R

EXERCICE 35

JFC

Exercice **S** **Reconnaître une projection orthogonale.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E.
p est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale et préciser sa base.

$$A^2 = \frac{1}{11}\times\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{11^2}\begin{pmatrix} 4+9+9 & -6-30+3 & 6-3+30 \\ -6-30+3 & 9+100+1 & -9+10+10 \\ 6-3+30 & -9+10+10 & 9+1+100 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \frac{1}{11^2}\begin{pmatrix} 22 & -33 & 33 \\ -33 & 110 & 11 \\ 33 & 11 & 110 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A. \quad A^2 = A. \quad p\circ p = p.$$

$p\circ p = p$ et p est un endomorphisme de E. Alors <u>p est une projection</u>. <u>p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ ou $\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$</u>. Déterminons $\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$.

Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3 \in E$. $u\in\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E) \iff p(u)=u \iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$u\in\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} 2x-3y+3z = 11x \\ -3x+10y+z = 11y \\ 3x+y+10z = 11z \end{cases} \iff \begin{cases} -9x-3y+3z=0 \\ -3x-y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \iff 3x+y-z=0.$$

La base de p est l'hyperplan de E d'équation $3x+y-z=0$ dans la base $\mathcal{B}$.

<u>V1</u> La matrice de p dans la base <u>orthonormée</u> $\mathcal{B}$ est symétrique donc p est un endomorphisme symétrique tout en étant une projection. Ainsi <u>p est une projection orthogonale</u>.

<u>p est la projection orthogonale sur l'hyperplan ou le plan F de E d'équation $3x+y-z=0$ dans $\mathcal{B}$.</u>

<u>V2</u> On n'utilise pas cette caractérisation des projections orthogonales. Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3\in E$.

$$u\in\operatorname{Ker} p \iff p(u)=0_E \iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ -3x+10y+z=0 \\ 3x+y+10z=0 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ -3x+10y+z=0 \\ 11y+11z=0 \end{cases}$$

$$u\in\operatorname{Ker} p \iff \begin{cases} z=-y \\ 2x-6y=0 \\ -3x+9y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-y \\ x=3y \end{cases}. \quad \operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}(3e_1+e_2-e_3).$$

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée $(\operatorname{Ker} p)^\perp$ est l'hyperplan d'équation $3x+y-z=0$. Donc $(\operatorname{Ker} p)^\perp = F$

or $(\operatorname{Ker} p)^\perp = \operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} p$. p est bien une projection orthogonale.

Mieux p est la projection orthogonale sur F. Nous retrouvons le résultat de V1.

R

EXERCICE 38

JFC

Exercice **S** **Recherche de la matrice d'une projection orthogonale 1.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E. F est le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ dans $\mathcal{B}$. p est la projection orthogonale sur F. Montrer que :

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On donnera trois méthodes.

$\boxed{\text{V1}}$ F est l'hyperplan d'équation $x+2y-z=0$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$. Alors $F^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par $u = e_1+2e_2-e_3$.

Notons q la projection orthogonale sur $F^\perp$. $\left(\frac{1}{\|u\|}u\right)$ est une base orthonormée de $F^\perp$ donc

$\forall v \in E,\ q(v) = \langle v, \frac{1}{\|u\|}u\rangle \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\|u\|^2}\langle v,u\rangle u$. Notons que $\|u\|^2 = 1+4+1 = 6$.

$\forall v = xe_1+ye_2+ze_3 \in E,\ q(v) = \frac{1}{6}\langle xe_1+ye_2+ze_3, e_1+2e_2-e_3\rangle (e_1+2e_2-e_3)$.

$\forall v = xe_1+ye_2+ze_3 \in E,\ q(v) = \frac{1}{6}(x+2y-z)(e_1+2e_2-e_3)$.

Ainsi $q(e_1) = \frac{1}{6}(e_1+2e_2-e_3)$, $q(e_2) = \frac{1}{6}2(e_1+2e_2-e_3)$ et $q(e_3) = \frac{1}{6}(-1)(e_1+2e_2-e_3)$.

donc $M_{\mathcal{B}}(q) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Or $p = Id_E - q$ donc $M_{\mathcal{B}}(q) = I_3 - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (6-1) & -2 & 1 \\ -2 & (6-4) & 2 \\ 1 & 2 & (6-1) \end{pmatrix}$.

$M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{V2}}$ Construisons une base orthonormée de F. Posons $u_1 = e_1+e_3$. u_1 est un élément de F.

Cherchons un vecteur de F orthogonal à u_1. Soit $v = xe_1+ye_2+ze_3 \in E$.

$v \in F$ et $\langle v, u_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=-x \end{cases}$.

Posons alors $x=1$, $y=-1$, $z=-1$ et $u_2 = e_1-e_2-e_3$. $u_2 \in F$ et $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

$\|u_1\| = \sqrt{2}$ et $\|u_2\| = \sqrt{3}$. Posons $\hat{u}_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$ et $\hat{u}_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_2-e_3)$.

$(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ est alors une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de F dont le cardinal coïncide avec la dimension de F. Alors $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ est une base orthonormée de F.

Ainsi $\forall v \in E,\ p(v) = \langle v, \hat{u}_1\rangle \hat{u}_1 + \langle v, \hat{u}_2\rangle \hat{u}_2$

R

Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de E.

$p(v) = \langle xe_1+ye_2+ze_3, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3) + \langle xe_1+ye_2+ze_3, \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_2-e_3)\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_2-e_3)$.

