R **EXERCICE 34**

J.F.C.

Exercice **PC** **Condition nécessaire et suffisante pour que la suite des puissances d'une matrice symétrique converge vers 0.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\,A}{\mathrm{Max}} |\lambda|$.

Q1. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \rho(A)\,\|X\|$.

Q2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A^pX)_{p\geqslant 0}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ (c'est à dire $\lim_{p\to+\infty} \|A^pX\| = 0$)

ii) $\rho(A) < 1$

contenu dans ESSEC M1 2004

Q1 Soit $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement ~~~~ associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = \sum_{k=1}^{n} x_k X_k$.

$AX = \sum_{k=1}^{n} x_k AX_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k X_k$.

comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée : $\|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k\alpha_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \alpha_k^2 \leqslant (\rho(A))^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = (\rho(A))^2 \|X\|^2$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k^2 \geqslant 0$ et $\alpha_k^2 \leqslant (\rho(A))^2$

$\|AX\|^2 \leqslant (\rho(A))^2 \|X\|^2$ et : $\|AX\| \geqslant 0$, $\rho(A) \geqslant 0$, $\|X\| \geqslant 0$.

Alors $\|AX\| \leqslant \rho(A) \|X\|$.

$\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|.}$

Q2 Supposons i). $\rho(A) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}A}{\mathrm{Max}} |\lambda|$. $\exists \beta \in \mathrm{Sp}A$, $\rho(A) = |\beta|$.

Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre β.

$AU = \beta U$ donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^pU = \beta^p U$.

Or par hypothèse $(A^pU)_{p\geqslant 0}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\lim_{p\to+\infty} \|A^pU\| = 0$.

Alors $0 = \lim_{p\to+\infty} \|\beta^p U\| = \lim_{p\to+\infty} (|\beta^p| \|U\|) = \lim_{p\to+\infty} (|\beta|^p \|U\|)$.

Or U n'est pas nul donc $\|U\| \neq 0$. Ainsi $\lim_{p\to+\infty} |\beta|^p = 0$. Alors $\underline{\rho(A) = |\beta| < 1}$.

Supposons ii). Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\|A^pX\| \leqslant (\rho(A))^p \|X\|$

- Clair pour $p = 1$ d'après Q1.
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $p+1$.

$\|A^{p+1}X\| = \|A(A^pX)\| \underset{\uparrow}{\leqslant} \rho(A)\|A^pX\| \leqslant \rho(A)(\rho(A))^p \|X\| = (\rho(A))^{p+1}\|X\|$. Ceci achève la récurrence

Q1

L'hypothèse de récurrence et $\rho(A) \geqslant 0$

R

$0 \leq \rho(A) < 1$ donc $\lim\limits_{p \mapsto +\infty} (\rho(A))^p = 0$.

Alors si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \|A^p X\| \leq (\rho(A))^p \|X\|$ et $\lim\limits_{p \mapsto +\infty} \left((\rho(A))^p \|X\|\right) = 0$.

Par encadrement on peut dire que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{p \mapsto +\infty} \|A^p X\| = 0$.

donc pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A^p X)_{p \geq 0}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

---

ceci achève de montrer l'équivalence entre i) et ii).

R

EXERCICE 35

Exercice **PC** **Matrice d'un produit scalaire. Réduction d'une matrice symétrique.**

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pas nécessairement orthogonale !) et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Q1. a) On pose $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$, $\varphi_A(X,Y) = {}^tXAY$. Montrer que φ_A est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi_A\right)$ et Q est la matrice de passage la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$. Montrer que ${}^tQAQ = I_n$.

Q2. Montrer le résultat proposé en remarquant que ${}^tQBQ$ est symétrique.

Q1 a) Pour faciliter les écritures nous posons $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $(X,Y) \in E^2$. ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ & $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tXAY \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$... donc ${}^tXAY$ est un réel.

  $\forall (X,Y) \in E^2$, $\varphi_A(X,Y) \in \mathbb{R}$. <u>$\varphi_A$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.</u>

- Soit $(X,Y,Z) \in E^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

  $\varphi_A(X, \lambda Y + Z) = {}^tXA(\lambda Y + Z) = \lambda\, {}^tXAY + {}^tXAZ = \lambda \varphi_A(X,Y) + \varphi_A(X,Z)$.

  <u>$\forall (X,Y,Z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi_A(X, \lambda Y + Z) = \lambda \varphi_A(X,Y) + \varphi_A(X,Z)$.</u>

- $\forall (X,Y) \in E^2$, $\varphi_A(X,Y) = {}^tXAY \underset{{}^tXAY \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})}{=} {}^t({}^tXAY) = {}^tY\,{}^tA\,{}^t({}^tX) \underset{A \text{ est symétrique}}{=} {}^tYAX = \varphi_A(Y,X)$.

  <u>$\forall (X,Y) \in E^2$, $\varphi_A(X,Y) = \varphi_A(Y,X)$.</u>

- Les valeurs propres de A sont strictement positives donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tXAX > 0$.

  Alors $\forall X \in E - \{0_E\}$, $\varphi_A(X,X) > 0$. De plus $\varphi_A(0_E, 0_E) = {}^t0_E A 0_E = 0$.

  Ainsi 1) <u>$\forall X \in E, \varphi_A(X,X) \geqslant 0$</u>

  2) <u>$\forall X \in E, \varphi_A(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0_E$.</u>

Ceci achève de montrer que <u>φ_A est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

b) Soit $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont les colonnes de Q donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $X_j = Q E_j$.

Posons $A' = (a'_{i,j}) = {}^t Q A Q$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{i,j} = {}^t E_i A' E_j$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{i,j} = {}^t E_i {}^t Q A Q E_j = {}^t(Q E_i) A Q E_j = {}^t X_i A X_j = \varphi_A(X_i, X_j)$.

Or $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de $(M_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi_A)$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{i,j} = \varphi_A(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Par conséquent $A' = I_n$. $\underline{\underline{{}^t Q A Q = I_n}}$.

Q2 ${}^t Q B Q \in M_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^t Q B Q) = {}^t Q\, {}^t B\, {}^t({}^t Q) = {}^t Q\, {}^t B\, Q \underset{\downarrow}{=} {}^t Q B Q$. (B est symétrique)

${}^t Q B Q$ est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ donc il existe une matrice orthogonale U de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$ telles que :

${}^t U ({}^t Q B Q) U = U^{-1} ({}^t Q B Q) U = D$. Alors ${}^t Q B Q = U D U^{-1}$.

Or Q est inversible car Q est une matrice de passage d'une base à une autre base.

Notons que dans ces conditions ${}^t Q$ est inversible et $({}^t Q)^{-1} = {}^t Q^{-1}$.

Donc ${}^t Q B Q = U D U^{-1}$ donne : $B = ({}^t Q)^{-1} U D U^{-1} Q^{-1}$ ou $B = {}^t Q^{-1} U D U^{-1} Q^{-1}$.

$B = {}^t Q^{-1}\, {}^t U^{-1} D U^{-1} Q^{-1} = {}^t(U^{-1} Q^{-1}) D U^{-1} Q^{-1}$. Posons $P = U^{-1} Q^{-1}$.

↑ U est orthogonale donc $U^{-1} = {}^t U$ et $U = {}^t U^{-1}$

$\underline{P \text{ est inversible comme produit de deux matrices inversibles}}$ et $\underline{{}^t P D P = B}$.

$P = U^{-1} Q^{-1} = {}^t U Q^{-1}$. ${}^t P P = {}^t({}^t U Q^{-1})\, {}^t U Q^{-1} = {}^t Q^{-1} U\, {}^t U Q^{-1} \underset{\uparrow}{=} {}^t Q^{-1} Q^{-1} = ({}^t Q)^{-1} Q^{-1}$

(U est orthogonale.)

${}^t P P = ({}^t Q)^{-1} I_n Q^{-1} \underset{\uparrow}{=} ({}^t Q)^{-1} ({}^t Q A Q) Q^{-1} = ({}^t Q)^{-1}\, {}^t Q A Q Q^{-1}$.

${}^t Q A Q = I_n$

${}^t P P = I_n A I_n = A$. $\underline{\underline{{}^t P P = A}}$.

$\underline{\underline{\text{Donc il existe une matrice inversible } P \text{ de } M_n(\mathbb{R}) \text{ et une matrice diagonale } D \text{ de } M_n(\mathbb{R})}}$

$\underline{\underline{\text{telles que } A = {}^t P P \text{ et } B = {}^t P D P.}}$

R

EXERCICE 36

Exercice PC

Q1. **Décomposition de Iwasawa d'une matrice inversible.**

Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

$\mathcal{B}'$ est la base de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M (autrement dit M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

$\mathcal{B}''$ est la base orthonormée de E déduite de $\mathcal{B}'$ par le procédé d'orthormalisation de Schmidt.

