcal{B}'$ par le procédé d'orthormalisation de Schmidt.

On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$.

On note R la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}'$.

Montrer que $M = QR$, que $Q^{-1} = {}^tQ$ et que R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Exercice **PC** **Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

On Pourra interpréter la matrice A comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et utiliser la base déduite de $\mathcal{B}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Je corrige le deuxième. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ la famille des colonnes de la matrice A.

Posons $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}' = (C_1, C_2, \dots, C_n)$.

A est inversible donc $\operatorname{rg} A = n$. Alors $\dim \operatorname{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = n$. Comme $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est un sous-espace vectoriel de E et que E est de dimension n : $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = E$. Alors $\mathcal{B}' = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une famille génératrice de E dont le cardinal coïncide avec la dimension de E. Ainsi $\underline{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E}$.

Notons que A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ car un élément de E coïncide avec la matrice de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

Nous écrivons $A = \operatorname{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Soit $\mathcal{B}''$ la base orthonormée de E déduite de la base $\mathcal{B}'$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Notons Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et R la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}'$. $Q = \operatorname{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$ et $R = \operatorname{Pas}(\mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

1) $\underline{Q \text{ est une matrice orthogonale de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

2) Posons $\mathcal{B}'' = (W_1, W_2, \dots, W_n)$. Rappelons alors que

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Vect}(W_1, W_2, \dots, W_k) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_k)$
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\langle C_k, W_k \rangle > 0$

donc pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, c_k est combinaison linéaire de $w_1, w_2, \dots, w_k$.

Pas de doute alors, la matrice de passage R de la base $\mathcal{B}''$ à la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure. Posons $R=(r_{i,j})$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

$$c_j = \sum_{i=1}^{k} r_{i,j}\, w_i \,.\quad 0 < \langle c_j, w_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} r_{i,j} \langle w_i, w_j\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ (w_1,w_2,\dots,w_n) \text{ est orthonormée}}}{=} r_{j,j}.$$

donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $r_{j,j} > 0$

<u>R est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.</u>

3) Montrons que $A = QR$. Soit à montrer que $Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}') = Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}'') \times Pas(\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$ … qui est presque du cours !

Rappelons que $Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}') = M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ (matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$), $Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = M(Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B})$ et $Pas(\mathcal{B}'',\mathcal{B}') = M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $Id_E = Id_E \circ Id_E$ et à utiliser la formule donnant la matrice d'une composée. Alors

$$\underset{1}{M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})} = \underset{3}{M(Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B})} \times \underset{2}{M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')}$$

```tikzcd
\underset{}{\overset{\mathcal{B}'}{E}} \arrow[r, "1\ Id_E"] \arrow[d, "2\ Id_E"'] & \overset{\mathcal{B}}{E} \\
\underset{\mathcal{B}''}{E} \arrow[ur, "Id_E\ 3"'] &
```

donc $Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}') = Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}'') \times Pas(\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$

Alors $\underline{A = QR}$. ceci achève la preuve du résultat.

<u>Remarque</u>.. La connaissance de cette décomposition rend simple la résolution de

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX = B \quad (B \in M_{n,1}(\mathbb{R})).$$

En effet $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = B \Leftrightarrow QRX = B \overset{{}^tQQ = I_n}{\Leftrightarrow} RX = {}^tQB$.

On se ramène ainsi à la résolution d'un système triangulaire supérieure. Système très simple à résoudre.