$p(v) = \frac{1}{2}(x+z)(e_1+e_3) + \frac{1}{3}(x-y-z)(e_1-e_2-e_3) = \frac{1}{6}(3x+3z+2x-2y-2z)e_1 + \frac{1}{6}(-2x+2y+2z)e_2 + \frac{1}{6}(3x+3z-2x+2y+2z)e_3$

$p(v) = \frac{1}{6}(5x-2y+z)e_1 + \frac{1}{6}(-2x+2y+2z)e_2 + \frac{1}{6}(x+2y+5z)e_3$.

Alors $p(e_1) = \frac{1}{6}(5e_1 - 2e_2 + e_3)$, $p(e_2) = \frac{1}{6}(-2e_1+2e_2+2e_3)$ et $p(e_3) = \frac{1}{6}(e_1+2e_2+5e_3)$. Nous retrouvons alors $M_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\boxed{V3}$ $v_1 = e_1+e_3$ et $v_2 = e_2+2e_3$ sont deux éléments de F. (v_1, v_2) est clairement une famille libre d'éléments de F de cardinal 2. F est un hyperplan de E qui est de dimension 3.

Alors dim F = 2 et (v_1, v_2) est une base de F.

Soit $v = xe_1+ye_2+ze_3 \in E$. $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $p(v) = \alpha v_1 + \beta v_2$.

de plus $v - p(v) \in F^\perp$ donc $v-p(v)$ est orthogonal à v_1 et v_2. Alors $\langle v-p(v), v_1\rangle = \langle v-p(v), v_2\rangle = 0$.

Ainsi $\langle v, v_1\rangle = \langle p(v), v_1\rangle = \langle \alpha v_1 + \beta v_2, v_1\rangle = \alpha\langle v_1, v_1\rangle + \beta\langle v_2, v_1\rangle$.

de même $\langle v, v_2\rangle = \alpha\langle v_1, v_2\rangle + \beta\langle v_2, v_2\rangle$.

notons que $\langle v_1, v_1\rangle = 2$, $\langle v_2, v_2\rangle = 5$, $\langle v_1, v_2\rangle = 2$, $\langle v, v_1\rangle = x+z$ et $\langle v, v_2\rangle = y+2z$. Alors :

$\begin{cases} \alpha\langle v_1, v_1\rangle + \beta\langle v_2, v_1\rangle = \langle v, v_1\rangle \\ \alpha\langle v_1, v_2\rangle + \beta\langle v_2, v_2\rangle = \langle v, v_2\rangle \end{cases}$ donne $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = x+z \\ 2\alpha + 5\beta = y+2z \end{cases}$. donc $3\beta = y+2z-x-z = -x+y+z$

$\beta = \frac{1}{3}(-x+y+z)$. $\alpha = \frac{1}{2}(x+z-2\beta) = \frac{1}{2}(x+z-\frac{2}{3}(-x+y+z)) = \frac{1}{6}(3x+3z+2x-2y-2z) = \frac{1}{6}(5x-2y+z)$.

Alors $p(v) = \frac{1}{6}(5x-2y+z)(e_1+e_3) + \frac{1}{3}(-x+y+z)(e_2+2e_3)$.

$p(v) = \frac{1}{6}(5x-2y+z)e_1 + \frac{1}{6}(-2x+2y+2z)e_2 + \frac{1}{6}(5x-2y+z-4x+4y+4z)$

$p(v) = \frac{1}{6}(5x-2y+z)e_1 + \frac{1}{6}(-2x+2y+2z)e_2 + \frac{1}{6}(x+2y+5z)e_3$.

ce qui redonne pour la troisième fois $M_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

R

EXERCICE 37

JFC

Exercice | S | **Recherche de la matrice d'une projection orthogonale 2.**

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'intersection des deux hyperplans d'équations $x+2y-z=0$ et $x-y-z+t=0$ dans $\mathcal{B}$.

Montrer que la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base $\mathcal{B}$ est : $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3+te_4\in E$.

$u\in F \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+2y \\ t=-x+y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+2y \\ t=-x+y+x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+2y \\ t=3y \end{cases}$.

$F=\{xe_1+ye_2+(x+2y)e_3+3ye_4\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(e_1+e_3)+y(e_2+2e_3+3e_4)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

$F=\mathrm{Vect}(e_1+e_3,\,e_2+2e_3+3e_4)$. Notons que la famille $(e_1+e_3,\,e_2+2e_3+3e_4)$ est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(e_1+e_3)+\beta(e_2+2e_3+3e_4)=0_E$. $\alpha e_1+\beta e_2+(\alpha+2\beta)e_3+3\beta e_4=0_E$.

La liberté de (e_1,e_2,e_3,e_4) donne : $\alpha=\beta=\alpha+2\beta=3\beta=0$; $\alpha=\beta=0$.

$(e_1+e_3,\,e_2+2e_3+3e_4)$ est une famille libre et génératrice de F donc c'est une base de F.

Posons $u_1=e_1+e_3$ et $u_2=e_2+2e_3+3e_4$. Soit $v=xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ un élément de F.

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $p(v)=\alpha u_1+\beta u_2$ et $v-p(v)\in F^\perp$ donc $\langle v-p(v),u_1\rangle=\langle v-p(v),u_2\rangle=0$.

Alors $\begin{cases} \langle v,u_1\rangle=\langle p(v),u_1\rangle=\langle\alpha u_1+\beta u_2,u_1\rangle=\alpha\langle u_1,u_1\rangle+\beta\langle u_2,u_1\rangle \\ \langle v,u_2\rangle=\langle p(v),u_2\rangle=\langle\alpha u_1+\beta u_2,u_2\rangle=\alpha\langle u_1,u_2\rangle+\beta\langle u_2,u_2\rangle \end{cases}$.