On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et R la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}'$.

Montrer que $M = QR$, que $Q^{-1} = {}^tQ$ et que R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Q2. **Décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives (A est définie positive).

a) Montrer qu'il existe une matrice inversible M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$ (diagonaliser A).

b) Montrer alors, en utilisant Q1, qu'il existe matrice R, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A = {}^tRR$.

c) Montrer l'unicité de R.

d) Envisager une réciproque.

Q1 M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc M est la matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. $M = M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

De même $Q = M(Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B})$ et $R = M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.

Remarquons que $Id_E = Id_E \circ Id_E$!! Alors le théorème donnant la matrice d'une composée de deux applications linéaires donne :

$$\underset{①}{M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})} = M(\underset{②}{Id_E}, \mathcal{B}'', \mathcal{B}) \times M(\underset{③}{Id_E}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$ ... ce que confirme le schéma suivant.

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[r, "Id_E"', "①"] \arrow[d, "Id_E\ ②"'] & \underset{\mathcal{B}}{E} \\ \underset{\mathcal{B}''}{E} \arrow[ur, "Id_E\ ③"'] & \end{tikzcd}$$

Alors $\underline{M = QR}$.

Q est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}''$ à la base orthonormée $\mathcal{B}$ donc

Q est une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Q est inversible et $Q^{-1} = {}^tQ$.

Posons $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. $\mathcal{B}''$ est la base orthonormée de E déduite de $\mathcal{B}'$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt donc :

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ et $\langle u_k, v_k \rangle > 0$.

R

donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, u_k est combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_k$.
Ainsi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est triangulaire supérieure. Donc R est triangulaire supérieure.
Posons $R = (r_{i,j})$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Notons que $r_{i,i}$ est strictement positif.

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ u_i = \sum_{k=1}^{n} r_{k,i} v_k = \sum_{\ell=1}^{i} r_{\ell,i} v_\ell$$

↑ R est triangulaire supérieure.

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ 0 < \langle u_i, v_i \rangle = \sum_{\ell=1}^{i} r_{\ell,i} \langle v_\ell, v_i \rangle \underset{\uparrow}{=} r_{i,i}. \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ r_{i,i} > 0.$$

$$\langle v_\ell, v_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc **R est une matrice triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.**

Q2 a) A est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

* Il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telles que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.
A et D sont semblables alors $\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k > 0$.
Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$. ${}^t\Delta\Delta = \Delta^2 = \mathrm{Diag}((\sqrt{\alpha_1})^2, (\sqrt{\alpha_2})^2, \dots, (\sqrt{\alpha_n})^2) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D$.
Ainsi $A = PDP^{-1} = P\,{}^t\Delta\Delta\,{}^tP = {}^t(\Delta\,{}^tP)(\Delta\,{}^tP)$. Posons $M = \Delta\,{}^tP$. $A = {}^tMM$.
${}^tP = P^{-1}$ est inversible et $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$ l'est également car $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sqrt{\alpha_i} \underset{\alpha_i > 0}{\neq} 0$
M est donc inversible comme produit de deux matrices inversibles.
*** Il existe une matrice inversible M de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.**

b) Comme M est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$, Q1 permet de dire qu'il existe une matrice orthogonale Q de $M_n(\mathbb{R})$ et une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telles que $M = QR$.
Alors $A = {}^t(QR)QR = {}^tR\,{}^tQQR = {}^tR I_n R$. $A = {}^tRR$.
*** Il existe une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ triangulaire à diagonale strictement positive telle que $A = {}^tRR$.**

c) Soit $R' = (r'_{ij})$ une seconde matrice de $M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Posons $A = (a_{ij})$ et $R = (r_{i,j})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow r_{i,j} = 0.$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = \sum_{\ell=1}^{n} r_{\ell,i}\, r_{\ell,i} = \sum_{\ell=1}^{i} (r_{\ell,i})^2.$

$a_{1,1} = (r_{1,1})^2$. Donc $\underline{r_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}}$ car $r_{1,1} > 0$. Supposons que $i \in [\![2,n]\!]$.

$a_{i,i} = (r_{i,i})^2 + \sum_{\ell=1}^{i-1} (r_{\ell,i})^2$; $\underline{r_{i,i} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{\ell=1}^{i-1} (r_{\ell,i})^2}}$. car $r_{i,i} > 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$. Supposons $i \geq 2$

$$a_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} r_{\ell,i}\, r_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{i} r_{\ell,i}\, r_{\ell,j} = r_{i,i}\, r_{i,j} + \sum_{\ell=1}^{i-1} r_{\ell,i}\, r_{\ell,j}.$$

Alors $\underline{r_{i,j} = \frac{1}{r_{i,i}} \left[a_{i,j} - \sum_{\ell=1}^{i-1} r_{\ell,i}\, r_{\ell,j} \right]}$. Supposons que $i = 1$.

$a_{i,j} = a_{1,j} = \sum_{\ell=1}^{n} r_{\ell,1}\, r_{\ell,j} = r_{1,1}\, r_{1,j}$; $r_{i,j} = r_{1,j} = \frac{1}{r_{1,1}} (a_{i,j}) = \frac{1}{r_{1,1}} (a_{1,j}).$

Ainsi $\underline{r_{1,j} = \frac{1}{r_{1,1}} a_{1,j}}$.

De même $r'_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$, $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $r'_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{\ell=1}^{i-1} (r'_{\ell,i})^2}$, et

$\forall j \in [\![2,n]\!]$, $r'_{1,j} = \frac{1}{r'_{1,1}} a_{1,j}$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $2 \leq i < j \Rightarrow r'_{i,j} = \frac{1}{r'_{i,i}} \left[a_{i,j} - \sum_{\ell=1}^{i-1} r'_{\ell,i}\, r'_{\ell,j} \right]$

Montrons alors par récurrence que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de R est égale à la i^{e} ligne de R'.

- $r_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = r'_{1,1}$.

  $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $r_{1,j} = \frac{1}{r_{1,1}} a_{1,j} = \frac{1}{r'_{1,1}} a_{1,j} = r'_{1,j}$.

  La propriété est vraie pour $i = 1$.

• Supposons la propriété <u>vraie jusqu'à $i-1$</u> pour $i \in [\![2,n]\!]$ et montrons-la pour i

→ $r_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{\ell=1}^{i-1} (r_{\ell,i})^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{a_{i,i} - \sum_{\ell=1}^{i-1} (r'_{\ell,i})^2} = r'_{i,i}$. $r_{i,i} = r'_{i,i}$

hypothèse de récurrence

→ $\forall j \in [\![1,n]\!],\ i > j \Rightarrow r_{i,j} = 0 = r'_{i,j}$

hypothèse de récurrence

→ Soit $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $i < j$.

$$r_{i,j} = \frac{1}{r_{i,i}}\left[a_{i,j} - \sum_{\ell=1}^{i-1} r_{\ell,i}\, r_{\ell,j}\right] = \frac{1}{r'_{i,i}}\left[a_{i,j} - \sum_{\ell=1}^{i-1} r_{\ell,i}\, r_{\ell,j}\right] \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{r'_{i,i}}\left[a_{i,j} - \sum_{\ell=1}^{i-1} r'_{\ell,i}\, r'_{\ell,j}\right].$$

donc $r_{i,j} = r'_{i,j}$.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ r_{i,j} = r'_{i,j}$. Ceci achève la récurrence. Alors $R = R'$.

Ainsi <u>R est unique.</u>

d) Soit A' une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une matrice R' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A' = {}^tR'R'$.
Montrons que A' est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.

${}^tA' = {}^t({}^tR'R') = {}^tR'\,{}^t({}^tR') = {}^tR'R' = A'$.

Soit λ une valeur propre de A'. Soit U un vecteur propre associé. $A'U = \lambda U$.

${}^tR'R'U = \lambda U$. ${}^tU\,{}^tR'R'U = \lambda\,{}^tUU$; ${}^t(R'U)R'U = \lambda \|U\|^2$. $\|R'U\|^2 = \lambda \|U\|^2$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $\lambda = \dfrac{\|R'U\|^2}{\|U\|^2} \geq 0$. Supposons que λ est nul. Alors $\|R'U\|^2 = 0$. $R'U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

R' est triangulaire sans zéro sur sa diagonale donc R' est inversible. Alors $U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!

Ainsi $\lambda \neq 0$. Comme $\lambda \geq 0$: $\lambda > 0$.

A' est symétrique à valeurs propres strictement positives.

Ainsi <u>la réciproque est vraie.</u>

<u>Conclusion</u>. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est symétrique à valeurs propres strictement positives si et seulement si il existe une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A = {}^tRR$.