$\langle u_1,u_1\rangle=2$, $\langle u_2,u_2\rangle=14$, $\langle u_1,u_2\rangle=2$, $\langle v,u_1\rangle=x+z$ et $\langle v,u_2\rangle=y+2z+3t$.

Alors $\begin{cases} 2\alpha+2\beta=x+z \\ 2\alpha+14\beta=y+2z+3t \end{cases}$ donc $12\beta=-x+y+z+3t$; $\underline{\beta=\frac{1}{12}(-x+y+z+3t)}$.

$\alpha=\frac{1}{2}(x+z-2\beta)=\frac{1}{12}(6x+6z+x-y-z-3t)$; $\underline{\alpha=\frac{1}{12}(7x-y+5z-3t)}$. Alors :

$p(v)=\frac{1}{12}(7x-y+5z-3t)(e_1+e_3)+\frac{1}{12}(-x+y+z+3t)(e_2+2e_3+3e_4)$

$\underline{p(v)=\frac{1}{12}(7x-y+5z-3t)e_1+\frac{1}{12}(-x+y+z+3t)e_2+\frac{1}{12}(5x+y+7z+3t)e_3+\frac{1}{12}(-3x+3y+3z+9t)e_4}$.

Ce qui donne facilement $\underline{M_{\mathcal{B}}(p)=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}}$.

Exercice. Retrouver le résultat en construisant une base orthonormée de F.

R. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3),\,\frac{1}{\sqrt{12}}(e_1-e_2-e_3-3e_4)\right)$

R

EXERCICE 38

JFC

Exercice S **Projection et projection orthogonale.**

Un bon exercice... sur les polynômes.

$E = \mathbb{R}_n[X]$ et A un élément non constant de E de degré a $(0 < a \leqslant n)$. A tout élément P de E on associe le reste $f(P)$ dans la division de P par A.

$\forall (P,Q) \in E^2$, $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Q1. Montrer que f est un projecteur de E. Trouver une base de son noyau et une base de son image.

Q2. Ici $a < n$. On suppose que f est une projection orthogonale. Montrer que si i appartient à $[\![0, n-a]\!]$ et si j appartient à $[\![0, a-1]\!]$, $< AX^i, X^j >= 0$. En déduire que $< A, A >= 0$. Moralité ?

Q3. Ici $a = n$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une projection orthogonale.

Q1 * Montrons d'abord que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$

• Soit $P \in E$. $f(P)$ est le reste dans la division par A donc $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg f(P) < \deg A = a \leqslant n$. Alors $f(P) \in E$.

$\forall P \in E$, $f(P) \in E$. f est une application de E dans E.

• Soit $(P_1, P_2) \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (Q_1, Q_2, R_1, R_2) \in (\mathbb{R}[X])^4$, $P_1 = Q_1 A + R_1$, $P_2 = Q_2 A + R_2$, $\deg R_1 < \deg A$ et $\deg R_2 < \deg A$.

Alors $\lambda P_1 + P_2 = (\lambda Q_1 + Q_2) A + (\lambda R_1 + R_2)$ et $\deg(\lambda R_1 + R_2) < \deg A$ car $\deg R_1 < \deg A$ et $\deg R_2 < \deg A$.

Ceci permet de dire que $\lambda R_1 + R_2$ est le reste dans la division de $\lambda P_1 + P_2$ par A.

Ainsi $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2$. Or $R_1 = f(P_1)$ et $R_2 = f(P_2)$. Donc $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P_1, P_2) \in E^2$, $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$. f est linéaire.

f est un endomorphisme de E (1)

* Montrons que $f \circ f = f$.

Soit $P \in E$. $f(P) = 0_E \times A + f(P)$ et $\deg f(P) < \deg A$. Alors $f(P)$ est le reste dans la division de $f(P)$ par A. Ainsi $f(f(P)) = f(P)$.

$\forall P \in E$, $f(f(P)) = f(P)$. $f \circ f = f$ (2)

(1) et (2) montrent que f est un projecteur de E.

R

f est encore la projection sur $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f$.

* • Soit $P \in E$, $\deg f(P) < \deg A$ et ainsi $f(P) \in \mathbb{R}_{a-1}[X]$.

$\forall P \in E, f(P) \in \mathbb{R}_{a-1}[X]$. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathbb{R}_{a-1}[X]$.

• Soit $P \in \mathbb{R}_{a-1}[X]$. $P = 0_E \times A + P$ et $\deg P \leqslant a-1 < a = \deg A$. Alors P est le reste dans la division de P par A. Ainsi $f(P) = P$. $P \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$\forall P \in \mathbb{R}_{a-1}[X]$, $P \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im} f$. $\mathbb{R}_{a-1}[X] \subset \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Par conséquent $\underline{\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}_{a-1}[X]}$. $\underline{(1, X, \dots, X^{a-1}) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$.

* Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = 0_E \Leftrightarrow A$ divise $P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = QA$.

$P \in \mathrm{Ker} f \underset{\substack{\deg A = a \\ P \in \mathbb{R}_n[X]}}{\Leftrightarrow} \exists Q \in \mathbb{R}_{n-a}[X], P = QA \Leftrightarrow \exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-a}) \in \mathbb{R}^{n-a+1}, P = \sum_{k=0}^{n-a} \alpha_k X^k A$.

donc $\underline{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(A, XA, \dots, X^{n-a}A)}$. Comme $(A, XA, \dots, X^{n-a}A)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés, $(A, XA, \dots, X^{n-a}A)$ est une famille libre.

Ainsi $\underline{(A, XA, \dots, X^{n-a}A) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$.

(Q2) On suppose ici que f est une projection orthogonale. Alors $\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f)^\perp$. On suppose aussi $\underline{a < n}$.

donc $\forall (P, Q) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im} f$, $\langle P, Q \rangle = 0$

Alors $\underline{\forall i \in [\![0, n-a]\!], \forall j \in [\![0, a-1]\!], \langle AX^i, X^j \rangle = 0}$.

$\deg A = a$. Alors $\exists (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_a) \in \mathbb{R}^{a+1}$, $A = \sum_{j=0}^{a} \gamma_j X^j$ et $\gamma_a \neq 0$.

$$\langle A, A \rangle = \langle A, \sum_{j=0}^{a} \gamma_j X^j \rangle = \sum_{j=0}^{a-1} \gamma_j \underbrace{\langle AX^0, X^j \rangle}_{= 0 \text{ car } j \in [\![0, a-1]\!]} + \gamma_a \langle A, X^a \rangle = \gamma_a \langle A, X^a \rangle.$$

$$\langle A, A \rangle = \gamma_a \int_0^1 A(t) t^a \, dt = \gamma_a \int_0^1 (A(t) t) t^{a-1} \, dt = \gamma_a \langle AX^1, X^{a-1} \rangle \underset{\uparrow}{=} \gamma_a \times 0 = 0.$$

car $1 \in [\![0, n-a]\!]$ car $a < n$ et $a-1 \in [\![0, a-1]\!]$

Finalement $\|A\|^2 = 0$. $\|A\| = 0$. $A = 0_E$!!

ceci est impossible car $\deg A = a \geqslant 1$.

R.

Si $a < n$, f n'est pas une projection orthogonale.

(Q3) Ici $a = n$. Alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(A)$.

Rappelons que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires.

Alors f projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ orthogonaux.

f projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ orthogonaux.

f projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $A \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

R.

EXERCICE 39

Exercice | S | **Matrice de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

Modeste mais pas aussi simple que cela à mettre en forme. C'est dans ESSEC 2012.

$(U_1, U_2, \ldots, U_k)$ est une base orthonormée d'un sous espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la projection orthogonale sur F est $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i\,{}^tU_i$.

Soient p la projection orthogonale sur F et P sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$(U_1, U_2, \ldots, U_k)$ est une base orthonormée de F donc le cours indique que $p(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} < U_i, X > U_i$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice du vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}_0$ est X ! Donc la matrice de $p(X)$ dans $\mathcal{B}_0$ est PX.

Mais $p(X)$ a aussi pour matrice $p(X)$ dans la base $\mathcal{B}_0$. Alors $PX = p(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} < U_i, X > U_i = \sum_{i=1}^{k} ({}^tU_iX)\,U_i$.

Observons que, pour tout élément i de $[\![1,k]\!]$, ${}^tU_iX$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ que l'on peut assimiler à un réel.

Donc, pour tout élément i de $[\![1,k]\!]$, $({}^tU_iX)\,U_i = U_i\,({}^tU_iX)$.

Notons que dans cette égalité, à gauche ${}^tU_iX$ est un réel et à droite un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$...

Alors : $PX = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i({}^tU_iX) = \sum\limits_{i=1}^{k} (U_i{}^tU_i)X = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right)X$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right)X$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ PE_j = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right)E_j$.

Ainsi pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i$. Alors $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i$.

$$\boxed{\text{La matrice dans la base canonique de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ de la projection orthogonale sur } F \text{ est } \sum_{i=1}^{k} U_i\,{}^tU_i.}$$

R. EXERCICE 40

Exercice PC D'après HEC 2005 Projection orthogonale

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que l'application qui à tout élément (P, Q) de E^2 associe $\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$ est un produit scalaire sur E. On munit E de ce produit scalaire que l'on note $\langle \cdot,\cdot \rangle$

Q1. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Montrer que $0 = k! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(j+k)!}{(j+1)!}$ (on pourra considérer la valeur en 1 de $P_k = \left((1-X)^n X^k\right)^{(k-1)}$).

Q2. Déterminer la projection orthogonale de $P = 1$ sur $\mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.

Q1 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Posons $Q_k = (1-X)^n X^k$. 1 est racine d'ordre n dans Q_k donc

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_k^{(i)}(1) = 0$. Alors $\underline{P_k(1) = 0}$.

Rappelons que $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![0, j]\!]$, $(X^j)^{(i)} = \overset{\text{avec abus si } i=0}{j(j-1)\cdots(j-i+1)}X^{j-i} \overset{\text{sans abus}}{=} \frac{j!}{(j-i)!} X^{j-i}$.

$Q_k = (1-X)^n X^k = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j X^j\right) X^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j X^{j+k}$

Alors $P_k = Q_k^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{(j+k)!}{(j+k-(k-1))!} X^{j+k-(k-1)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{(j+k)!}{(j+1)!} X^{j+1}$.

---

donc $0 = P_k(1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{(j+k)!}{(j+1)!} = \underbrace{\binom{n}{0}(-1)^0 \frac{(0+k)!}{(0+1)!}}_{k!} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{(j+k)!}{(j+1)!}$.

donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $0 = k! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(j+k)!}{(j+1)!}$.

Q2 Ici $P = 1$. Notons R la projection orthogonale de P sur $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.

Soit S un élément de F. $\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $S = \sum_{j=1}^{n} a_j X^j$.