R

Remarque.. A un abus près, accepté par Turbo Pascal $(r_{i,j})$ est définie par :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i>j \Rightarrow r_{i,j}=0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad r_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{l=1}^{i-1} (r_{l,i})^2}$
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i<j \Rightarrow r_{i,j} = \frac{1}{r_{i,i}} \left[a_{i,j} - \sum_{l=1}^{i-1} r_{l,i}\, r_{l,j} \right].$

Formules qui permet de calculer ligne après ligne la matrice $(r_{i,j})$ à partir de la matrice $(a_{i,j})$.

Cela peut se programmer sans difficulté de la manière suivante.

```
Program Decomposition_de_Cholesky;

Const Dimmax=10;

Type matrice=array[1..DimMax,1..DimMax] of real;

Procedure Cholesky(n:integer; A:matrice;var R:matrice);

var i,j,k:integer;s:real;

begin

for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do R[i,j]:=0;


for i:=1 to n do
    begin
    s:=0; for k:=1 to i-1 do s:=s+sqr(R[k,i]);
    R[i,i]:=sqrt(A[i,i]-s);
    for j:=i+1 to n do
        begin
        s:=0;
        for k:=1 to i-1 do s:=s+R[k,i]*R[k,j];
        R[i,j]:=(A[i,j]-s)/R[i,i];
        end;
    end;


end;
```

La procédure qui fait le travail. Le reste est anecdotique...

```
Procedure EntreMatrice(var n:integer;var A:matrice);

var i,j:integer;

begin
```

R

```
write('Donner n. n=');readln(n);

for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
    begin
    write('Donner le coeff ',i,' et ',j,' ');readln(A[i,j]);
    end;

end;

Procedure EcritMatrice(n:integer;S:matrice);

var i,j:integer;

begin

for i:=1 to n do
    begin
    for j:=1 to n do write(S[i,j],'  ');
    writeln;
    end;


end;

var n:integer;A,R:matrice;


begin

EntreMatrice(n,A);
Cholesky(n,A,R);
EcritMatrice(n,R);

readln;                 ← Facultatif...

end.
```

Exercice **La norme associé au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme d'algèbre.**

ECRICOME 2007 exercice 2.

▶ *Bon entraînement.*

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A, et on note $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

On admet que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

1) Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(AB) = \text{tr}({}^tAB) \quad (\text{où } {}^tAB = {}^tA \times B)$$

Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire.

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que : $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

a) Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

On notera par la suite λ_i le coefficient $d_{i,i}$ de la matrice $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

b) Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.

En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

c) On pose $S = {}^tP(B{}^tB)P = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = \text{tr}(D), \quad [N(B)]^2 = \text{tr}(S), \quad [N(AB)]^2 = \text{tr}(SD)$$

d) Montrer que : $\text{tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{i,i}$.

e) On note E_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels.

Montrer que : ${}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2$, où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.

Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de $s_{i,i}$?

f) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\Big)$ puis conclure que : $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

1. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $C = {}^tAB = (c_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}$. Alors $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ki}$.

$$\boxed{\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ki}.}$$

Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Notons que φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

$\varphi(A, \lambda B + C) = \mathrm{tr}\left({}^tA(\lambda B + C)\right) = \mathrm{tr}\left(\lambda\, {}^tAB + {}^tAC\right) = \lambda\, \mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tAC) = \lambda\, \varphi(A,B) + \varphi(A,C)$ car tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall (A,B,C) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(A, \lambda B + C) = \lambda\, \varphi(A,B) + \varphi(A,C)$.

Ainsi φ est linéaire à droite.

• Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa transposée ont même trace.

Ainsi $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \mathrm{tr}\left({}^tB\, {}^t({}^tA)\right) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \varphi(B,A)$.

$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$. φ est symétrique.

• Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$. Ainsi $\varphi(A,A) \geqslant 0$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,A) \geqslant 0$. φ est positive.

• Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(A,A) = 0$.

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0$ et $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ki}^2 \geqslant 0$. Ainsi $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ki}^2 = 0$.

Alors $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ki} = 0$. Donc $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. φ est définie. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. a. ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tAA) = {}^tA\, {}^t({}^tA) = {}^tAA$. ${}^tAA$ est alors une matrice symétrique d'ordre n à coefficients réels. Ainsi :

il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $P^{-1}({}^tAA)P = {}^tP({}^tAA)P = D$.

b. $({}^tAA)X = \lambda X$. En multipliant à gauche par ${}^tX$ on obtient ${}^tX({}^tAA)X = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, \|X\|^2$.

Ou ${}^tX\, {}^tAAX = \lambda\, \|X\|^2$. Soit encore ${}^t(AX)AX = \lambda\, \|X\|^2$. Finalement $\|AX\|^2 = \lambda\, \|X\|^2$.

X n'étant pas nul (X est un vecteur propre) sa norme ne l'est pas davantage et : $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$.

λ est donc un réel positif ou nul.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } {}^tAA,\ \lambda \geqslant 0.}$$

c. Montrons rapidement que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace.

Soit M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$.

Alors $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}\left(Q^{-1}(NQ)\right) = \mathrm{tr}\left((NQ)Q^{-1}\right)$ d'après le rappel proposé au début de l'exercice.

Ainsi $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(NQQ^{-1}) = \mathrm{tr}(N)$.

Notons alors que ${}^tAA$ et D sont semblables car $P^{-1}({}^tAA)P = {}^tP({}^tAA)P = D$.

Ainsi $\left[N(A)\right]^2 = \varphi(A, A) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}(D)$.

De même (ou presque) B^tB et S sont semblables car $S = {}^tP(B^tB)P = P^{-1}(B^tB)P$. Donc $\mathrm{tr}(B^tB) = \mathrm{tr}(S)$.

Ainsi $\left[N(B)\right]^2 = \varphi(B, B) = \mathrm{tr}({}^tBB) = \mathrm{tr}(B^tB) = \mathrm{tr}(S)$.

$\mathrm{tr}(SD) = \mathrm{tr}\left(({}^tPB\,{}^tBP)({}^tP\,{}^tAAP)\right) = \mathrm{tr}({}^tPB\,{}^tBP\,{}^tP\,{}^tAAP) = \mathrm{tr}(P^{-1}B\,{}^tB\,{}^tAAP)$ car ${}^tP = P^{-1}$.

$P^{-1}B\,{}^tB\,{}^tAAP$ et $B\,{}^tB\,{}^tAA$ étant semblables il vient :

$\mathrm{tr}(SD) = \mathrm{tr}(P^{-1}B\,{}^tB\,{}^tAAP) = \mathrm{tr}(B\,{}^tB\,{}^tAA)$. Or $\mathrm{tr}(B\,{}^tB\,{}^tAA) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tAAB)$.

Alors : $\mathrm{tr}(SD) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tAAB) = \mathrm{tr}\left({}^t(AB)AB)\right) = \varphi(AB, AB) = \left[N(AB)\right]^2$. Ou plus simplement (? !) :

$\left[N(AB)\right]^2 = \varphi(AB, AB) = \mathrm{tr}\left({}^t(AB)AB)\right) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tAAB) = \mathrm{tr}\left({}^tB\,PD\,{}^tPB\right) = \mathrm{tr}\left({}^tPB^tBPD\right) = \mathrm{tr}(SD)$. Finalement :

$$\boxed{\left[N(A)\right]^2 = \mathrm{tr}(D).} \quad \boxed{\left[N(B)\right]^2 = \mathrm{tr}(S).} \quad \boxed{\left[N(AB)\right]^2 = \mathrm{tr}(SD).}$$

d. Posons $U = SD = (u_{ij})$. $\mathrm{tr}(SD) = \sum_{i=1}^n u_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik}\,d_{ki} = \sum_{i=1}^n s_{ii}\,d_{ii} = \sum_{i=1}^n s_{ii}\,\lambda_i$.

$$\boxed{\mathrm{tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\,s_{ii}.}$$

e. Ici i est un élément de $[\![1, n]\!]$.

$||{}^tBPE_i||^2 = {}^t({}^tBPE_i){}^tBPE_i = {}^tE_i{}^tP\,{}^t({}^tB){}^tBPE_i = {}^tE_i{}^tPB\,{}^tBPE_i = {}^tE_iSE_i$.

$$\boxed{{}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2.}$$

Rappelons que SE_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de S. Ainsi $SE_i = \sum_{k=1}^n s_{ki}\,E_k$.

Notons $< .,. >$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et rappelons que $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est une base ortonormée de $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), < .,. >\right)$.

Alors ${}^tE_iSE_i =< E_i, SE_i >=< E_i, \sum_{k=1}^n s_{ki}\,E_k >= s_{ii}$.

$$\boxed{{}^tE_iSE_i = s_{ii}.}$$

$s_{ii} = {}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2 \geqslant 0$.

$$\boxed{s_{ii} \geqslant 0.}$$

f. $$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n s_{ii}\right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{k=1}^n s_{kk}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{k=1}^n s_{kk}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i\,s_{ii} + \lambda_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n s_{kk}\right).$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii} + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} s_{kk}\right).$$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ s_{kk} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} s_{kk}\right) \geqslant 0$.

Ainsi $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii}$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right).}$$

Donc $\displaystyle[N(AB)]^2 = \mathrm{tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right) = \mathrm{tr}(D)\ \mathrm{tr}(S) = [N(A)]^2\ [N(B)]^2$.

Alors : $[N(AB)]^2 \leqslant [N(A)]^2\ [N(B)]^2$.

Comme $N(AB)$, $N(A)$, $N(B)$ sont des réels positifs ou nuls il vient alors :

$$\boxed{N(AB) \leqslant N(A)\, N(B).}$$

R

EXERCICE 38

ancienne correction...

JFC

Exercice $E = \mathbb{R}_2[X]$. On munit E du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

Q1. Déterminer une base orthonormée (L_1, L_2, L_3) de E telle que, pour tout i élément de $[\![1,3]\!]$, L_i est de degré égal à $i-1$ et de coefficient dominant strictement positif (on pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de schmidt... $(1, 2\sqrt{3}\,(X-\frac{1}{2}), 6\sqrt{5}\,(X^2 - X + \frac{1}{6})))$.

Q2. On pose : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \Phi(P,Q) = \dfrac{1}{2}(P(0)Q(1) + P(1)Q(0))$

On note $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \Phi(L_i, L_j)$.

a) L'application Φ définit-elle un produit scalaire sur E ?

b) Déterminer la matrice A et indiquer pourquoi elle est diagonalisable.

Justifier l'existence d'une matrice inversible R de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tRAR = D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tR = R^{-1}$$

d) Soit $P = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3$. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors on a : $\Phi(P,P) = {}^tXAX$.

Comment s'exprime $\Phi(P,P)$ en fonction $Y = R^{-1}X$?

Donner également l'expression de $< P, P >$ en fonction de $Y = R^{-1}X$.

e) On pose : $\forall P \in E - \{o_E\},\ f(P) = \dfrac{P(0)P(1)}{\int_0^1 P^2(t)\,dt}$

Utiliser ce qui précède pour montrer que f possède un maximum dont on donnera la valeur.

Q1 Posons $U_1 = 1$, $U_2 = X$, $U_3 = X^2$.

Posons $V_1 = 1$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $V_2 = U_2 + \alpha V_1$ et choisissons α pour que V_1 et V_2 soient orthogonaux.

$<V_1, V_2> = 0 \iff <V_1, U_2 + \alpha V_1> = 0 \iff \alpha = -\dfrac{<V_1, U_2>}{<V_1, V_1>} = -\dfrac{<V_1, U_2>}{\|V_1\|^2}$.

$<V_1, U_2> = \int_0^1 V_1(t)U_2(t)dt = \int_0^1 t\,dt = 1/2$. $\quad \|V_1\|^2 = \int_0^1 V_1(t)V_1(t)dt = \int_0^1 1\,dt = 1$.

Ainsi pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, V_1 et V_2 sont orthogonaux. Désormais $V_2 = U_2 - \frac{1}{2}V_1 = X - \frac{1}{2}$.

Soit $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Posons $V_3 = U_3 + \beta V_1 + \gamma V_2$ et choisissons (β, γ) pour que V_3 soit orthogonal à V_1 et V_2.

$\langle V_3,V_1\rangle = \langle U_3,V_1\rangle + \beta\langle V_1,V_1\rangle + \delta\langle V_2,V_1\rangle = \langle U_3,V_1\rangle + \beta\|V_1\|^2 = \langle U_3,V_1\rangle + \beta$.
$\uparrow \|V_1\|=1$.

$\langle V_3,V_2\rangle = \langle U_3,V_2\rangle + \beta\langle V_1,V_2\rangle + \delta\langle V_2,V_2\rangle = \langle U_3,V_2\rangle + \delta\|V_2\|^2$.

Ainsi V_3 est orthogonal à V_1 et V_2 si et seulement si $\beta = -\langle U_3,V_1\rangle$ et $\delta = -\dfrac{\langle U_3,V_2\rangle}{\|V_2\|^2}$.

$\langle U_3,V_1\rangle = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$. $\langle U_3,V_2\rangle = \int_0^1 t^2(t-\frac{1}{2})\,dt = \int_0^1 (t^3-\frac{t^2}{2})\,dt = \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

$\|V_2\|^2 = \langle V_2,V_2\rangle = \langle V_2, U_2-\frac{1}{2}V_1\rangle = \langle V_2,U_2\rangle = \int_0^1 (t-\frac{1}{2})t\,dt = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Alors V_3 est orthogonal à V_1 et V_2 si et seulement si $\beta = -\frac{1}{3}$ et $\delta = -\dfrac{1/12}{1/12} = -1$.

Nous posons donc $V_3 = U_3 - \frac{1}{3}V_1 - V_2 = X^2 - \frac{1}{3} - (X-\frac{1}{2}) = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

(V_1,V_2,V_3) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$, $\|V_1\| = 1$ et $\|V_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$\|V_3\|^2 = \langle V_3,V_3\rangle = \langle V_3, U_3-\frac{1}{3}V_1-V_2\rangle = \langle V_3,U_3\rangle = \int_0^1 (t^2-t+\frac{1}{6})t^2\,dt = \left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{18}\right]_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{18}$.

$\|V_3\|^2 = \frac{1}{180}(36-45+10) = \frac{1}{180} = \frac{1}{6^2\times 5}$. $\|V_3\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

Posons $L_1 = \frac{1}{\|V_1\|}V_1 = 1$, $L_2 = \frac{1}{\|V_2\|}V_2 = 2\sqrt{3}(X-\frac{1}{2})$ et $L_3 = 6\sqrt{5}(X^2-X+\frac{1}{6})$.

(L_1,L_2,L_3) est une famille orthonormée de trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ de cardinal 3 ; $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ ainsi (L_1,L_2,L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons que $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\deg L_i = i-1$ et le coeff dominant de L_i est strictement positif

$(L_1,L_2,L_3) = (1, 2\sqrt{3}(X-\frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(X^2-X+\frac{1}{6}))$ est une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_2[X]$

telle que : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\deg L_i = i-1$. et le coefficient dominant de L_i est strictement positif.

Q2 a) De toute évidence ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

$\phi(L_2,L_2) = \frac{1}{2}(L_2(0)L_2(1) + L_2(1)L_2(0)) = L_2(0)L_2(1) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = -3 < 0$.

$\exists L_2 \in E$, $\phi(L_2,L_2) < 0$. ϕ n'est pas un produit scalaire sur E.

R

b) A est une matrice symétrique car $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ \phi(L_i,L_j) = \phi(L_j,L_i)$.

$\phi(L_1,L_1) = L_1(0)\,L_1(1) = 1$, $\phi(L_2,L_2) = -3$, $\phi(L_3,L_3) = L_3(0)\,L_3(1) = \frac{6\sqrt{5}}{6} \times \frac{6\sqrt{5}}{6} = 5$.

$\phi(L_1,L_2) = (L_2(1)+L_2(0)) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = 0$; $\phi(L_1,L_3) = \frac{1}{2}(L_3(0)+L_3) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

$\phi(L_2,L_3) = \frac{1}{2}\left[L_2(0)L_3(1) + L_2(1)L_3(0)\right] = \frac{1}{2}\left[(-\sqrt{3})(\sqrt{5}) + \sqrt{3}\sqrt{5}\right] = 0$.

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}$. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$E_2 \neq 0$ et $AE_2 = -3E_2$, -3 est valeur propre de A et E_2 est un vecteur propre associé.

Notons que $AE_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \sqrt{5}\,AE_1$; $A(E_3 - \sqrt{5}E_1) = 0$ et $E_3 - \sqrt{5}E_1 \neq 0$.

Alors 0 est valeur propre de A et $E_3 - \sqrt{5}E_1$ est un vecteur propre associé.

$A(E_1 + \sqrt{5}E_3) = AE_1 + \sqrt{5}AE_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = 6(E_1 + \sqrt{5}E_3)$.

Alors 6 est valeur propre de A et $E_1 + \sqrt{5}E_3$ est un vecteur propre associé.

Finalement $\mathrm{Sp}\,A = \{-3, 0, 6\}$ et les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles.

Soient X_1, X_2, X_3 trois vecteurs unitaires de $SEP(A,-3)$, $SEP(A,0)$ et $SEP(A,6)$.

On peut prendre par exemple : $X_1 = E_2$, $X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(E_3 - \sqrt{5}E_1)$ et $X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(E_1 + \sqrt{5}E_3)$.

X_1, X_2, X_3 sont deux à deux orthogonaux car ce sont trois vecteurs propres d'une matrice symétrique et ceux-ci associés à trois valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors (X_1, X_2, X_3) est une famille orthonormée donc libre de cardinal 3 constituée d'éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

(X_1, X_2, X_3) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres -3, 0 et 6.