$S = R \underset{S \in F}{\iff} P - S \in F^\perp \iff \forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle P - S, X^k \rangle = 0$

$S = R \iff \forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle 1, X^k \rangle - \sum_{j=1}^{n} a_j \langle X^j, X^k \rangle = 0$

$\forall (p,q) \in [\![0,n]\!]^2$, $\langle X^p, X^q \rangle = \int_0^{+\infty} t^p t^q e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{p+q} e^{-t} dt = \Gamma(p+q+1) = (p+q)!$ Alors :

R

$S = R \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ k! - \sum_{j=1}^{n} a_j (j+k)! = 0.$ (1)

Q1 nous a montré que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(j+k)!}{(j+1)!} = 0$

Alors $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k! - \sum_{j=1}^{n} \left[(-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)!}\right] (j+k)! = 0.$

Posons alors $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \hat{a}_j = (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)!}.$

$(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)$ est solution de (1) donc $S = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j X^j.$

Finalement la projection orthogonale de 1 sur $\mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$ est

$$\sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)!}\right) X^j.$$

Remarque.. le système (1) admet une solution et une seule pour deux raisons au moins.

1) Par une projection orthogonale et une seule !

2) la matrice de ce système est la matrice de la restriction du produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ à $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.

Exercice **S** **Caractérisation d'une projection orthogonale 1.**

p est une projection de l'espace vectoriel euclidien E.

P Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

On retiendra aussi qu'une application p de E dans E est une projection orthogonale si et seulement si p est une endomorphisme symétrique qui vérifie $p \circ p = p$.

Soit F la base de p et G sa direction.

• Supposons que p est une projection orthogonale. Ainsi $G = F^{\perp}$.

Soient x et y deux éléments de E. $p(x)$ est un élément de F et $y - p(y)$ est un élément de $F^{\perp}$ donc ils sont orthogonaux.

Alors : $< p(x), y - p(y) >= 0$. $< p(x), y > - < p(x), p(y) >= 0$ et ainsi $< p(x), y >=< p(x), p(y) >$.

En échangeant x et y ceci donne $< p(y), x >=< p(y), p(x) >$. La symétrie du produit scalaire donne sans difficulté :

$< p(x), y >=< p(x), p(y) >=< p(y), p(x) >=< p(y), x >=< x, p(y) >$.

$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < p(x), y >=< x, p(y) >$ donc p est un endomorphisme symétrique.

• Réciproquement supposons que p est un endomorphisme symétrique.

Montrons que p est une projection orthogonale c'est à dire que $G = F^{\perp}$.

Comme F est G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E il ne reste plus qu'à montrer qu'ils sont orthogonaux ($F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F).

Soit y un élément de F et z un élément de G. $p(y) = y$ et $p(z) = 0_E$. Montrons que $< y, z >= 0$.

$< y, z >=< p(y), z >=< y, p(z) >=< y, 0_E >= 0$.

$\forall y \in F,\ \forall z \in G,\ < y, z >= 0$ donc F et G sont orthogonaux.

F et G sont supplémentaires et orthogonaux donc $G = F^{\perp}$. p est une projection orthogonale.

R

EXERCICE 42 J.F.C.

Exercice **PC** **Caractérisation d'une projection orthogonale 2.**

p est une projection de l'espace vectoriel euclidien E.

Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit F la base de p et G sa direction.

• Supposons que p est une projection orthogonale. Ainsi $G = F^\perp$.

Soit x un élément de E. $\exists\,!\,(y,z) \in F \times G,\ x = y + z$. Notons que $y = p(x)$ et que y et z sont orthogonaux.

Pythagore donne alors $\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. Alors $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|y\|^2 = \|p(x)\|^2$.

Ainsi $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$ et ceci pour tout élément x de E.

• Réciproquement supposons que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Montrons que p est une projection orthogonale c'est à dire que $G = F^\perp$.

Comme F est G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E il ne reste plus qu'à montrer qu'ils sont orthogonaux ($F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F).

soit y un élément de F et z un élément de G. Montrons que $< y, z >= 0$.

Soit λ un réel. $y \in F$ et $\lambda z \in G$ donc $p(y + \lambda\, z) = y$.

Alors $\|y\|^2 = \|p(y + \lambda\, z)\|^2 \leqslant \|y + \lambda\, z\|^2 = \|y\|^2 + 2\,\lambda\, < y, z > + \lambda^2\, \|z\|^2$.

Ainsi $0 \leqslant 2\,\lambda\, < y, z > + \lambda^2\, \|z\|^2$ et ceci pour tout réel λ.

Alors $\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant 2\, < y, z > + \lambda\, \|z\|^2$ $(\star)$ et $\forall \lambda \in]-\infty, 0[,\ 2\, < y, z > + \lambda\, \|z\|^2 \leqslant 0$ $(\star\star)$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures dans $(\star)$ il vient $0 \leqslant < y, z >$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs inférieures dans $(\star\star)$ il vient $< y, z > \leqslant 0$.

Finalement $< y, z >= 0$ et ceci pour tout élément (y, z) de $F \times G$.

F et G sont supplémentaires et orthogonaux donc $G = F^\perp$. p est une projection orthogonale.

R

EXERCICE 43

JFC

| Exercice | S | **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation.**

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2$

On se propose de montrer l'existence et de donner la valeur de $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$

On pose $E = \mathbb{R}^3$. $< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et $||.||$ est la norme associée.

Q0. Repréciser $< .,. >$ et $||.||$.

Q1. Pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, écrire $f(x,y)$ comme le carré de la norme d'un élément de E.

Q2. Trouver un sous-espace vectoriel F de E et un élément u de E tel que le problème posé se ramène à montrer l'existence et à donner la valeur de $\underset{v\in F}{\text{Min}} ||u-v||$ ou $\underset{v\in F}{\text{Min}} ||u-v||^2$.

Q3. Résoudre le problème posé.

| Exercice | PC | **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation.**

Bon entraînement.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2$

Montrer l'existence et de donner la valeur de $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$

---

utilisons le second énoncé.

Posons $E = \mathbb{R}^3$. Notons $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2 = \|(x+y-2, x-1, 2x+y-1)\|^2$

$f(x,y) = \|x(1,1,2) + y(1,0,1) - (2,1,1)\|^2 = \|(2,1,1) - x(1,1,2) - y(1,0,1)\|^2$.

Posons $w = (2,1,1)$, $u = (1,1,2)$ et $v = (1,0,1)$. Posons encore $F = \text{Vect}(u,v)$.

$\underline{f(x,y) = \|w - xu - yv\|^2.}$

$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$ existe

$\Updownarrow$

$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \|w - xu - yv\|^2$ existe

$\Updownarrow$

$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \|w - (xu + yv)\|$ existe

$\Updownarrow$

$\underset{f\in F}{\text{Min}} \|w - f\|$ existe

Le théorème de meilleure approximation montre que $\underset{f\in F}{\text{Min}} \|w-f\|$ existe et que la projection orthogonale w' de w sur F est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

R

Alors $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ existe et vaut $\|w-w'\|^2$.

Déterminons w'. $w'\in F$ donc $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ w'=\alpha u+\beta v$.

$w-w'\in F^\perp$ donc $\langle w-w',u\rangle=\langle w-w',v\rangle=0$.

Alors $\begin{cases}\langle w,u\rangle=\langle w',u\rangle=\alpha\langle u,u\rangle+\beta\langle v,u\rangle\\ \langle w,v\rangle=\langle w',v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle+\beta\langle v,v\rangle\end{cases}$.

$\langle u,u\rangle=1^2+1^2+2^2=6$, $\langle v,v\rangle=1^2+0^2+1^2=2$, $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle=1\times1+1\times0+2\times1=3$.

$\langle w,u\rangle=2\times1+1\times1+1\times2=5$ et $\langle w,v\rangle=2\times1+1\times0+1\times1=3$.

Alors $\begin{cases}6\alpha+3\beta=5\\ 3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ L_1-2L_2 donne $-\beta=-1$ donc $\underline{\beta=1}$. Alors $\underline{\alpha=\frac{1}{3}(3-2)=\frac{1}{3}}$.

Donc $w'=\frac{1}{3}(1,1,2)+(1,0,1)=\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$.

$\|w-w'\|^2=\left\|(2,1,1)-\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)\right\|^2=\left\|\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\|^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

Ainsi $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ existe et vaut $\frac{4}{3}$.

Remarque.. $\left(\frac{1}{3},1\right)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^2$ qui réalise ce minimum.

Exercice.. Retrouver ce résultat en utilisant le cours sur les fonctions de plusieurs variables.

R

EXERCICE 44

JFC

Exercice | PC | **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**. Oral ESCP 1999.

Bon entraînement.

Q1. a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt$ converge.

Q2. $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ f(a,b,c)=\displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3-at^2-bt-c)^2 e^{-t}\,dt.$

En se ramenant à un problème de projection orthogonale montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Q1 a) Rappelons que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est définie sur $]0,+\infty[$ et que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$.

Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ existe et vaut $n!$

b) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. $\exists s\in\mathbb{N}, \exists (a_0,a_1,\dots,a_s)\in\mathbb{R}^{s+1},\ P=\sum_{n=0}^{s} a_n X^n$.

$\forall n\in[\![0,s]\!]$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ existe donc $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} a_n t^n e^{-t}\right)dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

Donc $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} a_n t^n\right)e^{-t}\,dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt$ converge.

Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt$ converge.

Q2 Posons $\forall (P,Q)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ et montrons rapidement que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$. $PQ\in\mathbb{R}[X]$ donc $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ converge et ainsi $\langle P,Q\rangle$ existe.
- Soit $(P,Q,R)\in(\mathbb{R}[X])^3$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$

$\langle P,\lambda Q+R\rangle=\int_0^{+\infty} P(t)(\lambda Q+R)(t)e^{-t}\,dt=\int(\lambda P(t)Q(t)+P(t)R(t))\,e^{-t}\,dt$

$\langle P,\lambda Q+R\rangle=\int_0^{+\infty}(\lambda P(t)Q(t)e^{-t}+P(t)R(t)e^{-t})\,dt=\lambda\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt+\int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}$

Toutes les intégrales convergent.

Ainsi $\langle P,\lambda Q+R\rangle=\lambda\langle P,Q\rangle+\langle P,R\rangle$.

R

- $\forall (P,\varphi)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$, $\langle P,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}P(t)\varphi(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\varphi(t)P(t)e^{-t}dt=\langle\varphi,P\rangle$.

  $\underline{\forall (P,\varphi)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X],\ \langle P,\varphi\rangle=\langle\varphi,P\rangle}$.

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. $\forall t\in[0,+\infty[$, $(P(t))^2e^{-t}\geqslant 0$ et $0\leq+\infty$ donc $\int_0^{+\infty}(P(t))^2e^{-t}dt\geqslant 0$.

  Alors $\underline{\langle P,P\rangle\geqslant 0}$

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Supposons $\langle P,P\rangle=0$.