Soit R la matrice de passage de la base orthonormée (E_1,E_2,E_3) à la base orthonormée (X_1,X_2,X_3). R est orthogonale donc ${}^tR=R^{-1}$.

Remarque. $R=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt5/\sqrt6 & 1/\sqrt6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt6 & \sqrt5/\sqrt6\end{pmatrix}$ convient...

Et ${}^tRAR=R^{-1}AR=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

d) ${}^tXAX=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}\left[x_i\left(\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j\right)\right]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$.

$$\phi(P,P)=\phi\left(\sum_{i=1}^3 x_iL_i,\sum_{j=1}^3 x_jL_j\right)=\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 x_ix_j\phi(L_i,L_j)=\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 x_ix_ja_{ij}={}^tXAX.$$

$\phi(P,P)={}^tXAX.$ $\qquad \phi(P,P)={}^tXAX$ et $X=RY$.

$\phi(P,P)={}^t(RY)ARY={}^tY\,{}^tRARY={}^tYDY.$

$\phi(P,P)={}^tYDY.$ $\qquad \langle P,P\rangle=\|X\|^2={}^tXX={}^t(RY)RY={}^tY\,{}^tRRY={}^tYY=\|Y\|^2.$ $\langle P,P\rangle=\|Y\|^2.$

e) Soit $P=x_1L_1+x_2L_2+x_3L_3\in E$. Posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=R^{-1}X$.

Supposons $P\neq 0_E$. Alors $\int_0^1 P^2(t)\,dt\neq 0$, $(x_1,x_2,x_3)\neq 0_{\mathbb R^3}$ et $(y_1,y_2,y_3)\neq 0_{\mathbb R^3}$ $(Y=0\Rightarrow RY=0\Rightarrow X=0\ldots)$.

$$f(P)=\frac{P(0)\,P(1)}{\int_0^1 P^2(t)\,dt}=\frac{\phi(P,P)}{\langle P,P\rangle}=\frac{{}^tXAX}{\|P\|^2}\underset{\uparrow}{=}\frac{{}^tYDY}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\frac{-3y_1^2+6y_3^2}{\|X\|^2}.$$

(L_1,L_2,L_3) BON

$\|X\|^2={}^tXX={}^t(RY)RY={}^tY\,{}^tRRY\underset{\uparrow}{=}{}^tYY=\|Y\|^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ ... déjà vu !

Rorthogonale

Alors $f(P)=\dfrac{-3y_1^2+6y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\leq\dfrac{6(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=6$ avec égalité si et seulement si

$\hookrightarrow$ OK ?!

$y_1=y_2=0$. $\quad f(P)\leq 6$ avec égalité si et seulement si $y_1=y_2=0$

Réciproquement posons $\begin{pmatrix}\hat x_1\\\hat x_2\\\hat x_3\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\hat P=\hat x_1L_1+\hat x_2L_2+\hat x_3L_3$.

* $\hat P\neq 0_E$ $\left(\hat P=0\Rightarrow\hat x_1=\hat x_2=\hat x_3=0\underset{R\text{ inversible}}{\Rightarrow}0=0,\ 0=0\text{ et }1=0\ !!\right)$ * $f(\hat P)=6$.

* $\forall P\in E-\{0_E\}$, $f(P)\leq f(\hat P)$. Alors $\underset{P\in E-\{0_E\}}{\operatorname{Max}} f(P)$ existe et vaut 6.

⚠ $P\in E-\{0_E\}$ réalise ce maximum si la matrice de ses coord. dans (L_1,L_2,L_3) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 6 ... donc si $\exists\delta\in\mathbb R^*$, $P=\delta(L_2+\sqrt5L_3)$. ⚠ Nous avons également obtenu : $\underset{X\in\mathbb R^3,\ \|X\|=1}{\operatorname{Max}}{}^tXAX=\operatorname{Max}\operatorname{Sp}A$ avec A symétrique et réelle.

R. **EXERCICE 39** JFC

Exercice Q1. M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A = {}^tMM$.

a) Montrer que la matrice A est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ telles que $\Delta^2 = {}^tPAP$. Que dire de la matrice $MP\Delta^{-1}$?

c) Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.

Q2. Montrer rapidement que ceci vaut encore pour M quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q3. Trouver U et V pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1 a) $A = {}^tMM$ donc ${}^tA = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = A$. A est symétrique.

A est symétrique et réelle donc ses valeurs propres sont réelles.

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

${}^tMMX = AX = \lambda X$ donc ${}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX$; $\|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$

Ainsi $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}$. M inversible donc nécessairement $MX \neq 0$ ($MX = 0 \Rightarrow X = 0$!)

donc $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} > 0$.

Finalement A est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

b) A est symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale. $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$. $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \mathrm{Spec}(D) = \mathrm{Spec}(A)$; ainsi

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$. Posons $\Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$; ${}^tPAP = D = \Delta^2$.

Notons que Δ est inversible et diagonale ; $\Delta^2 = {}^tPAP = {}^tP\,{}^tMMP$.

donc $I_n = \Delta^{-1}\,{}^tP\,{}^tMMP\Delta^{-1}$ or ${}^t\Delta^{-1} = \Delta^{-1}$ car Δ^{-1} est diagonale.

Ceci donne alors : ${}^t\Delta^{-1}\,{}^tP\,{}^tMMP\Delta^{-1} = I_n$ ou : ${}^t(MP\Delta^{-1})MP\Delta^{-1} = I_n$.

$MP\Delta^{-1}$ est une matrice orthogonale.

c) Posons $V = P$ et $U = MP\Delta^{-1}$. U et V sont deux matrices orthogonales.

$MP\Delta^{-1} = U$; ${}^tUMP\Delta^{-1} = {}^tUU = I_n$; ${}^tUMP\Delta^{-1} = I_n$; ${}^tUMP = \Delta$ ou encore ${}^tUMV = \Delta$.

Ainsi il existe deux matrices orthogonales U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tUMV$ soit diagonale. $\boxed{\text{Ou}}$ il existe deux matrices orthogonales U et V (resp. U' et V') de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = U\Delta\,{}^tV$ (resp. $M = {}^tU'\Delta V'$).

R.

(Q2) Notons que $A = {}^tMM$ est toujours symétrique et réelle.

On peut montrer que ses valeurs propres sont positives ou nulles sans difficulté.

Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives alors A est inversible et donc nécessairement M est inversible. Nous sommes alors ramenés à Q1.

Supposons dès lors que 0 est valeur propre de A.

Si 0 est la seule valeur propre de A, A est nulle car A est diagonalisable.

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tMMX = 0$; $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|^2 = {}^tX\,{}^tMMX = 0$; $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MX = 0$.

Alors $M = 0$. Il est aisé de trouver U et V orthogonales ~~telles que~~ telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.

Supposons maintenant que 0 est valeur propre de A mais que ce n'est pas la seule valeur propre de A.

Soit r la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

On peut trouver une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tPAP = D = \begin{bmatrix} 0 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_{r+1} & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

avec $\lambda_{r+1} > 0, \lambda_{r+2} > 0, \dots, \lambda_n > 0$

Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de $H = MP$.

${}^tHH = {}^tP\,{}^tMMP = {}^tPAP = D$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \in [\![1,r]\!] \\ \lambda_i & \text{si } i = j \in [\![r+1,n]\!] \end{cases}$ n'est-il pas.

Posons alors $\forall i \in [\![r+1,n]\!]$ $C'_i = \dfrac{1}{\|C_i\|}C_i = \dfrac{1}{\sqrt{{}^tC_iC_i}}C_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}C_i$

$(C'_{r+1}, C'_{r+2}, \dots, C'_n)$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Complétons-la d'éléments $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $(C'_1, C'_2, \dots, C'_r, C'_{r+1}, \dots, C'_n)$ soit une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons U la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}' = (C'_1, \dots, C'_n)$. U est orthogonale car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales.

H est la matrice de $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ dans $\mathcal{B}_0$.

Notons Δ la matrice de $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ dans $\mathcal{B}'$; $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \sqrt{\lambda_{r+1}} & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$.

Ainsi $\Delta = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}_0)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(C_1, C_2, \dots, C_n)$

Ce qui s'écrit $\Delta = U^{-1}H = {}^tUMP$.

R.

Pour $V = P$. $\Delta = {}^tUMP = {}^tUMV$ est alors diagonale. Ceci achève la preuve du résultat car U et V sont orthogonales.

Q3 $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $A = {}^tMM = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Spec}(A) = \{0, 3\}$

$SEP(A,0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \end{pmatrix}\right)$; $SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ +1/\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix}\right)$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associée aux valeurs propres $0, 3$ et 3.

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

P est orthogonale, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & 0 & -2/\sqrt6 \end{pmatrix}$ et ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

${}^t(MP)MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $MP = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt2 & -3/\sqrt6 \\ 0 & -1/\sqrt2 & -3/\sqrt6 \\ 0 & -2/\sqrt2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ici $C_1 = 0$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt2 \\ -2/\sqrt2 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt6 \\ -3/\sqrt6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nous prenons $C'_2 = \frac{1}{\|C_2\|} C_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt6 \\ -2/\sqrt6 \end{pmatrix}$

$C'_3 = \frac{1}{\|C_3\|} C_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \\ +1/\sqrt3 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt3 & -1/\sqrt6 & -1/\sqrt2 \\ +1/\sqrt3 & -2/\sqrt6 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale et ${}^tUMP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt3 \end{pmatrix}$ est diagonale.

En posant $V = P$ on obtient le résultat voulu.

R

EXERCICE 40

Exercice **Théorème de Courant-Fischer** A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

k est un élément de $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

Q1. Montrer que $F_k = \mathrm{Vect}(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$ est un élément de $\mathcal{F}_k$ et que :

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$$

Q2. F est un élément de $\mathcal{F}_k$.

a) Montrer que si X est un élément non nul de F : $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_n$. En déduire l'existence de $\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Montrer qu'il existe un élément non nul Y appartenant à F et à $\mathrm{Vect}(E'_k, E'_{k+1}, \ldots, E'_n)$.

Montrer que $\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$

Q3. Montrer que $\operatorname*{Min}_{F \in \mathcal{F}_k} \operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$.

▶ **Contrôle**

Q4. Montrer que $\operatorname*{Max}_{F \in \mathcal{F}_{n+1-k}} \operatorname*{Inf}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$.

Q1 $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$ est une famille génératrice de F_k. C'est aussi une famille libre car c'est une sous-famille d'une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$ est une base de F_k de cardinal k. $\dim F_k = k$.

Donc $F_k = \mathrm{Vect}(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$ est un élément de $\mathcal{F}_k$.

Soit X un élément non nul de F_k. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ les coordonnées de X dans la base $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$. $X = \sum_{i=1}^{k} x_i E'_i$ et $AX = \sum_{i=1}^{k} x_i AE'_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda_i E'_i$

Comme $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$ est une base orthonormée de F_k : $\langle X, AX\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i (x_i \lambda_i)$.

Alors ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \|X\|^2 = \lambda_k \langle X, X\rangle$.

$\left\{\begin{array}{l} \forall i \in [\![1, k]\!] : \\ \lambda_i \leq \lambda_k \text{ et } x_i^2 \geq 0 \end{array}\right.$

Or ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ donc $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$ et ceci pour tout élément non nul de F_k.

$\dim F_k = k \geq 1$ donc F_k n'est pas réduit à $\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\left\{ \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \,;\, X \in F_k \text{ et } X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par λ_k.

R

Alors $\sup\limits_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ existe et est inférieure(e) à λ_k.

$$E'_k \in F_k,\ E'_k \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ et } \frac{{}^tE'_kAE'_k}{{}^tE'_kE'_k} \overset{AE'_k=\lambda_kE'_k}{=} \frac{\lambda_k\,{}^tE'_kE'_k}{{}^tE'_kE'_k} = \lambda_k.$$

Finalement $\sup\limits_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$. Mieux (!) $\max\limits_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$.

Q2 a) En appliquant Q1 pour $k=n$ on obtient : $\sup\limits_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_n$ car

$F_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors si X est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_n$.

Donc si X est un élément non nul de F : $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_n$

Ici encore $F \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ car $\dim F = k \geq 1$.

Alors $\left\{ \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} ;\ X \in F \text{ et } X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \right\}$ est donc une partie non vide et majorée par λ_n

de $\mathbb{R}$. Elle possède une borne supérieure. Alors $\sup\limits_{\substack{X \in F \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ existe et ceci pour

tout F appartenant à $\mathcal{F}_k$.

b) Posons $G_k = \mathrm{Vect}(E'_k, E'_{k+1}, \dots, E'_n)$. $F + G_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $n \geq \dim(F+G_k) = \dim F + \dim G_k - \dim(F \cap G_k)$.

$\dim F \cap G_k \geq \dim F + \dim G_k - n = k + (n-(k-1)) - n = 1$ car $\dim F = k$ et

$\dim G_k = n-(k-1)$ puisque $(E'_k, E'_{k+1}, \dots, E'_n)$ est une base de G_k de cardinal $n-(k-1)$.

$\dim F \cap G_k \geq 1$. $F \cap G_k \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Donc il existe un élément non nul y appartenant à F et à $\mathrm{Vect}(E'_k, E'_{k+1}, \dots, E'_n)$.

Soit $(\gamma'_k, \gamma'_{k+1}, \dots, \gamma'_n)$ la famille des coordonnées de Y dans la base $(E'_k, E'_{k+1}, \dots, E'_n)$.

$Y = \sum_{i=k}^{n} \gamma'_i E'_i$. $AY = \sum_{i=k}^{n} \gamma'_i A E'_i = \sum_{i=k}^{n} \gamma'_i \lambda_i E'_i$.

$\langle Y, AY \rangle = \sum_{i=k}^{n} \gamma'^2_i \lambda_i$ car $(E'_k, E'_{k+1}, \dots, E'_n)$ est une base orthonormée.

donc $^tYAY = \sum_{i=k}^{n} \gamma'^2_i \lambda_i \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} \gamma'^2_i = \lambda_k \|Y\|^2 = \lambda_k \, ^tYY$

$\forall i \in [\![k, n]\!]$
$\gamma'^2_i \geqslant 0$ et $\lambda_i \geqslant \lambda_k$

$^tYY = \|Y\|^2 > 0$ car $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\dfrac{^tYAY}{^tYY} \geqslant \lambda_k$.

Comme $Y \in F$: $\sup\limits_{\substack{X \in F \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{^tXAX}{^tXX} \geqslant \lambda_k$.

Q3 1°) $\forall F \in \mathcal{F}_k$, $\sup\limits_{\substack{X \in F \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{^tXAX}{^tXX} \geqslant \lambda_k$ d'après Q2.

2°) $F_k \in \mathcal{F}_k$ et $\sup\limits_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{^tXAX}{^tXX} = \lambda_k$ d'après Q1.

Alors $\min\limits_{F \in \mathcal{F}_k} \sup\limits_{\substack{X \in F \\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}} \dfrac{^tXAX}{^tXX}$ existe et vaut λ_k.

Exercice .. Faire Q4

EXERCICE 41 J.F.C.

Exercice | S | **Une première approche.**

Une bonne piqûre de rappel...

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Q1. Montrer que $A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k\, {}^tX_k$ (oui c'est du cours mais tous les concepteurs ne le savent pas...)

Q2. On suppose ici que A est symétrique positive. On pose $B = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, X_k\, {}^tX_k$. Monter que B est une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q3. Et si A est symétrique définie positive ?

Q1 Posons $C = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k {}^tX_k$. Notons que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et montrons que $C = A$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $AX_i = \alpha_i X_i$ et $CX_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k \underbrace{{}^tX_k X_i}_{\in \mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k ({}^tX_k X_i) X_k = \alpha_i X_i$

${}^tX_k X_i = \langle X_k, X_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $AX_i = CX_i$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = \sum_{i=1}^{n} \delta_i X_i$.

$AX = \sum_{i=1}^{n} \delta_i A X_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i C X_i = C\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i X_i\right) = CX$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = CX$

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, $AE_j = CE_j$.

Donc pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A coïncide avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de .

Ainsi $A = C$. $A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k {}^tX_k$.

Q2

- $B = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, X_k {}^tX_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ${}^tB = {}^t\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, X_k {}^tX_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, {}^t(X_k {}^tX_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, {}^t({}^tX_k) {}^tX_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, X_k {}^tX_k = B$

  B est symétrique.

- Montrons que $B^2 = A$.

  VI ▲ ${}^t(B^2) = {}^t(B \times B) = {}^tB\, {}^tB = BB = B^2$. B^2 est symétrique.

  ${}^tX_k X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

  ▲ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $BX_i = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k}\, X_k {}^tX_k X_i = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k} ({}^tX_k X_i) X_k = \sqrt{\alpha_i}\, X_i$

  Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $BX_i = \sqrt{\alpha_i}\, X_i$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B^2 X_i = \alpha_i X_i$.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est donc une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B^2 respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Comme B^2 est symétrique Q1 montre que $B^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell X_\ell {}^t X_\ell$ donc $\underline{B^2 = A}$.