  Alors
  - $\int_0^{+\infty}(P(t))^2e^{-t}dt=0$
  - $t\mapsto(P(t))^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$
  - $0\neq+\infty$

donc $\forall t\in[0,+\infty[$, $(P(t))^2e^{-t}=0$ et $e^{-t}\neq 0$. $\forall t\in[0,+\infty[$, $(P(t))^2=0$. $\forall t\in[0,+\infty[$, $P(t)=0$.

Alors P admet une infinité de racines donc P est le polynôme nul. $\underline{\langle P,P\rangle=0\Rightarrow P=0_{\mathbb{R}[X]}}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}}$. Nous notérons $\|\cdot\|$ la norme associée.

$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $f(a,b,c)=\int_0^{+\infty}(t^3-at^2-bt-c)^2e^{-t}dt=\|X^3-aX^2-bX-c\|^2=\|X^3-(aX^2+bX+c)\|^2$.

$\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}f(a,b,c)$ existe $\Leftrightarrow$ $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\|X^3-(aX^2+bX+c)\|^2$ existe $\Leftrightarrow$ $\min\limits_{P\in\mathbb{R}_2[X]}\|X^3-P\|^2$ existe.

$\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}f(a,b,c)$ existe $\Leftrightarrow$ $\min\limits_{P\in\mathbb{R}_2[X]}\|X^3-P\|$ existe. Appliquons alors le théorème de meilleure approximation. Posons $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $F=\mathbb{R}_2[X]$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (ou sa restriction) est un produit scalaire sur $\underline{E \text{ qui est de dimension finie}}$, $X^3\in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Alors $\min\limits_{P\in F}\|X^3-P\|$ existe et la projection orthogonale φ de X^3 sur F est le seul élément de F qui réalise ce minimum.

Alors $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}f(a,b,c)$ existe et vaut $\|X^3-\varphi\|^2$ ou $\|X^3\|^2-\|\varphi\|^2$ ou encore $\|X^3\|^2-\langle X^3,\varphi\rangle$. Déterminons φ. $\varphi\in F$ et $F=\mathbb{R}_2[X]$ donc $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $\varphi=aX^2+bX+c$

De plus $X^3-\varphi\in F^\perp$ donc $\forall i\in[\![0,2]\!]$, $\langle X^3-\varphi,X^i\rangle=0$.

$\forall i\in[\![0,2]\!]$, $\langle X^3,X^i\rangle=\langle\varphi,X^i\rangle=a\langle X^2,X^i\rangle+b\langle X,X^i\rangle+c\langle 1,X^i\rangle$.

R.

Remarque : $\forall (k,\ell)\in\mathbb{N}^2,\ \langle X^k, X^\ell\rangle = \int_0^{+\infty} t^k t^\ell e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{k+\ell} e^{-t}\,dt = (k+\ell)!$

Alors $\forall i\in [\![0,2]\!],\ (3+i)! = a(2+i)! + b(1+i)! + c(0+i)!$

Donc
$$\begin{cases} a\times 2! + b\times 1! + c\times 0! = 3! \\ a\times 3! + b\times 2! + c\times 1! = 4! \\ a\times 4! + b\times 3! + c\times 2! = 5! \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a+b+c=6 \\ 6a+2b+c=24 \\ 24a+6b+2c=120 \end{cases}$$

L_2-3L_1 et L_3-4L_2 donnent :
$$\begin{cases} -b-2c=6 \\ -2b-2c=24 \end{cases}$$
L_1-L_2 donne $b=-18$.

Alors $c=\frac{1}{2}(-b-6)=\frac{1}{2}(+18-6)=6$. $a=\frac{1}{2}(6-b-c)=\frac{1}{2}(6+18-6)=9$.

Ainsi $\underline{\underline{Q = 9X^2-18X+6}}$

$\|X^3-Q\|^2 = \|X^3\|^2 - \langle X^3, Q\rangle$ (formule qui donne le moins de calcul ici).

$\|X^3-Q\|^2 = \langle X^3,X^3\rangle - 9\langle X^3,X^2\rangle + 18\langle X^3,X\rangle - 6\langle X^3,1\rangle$

$\|X^3-Q\|^2 = 6! - 9\times 5! + 18\times 4! - 6\times 3! = \underset{20\times 36}{\underset{\uparrow}{720}} - 9\times\underset{30\times 36}{\underset{\uparrow}{120}} + \underset{12\times 36}{18 \underset{\uparrow}{\times} 24} - \underset{1\times 36}{\underset{\uparrow}{36}} = 36$

Ainsi $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c)$ existe et vaut 36.

$$\underline{\underline{\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3-at^2-bt-c)^2e^{-t}\,dt \text{ existe et vaut } 36.}}$$

Remarque : $(9,-18,6)$ est le seul élément de $\mathbb{R}^3$ qui réalise ce minimum.

EXERCICE 45 J.F.C.

Exercice **Un calcul de distance** D'après Ecricome 2001.

$E = \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique ($\forall (A,B) \in E^2 < A, B >= \text{tr}({}^tAB)$).

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \text{Vect}(I_4, U, U^2, U^3).$$

Q0. $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E. Rappeler la valeur de $< A, B >$.

Q1. Montrer que (I_4, U, U^2, U^3) est une base orthogonale de F.

Q2. Soit V l'élément de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0.

Trouver la meilleure approximation W de V par un élément de F et calculer la distance de V à F.