V2 $B^2 = B\,B = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\, X_\ell {}^t X_\ell\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i}\, X_i {}^t X_i\right)$.

$$B^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\sqrt{\alpha_i}\, X_\ell \underbrace{{}^t X_\ell X_i}_{\in \mathbb{R}} {}^t X_i = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\sqrt{\alpha_i}\, ({}^t X_\ell X_i)\, X_\ell {}^t X_i$$

$$B^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\sqrt{\alpha_i} \langle X_\ell, X_i \rangle X_\ell {}^t X_i = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\sqrt{\alpha_\ell}\, X_\ell {}^t X_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell X_\ell {}^t X_\ell = A . \quad \underline{B^2 = A}$$

$$\langle X_\ell, X_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{B^2 = A}$ déjà vu dans V1 ! mais pas dans V2 !!

- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B X_i = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\, X_\ell {}^t X_\ell X_i = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell} \langle X_\ell, X_i \rangle X_\ell = \sqrt{\alpha_i}\, X_i$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base (orthonormée) de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres $\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}$.

Alors $\mathrm{Sp}\, B = \{\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}\}$. Donc <u>les valeurs propres de B sont positives ou nulles.</u>

Finalement <u>B est une* matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.</u>

Q3 Supposons que A est symétrique définie positive. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i > 0$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sqrt{\alpha_i} > 0$. Alors les valeurs propres de B sont strictement positives.

Ainsi <u>$B = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\, X_\ell {}^t X_\ell$ est une* matrice symétrique définie positive de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.</u>

* <u>Remarque</u>.. Nous verrons en fait que si A est symétrique positive (resp. définie positive), $B = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\alpha_\ell}\, X_\ell {}^t X_\ell$ est l'unique matrice symétrique positive (resp. définie positive) telle que $B^2 = A$.

Exercice **PC** **Racine carrée symétrique positive (resp. définie positive) d'une matrice réelle symétrique positive (resp. définie positive), version 1.**

A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques positive (resp. définie positive) B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on se ramènera à une matrice diagonale).

Q2. Soient B et C deux matrices solutions du problème.

Montrer que si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre γ alors X est un vecteur propre de C associé à la valeur propre γ.

Montrer que $B = C$.

Q1 A est symétrique et à coefficients réels donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telles que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$. A et D sont semblables donc $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \mathrm{Sp}\, D = \mathrm{Sp}\, A$.

A est symétrique positive (resp. définie positive) donc ses valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives). Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \geqslant 0$.

Posons alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$.

$\Delta^2 = (\mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}))^2 = \mathrm{Diag}((\sqrt{\alpha_1})^2, (\sqrt{\alpha_2})^2, \dots, (\sqrt{\alpha_n})^2) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Ainsi $\Delta^2 = D = P^{-1}AP$; $A = P\Delta^2 P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2 = (P\Delta\, {}^tP)^2$.

Posons alors $B = P\Delta\, {}^tP = P\Delta P^{-1}$.

1) $\underline{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2) $\underline{B^2 = A}$. ${}^t\Delta = \Delta$ car Δ est diagonale

3) ${}^tB = {}^t(P\Delta\, {}^tP) = {}^t({}^tP)\, {}^t\Delta\, {}^tP \overset{\downarrow}{=} P\Delta\, {}^tP = B$. $\underline{\text{B est symétrique}}$.

4) B est semblable à $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$, $\mathrm{Sp}\, B = \mathrm{Sp}\, \Delta = \{\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}\}$.

Les valeurs propres de B sont positives ou nulles si A est symétrique et positive.

Si A est symétrique définie positive : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i > 0$; $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{\alpha_i} > 0$ et ainsi les valeurs propres de B sont strictement positives.

Si A est symétrique positive (resp. définie positive) les valeurs propres de B sont positives ou nulles (resp. strictement positives).

1), 2), 3), 4) montrent que si A est symétrique positive (resp. définie positive), B est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Ainsi si A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice symétrique positive (resp. définie positive) B de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$

Q2 Soit X un vecteur propre de B associé à la valeur propre δ.

$BX = \delta X$; $B^2X = \delta^2 X$; $AX = \delta^2 X$; $C^2X = \delta^2 X$; $(C^2 - \delta^2 I_n)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc $(C+\delta I_n)(C-\delta I_n)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. $\delta \geq 0$ car les valeurs propres de B sont des réels positifs ou nuls et même strictement positifs si A est symétrique définie positive.

1er cas $\delta \neq 0$. Alors $-\delta < 0$ donc $-\delta$ n'est pas valeur propre de C. Alors $C-(-\delta)I_n$ est inversible. Donc :

$0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = (C+\delta I_n)^{-1} 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = (C+\delta I_n)^{-1}(C+\delta I_n)(C-\delta I_n)X = (C-\delta I_n)X$.

Donc $(C-\delta I_n)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. $CX = \delta X$. De plus X est non nul car X est un vecteur propre de B. Ainsi X est un vecteur propre de C associé à la valeur propre δ.

2ème cas. $\delta = 0$ $BX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. $B^2X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. $AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. $C^2X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Comme C est symétrique ${}^tC\,CX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. ${}^tX\,{}^tC\,CX = 0$. ${}^t(CX)CX = 0$.

Alors $\|CX\|^2 = 0$. Donc $\|CX\| = 0$. $CX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. De plus X est non nul car X est un vecteur propre de B. Ainsi X est un vecteur propre de C associé à la valeur propre 0 donc à la valeur propre δ.

Si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre δ alors X est un vecteur propre de C associé à la valeur propre δ.

Remarque.. Le 2ème cas est inutile si A est symétrique définie positive...

B est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. B est aussi une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de C respectivement associés aux valeurs propres $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ d'après ce qui précède.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

$P^{-1}BP = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ et $P^{-1}CP = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Alors $P^{-1}BP = P^{-1}CP$. En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P il vient $\underline{B = C}$.

En conclusion si A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ et une seule dont le carré soit A.

R.

EXERCICE 43

Exercice **Par ♡** **Racine carrée symétrique positive (resp. définie positive) d'une matrice réelle symétrique positive (resp. définie positive), version 2**

Sans doute à faire.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres positives ou nulles, telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on se ramènera à une matrice diagonale).

Q2. Soient B et C deux matrices solutions du problème.

a) Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales R et S et deux matrices diagonales U et V telle que $B = RU{}^tR$ et $C = SV{}^tS$.

b) Montrer que $RU^{2t}R = SV^{2t}S$. En déduire l'existence d'une matrice T telle que $TU^2 = V^2T$. Montrer que $TU = VT$ et que $B = C$.

Q3. Proposer et démontrer un résultat analogue pour une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives.

Q1 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

A et D sont semblables donc ont même spectre. Alors $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Comme les valeurs propres de A sont positives ou nulles : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \geq 0$.

Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$. $\Delta^2 = D = P^{-1}AP$. $A = P\Delta^2P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2$.

Posons $B_0 = P\Delta P^{-1} = P\Delta\, {}^tP$.

- $B_0^2 = A$
- B_0 est semblable à Δ donc $\mathrm{Sp}\, B_0 = \mathrm{Sp}\, \Delta = \{\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}\}$.

  Donc les valeurs propres de B_0 sont positives ou nulles.
- ${}^tB_0 = {}^t(P\Delta\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = B_0$. B_0 est symétrique.

  ↑ Δ est diagonale

<u>B_0 est donc une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles telle que $B_0^2 = A$.</u>

Q2 Supposons que B et C soient deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles telles que $B^2 = A$ et $C^2 = A$.

a) B et C sont deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe deux matrices orthogonales R et S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices diagonales U et V telles que :

R

${}^tR\,B\,R = R^{-1}BR = U$ et ${}^tS\,C\,S = S^{-1}CS = V$; donc telles que $\begin{cases} B = RU\,{}^tR = RUR^{-1} \\ \text{et} \\ C = SV\,{}^tS = SVS^{-1} \end{cases}$.

b) $RU^2\,{}^tR = RU^2R^{-1} = (RUR^{-1})^2 = B^2 = A$. De même $SV^2\,{}^tS = A$.

Alors $\underline{\underline{RU^2\,{}^tR = SV^2\,{}^tS}}$. ou $\underline{\underline{RU^2R^{-1} = SV^2S^{-1}}}$

En multipliant à gauche par S^{-1} et à droite par R il vient :

$S^{-1}R\,U^2 = V^2S^{-1}R$. Posons $T = S^{-1}R$. $\underline{\underline{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } TU^2 = V^2T.}}$

Posons $T = (t_{i,j})$, $U^2 = (\alpha_{i,j})$ et $V^2 = (\beta_{i,j})$.

Posons aussi $U = \mathrm{Diag}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $V = \mathrm{Diag}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$U^2 = \mathrm{Diag}(u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2)$ et $V^2 = \mathrm{Diag}(v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2)$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = \begin{cases} u_i^2 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $\beta_{i,j} = \begin{cases} v_i^2 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$TU^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{i,k}\alpha_{k,j} \right) = (t_{i,j}\,\alpha_{j,j}) = (t_{i,j}\,u_j^2)$. De même $\underline{TU = (t_{i,j}\,u_j)}$.

$V^2T = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k} t_{k,j} \right) = (\beta_{i,i}\,t_{i,j}) = (v_i^2\,t_{i,j})$. De même $\underline{VT = (v_i\,t_{i,j})}$.

$TU^2 = V^2T$ donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}u_j^2 = v_i^2\,t_{i,j}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 = t_{i,j}(u_j^2 - v_i^2) = t_{i,j}(u_j - v_i)(u_j + v_i)$.

R et U sont semblables donc $\mathrm{Sp}\,R = \mathrm{Sp}\,U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Comme les valeurs propres de R sont positives ou nulles : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_i \geqslant 0$. De même $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i \geqslant 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. $u_j + v_i \geqslant 0$.

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas.}}}$. $u_j + v_i > 0$. Comme $t_{i,j}(u_j - v_i)(u_j + v_i) = 0$: $t_{i,j}(u_j - v_i) = 0$.

$\underline{\underline{2^e\text{ cas.}}}$. $u_j + v_i = 0$. Comme $u_j \geqslant 0$ et $v_i \geqslant 0$: $u_j = v_i = 0$. On a encore $t_{i,j}(u_j - v_i) = 0$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}(u_j - v_i) = 0$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}\,u_j = v_i\,t_{i,j}$.

donc $TU = (t_{i,j}\,u_j) = (v_i\,t_{i,j}) = VT$. $\underline{\underline{TU = VT.}}$

$TU = VT$ et $T = S^{-1}R$. Alors $S^{-1}RU = VS^{-1}R$. En multipliant à gauche par S et à droite par R^{-1} il vient $RUR^{-1} = SVS^{-1}$. Donc $\underline{\underline{B = C}}$ (car $R^{-1}BR = U$ et $S^{-1}CS = V$).

Q3 Soit A' une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrons l'existence et l'unicité d'une matrice symétrique B' de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives.

Notons que A' est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles car elles sont strictement positives. Alors d'après Q2 il existe une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles dont le carré est A'. Notons la B'_0.

<u>Unicité</u>.. Supposons que B' soit une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $B'^2 = A'$. B' est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles donc $B' = B'_0$. D'où l'unicité.

<u>Existence</u>.. Posons $B' = B'_0$. B' est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles telle que $B'^2 = A'$. Montrons que les valeurs propres de B' sont strictement positives. Il suffit de prouver que 0 n'est pas valeur propre de B'.

Raisonnons par l'absurde et supposons que 0 est valeur propre de B'. Il existe un élément non nul X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B'X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $A'X = B'B'X = B'0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi 0 est valeur propre de A'. Ceci est impossible car les valeurs propres de A' sont strictement positives.

Donc B' est une matrice symétrique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et telle que $B'^2 = A'$. Ceci achève de montrer que :

<u>Il existe une unique matrice symétrique B' de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et telle que $B'^2 = A'$.</u>

<u>Remarques</u> 1.. En reprenant les idées de Q1 on peut prouver Q3 sans utiliser Q2.

2.. Dans ESCP 88 M1 on montre que B' est un polynôme de A' et on construit à partir de A' une suite de matrices qui converge vers B'.

R

EXERCICE 44

J.F.C.

Exercice | S | **Racine carrée symétrique positive (resp. définie positive) d'une matrice réelle symétrique positive (resp. définie positive), version 3.**

A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques positive (resp. définie positive) B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on pourra diagonaliser A).

Q2. On se propose ici de montrer l'unicité. Soit B une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

f (resp. g) est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de E est A (resp. B). Dans la suite $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

a) Montrer que g commute avec f.

b) Soit λ une valeur propre de f et F_λ le sous-espace propre de f associé.

Montrer que F_λ est stable par g.

Montrer que la restriction g_λ de g à F_λ est un endomorphisme de F_λ diagonalisable à valeur(s) propre(s) positive(s).

En déduire que pour tout x dans F_λ, $g(x) = \sqrt{\lambda}\,x$.

c) Conclure.

Q1 A est symétrique à coefficients réels donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$. A et D sont semblables donc $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \mathrm{Sp}\,D = \mathrm{Sp}\,A$.

A est symétrique positive (resp. définie positive). Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \geqslant 0$.

Posons alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$.

$\Delta^2 = (\mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}))^2 = \mathrm{Diag}((\sqrt{\alpha_1})^2, (\sqrt{\alpha_2})^2, \dots, (\sqrt{\alpha_n})^2) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D.$

$\Delta^2 = D = P^{-1}AP$ donc $A = P\Delta^2P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2 = (P\Delta {}^tP)^2$.

Posons alors $B = P\Delta {}^tP = P\Delta P^{-1}$.

1) $\underline{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2) $\underline{B^2 = A}$.

3) ${}^tB = {}^t(P\Delta {}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\,{}^t\Delta\,{}^tP \underset{\uparrow}{=} P\Delta {}^tP = B$. $\underline{B \text{ est symétrique}}$.

${}^t\Delta = \Delta$ car Δ est diagonale

4) B est semblable à $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$. $\mathrm{Sp}\,B = \mathrm{Sp}\,\Delta = \{\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}\}$.

A est symétrique positive (resp. définie positive) ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \geqslant 0$ (resp. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i > 0$). Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sqrt{\alpha_i} \geqslant 0$ (resp. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sqrt{\alpha_i} > 0$).

Ainsi les valeurs propres de B sont positives ou nulles (resp. strictement positives)

1°, 2°, 3° et 4° montrent que si A est symétrique positive (resp. définie positive), B est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Ainsi si A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice symétrique positive (resp. définie positive) B de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2=A$.

Q2 a) $B^2 = A$ donc $g\circ g = f$. Alors $g\circ f = g\circ g^2 = g^3 = g^2\circ g = f\circ g$.

g commute avec f.

b) Soit $x\in F_\lambda$. $f(x)=\lambda x$. $g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$. $(g\circ f)(x) = \lambda g(x)$.

donc $(f\circ g)(x) = \lambda g(x)$; $f(g(x)) = \lambda g(x)$; $g(x)\in F_\lambda$.

$\forall x\in F_\lambda$, $g(x)\in F_\lambda$. F_λ est stable par g.

Soit g_λ l'application de F_λ dans F_λ qui à tout x dans F_λ associe $g(x)$.

g est linéaire et symétrique donc g_λ est linéaire et symétrique.

g_λ est un endomorphisme symétrique de F_λ et $F_\lambda \neq \{0_E\}$. g_λ est diagonalisable.

toute valeur propre de g_λ est valeur propre de g et les valeurs propres de g sont positives ou nulles (resp. strictement positives).

donc les valeurs propres de g_λ sont au moins positives ou nulles.

Soit α une valeur propre de g_λ. $\exists \hat{x}\in F_\lambda$, $\hat{x}\neq 0_E$ et $g_\lambda(\hat{x}) = \alpha\hat{x}$.

$g(\hat{x}) = \alpha\hat{x}$. $g^2(\hat{x}) = \alpha^2\hat{x}$. $f(\hat{x}) = \alpha^2\hat{x}$. Or $\hat{x}\in F_\lambda$ donc $f(\hat{x}) = \lambda\hat{x}$.

Alors $\hat{x}\neq 0_E$ et $\alpha^2\hat{x} = \lambda\hat{x}$. $\alpha^2=\lambda$ et $\alpha\geqslant 0$. Ainsi $\alpha = \sqrt{\lambda}$.

$\sqrt{\lambda}$ est la seule valeur propre possible de g_λ et g_λ est diagonalisable.

Alors $Sp\, g_\lambda = \{\sqrt{\lambda}\}$ et $SEP(g_\lambda, \sqrt{\lambda}) = F_\lambda$. Donc $\forall x\in F_\lambda$, $g_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}x$.

Ainsi $\forall x\in F_\lambda$, $g_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}x$. $\forall x\in F_\lambda$, $g(x) = \sqrt{\lambda}x$.

c) Supposons que B' soit une seconde matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B'^2 = A$.

R

Soit g' l'endomorphisme de matrice B' dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$.

g' ayant les mêmes qualités que g, pour toute valeur propre λ de f :

$\forall x \in F_\lambda = SEP(f, \lambda)$, $g'(x) = \sqrt{\lambda}\, x = g(x)$.

Donc pour tout $\lambda \in Sp f$, g' et g coïncident sur $F_\lambda = SEP(f, \lambda)$.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de f.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g'(\hat{e}_i) = g(\hat{e}_i)$. Les endomorphismes g' et g coïncident sur la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)$ de E. Donc $g' = g$. Ainsi $B' = B$.

Finalement il existe une matrice B symétrique positive (resp. définie positive) de $M_n(\mathbb{R})$ et une seule telle que $B^2 = A$.