Q0 D'une manière générale, soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons ${}^tA=(a'_{ij})$ et $C={}^tAB=(c_{ij})$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj}$

$\text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$

Donc $\forall A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A,B\rangle = \text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$ (*)

Q1 <u>Quelques observations</u>

- Soit (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. U n'est autre que la matrice de passage de la base orthonormée (E_1,E_2,E_3,E_4) à la base orthonormée (E_4,E_1,E_2,E_3). Donc <u>U est orthogonale</u>. ${}^tUU = U{}^tU = I_4$

- Notons également que $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>$U^4 = I_4$.</u> Notons que <u>$\text{tr}(U) = \text{tr}(U^2) = \text{tr}(U^3) = 0$.</u>

Montrons que (I_4, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale.

Il <u>suffit</u> de prouver que $\begin{cases} \langle I_4, U\rangle = \langle I_4, U^2\rangle = \langle I_4, U^3\rangle = 0 \\ \langle U, U^2\rangle = \langle U, U^3\rangle = 0 \\ \langle U^2, U^3\rangle = 0 \end{cases}$

R

- $\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\langle I_4, U^k\rangle = tr({}^tI_4 U^k) = tr(U^k) = 0$.

- $\forall k \in [\![2,3]\!]$, $\langle U, U^k\rangle = tr({}^tU U^k) = tr(\underbrace{{}^tU U}_{I_4} U^{k-1}) = tr(U^{k-1}) = 0$ ← $k-1 \in [\![1,2]\!]$

- $\langle U^2, U^3\rangle = tr({}^tU^2 U^3) = tr({}^tU\,{}^tU\, U U^2) = tr({}^tU U^2) = tr(U) = 0$.

ceci achève de montrer que (I_4, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale de E.

mieux (I_4, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale d'éléments non nuls de E.

c'est donc une famille libre de E.

Par définition de F, (I_4, U, U^2, U^3) est une famille génératrice de F.

Ainsi (I_4, U, U^2, U^3) est une base orthogonale de F.

(Q2) Notons p_F la projection orthogonale de E sur F.

La meilleure approximation de V par un élément de F est : $W = p_F(V)$.

Calculons $p_F(V)$. $p_F(V) \in F = \text{Vect}(I_4, U, U^2, U^3)$.

$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $W = p_F(V) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k U^k$.

$W - V = p_F(V) - V \in F^\perp$. donc W est orthogonal à I_4, U, U^2 et U^3.

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $0 = \langle W - V, U^i\rangle = \langle W, U^i\rangle - \langle V, U^i\rangle = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \langle U^k, U^i\rangle - \langle V, U^i\rangle$.

Or la famille (I_4, U, U^2, U^3) est orthogonale.

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $0 = \langle W, U^i\rangle - \langle V, U^i\rangle = \alpha_i \langle U^i, U^i\rangle - \langle V, U^i\rangle$. $\forall i \in [\![0,3]\!]$, $\alpha_i = \dfrac{\langle V, U^i\rangle}{\langle U^i, U^i\rangle}$

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $\langle U^i, U^i\rangle = tr({}^tU^i U^i) = tr(({}^tU U)^i) = tr(I_4^i) = tr(I_4) = 4$.

↑ U et ${}^tU$ commutent $(U{}^tU = {}^tU U = I_4 \dots)$

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $\alpha_i = \frac{1}{4}\langle V, U^i\rangle$.

R

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $i \in [\![0,3]\!]$ la première ligne de U^i contient trois coefficients nuls et un coefficient égal à 1.

La formule (*) obtenue dans Q0 permet de dire que :

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $\langle V, U^i \rangle = 1$. Ainsi $\forall i \in [\![0,3]\!]$, $\alpha_i = \frac{1}{4}$.

Donc $W = p_F(V) = \frac{1}{4}(I_4 + U + U^2 + U^3) = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$

$\left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>La meilleure approximation W de V par un élément de F est $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.</u>

Notons d la distance de V à F.

$d^2 = \|V - p_F(V)\|^2 = \|V\|^2 - \|p_F(V)\|^2 = \|V\|^2 - \langle p_F(V), V \rangle$.

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La formule (*) donne aisément : $\|V\|^2 = \langle V, V \rangle = 4$.

$\langle p_F(V), V \rangle = \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{(*)}{=} \frac{1}{4} \times 4 = 1$.

Alors $d^2 = 4 - 1 = 3$; $d = \sqrt{3}$.

<u>La distance de V à F est $\sqrt{3}$.</u>

R

EXERCICE 46

Exercice Utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver :

$$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}}\left[(x-10)^2+(2x+y-1)^2+(2y-1)^2+(-x+3y-2)^2\right]$$

Posons $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x-10)^2+(2x+y-1)^2+(2y-1)^2+(-x+3y-2)^2$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left\|\begin{pmatrix}x-10\\2x+y-1\\2y-1\\-x+3y-2\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\|$ ← Norme de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

Posons alors $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\\-1&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}10\\1\\1\\2\end{pmatrix}$. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left\|A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-B\right\|^2$.

$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$ existe $\Leftrightarrow$ $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}}\left\|A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-B\right\|^2$ existe $\Leftrightarrow$ $\underset{X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}}\|AX-B\|^2$ existe.

$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$ existe $\Leftrightarrow$ $\underset{X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}}\|AX-B\|^2$ existe

Notons que $\text{rg}\, A=2$ car les deux colonnes de A constituent une famille libre.

Le théorème de la méthode des moindres carrés permet de dire que

1° $\underset{X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}}\|AX-B\|$ existe 2° $\exists!\, X_0\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\|AX_0-B\|=\underset{X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}}\|AX-B\|$

3° ${}^tAA$ est inversible 4° ${}^tAAX_0={}^tAB$ ou $X_0=({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$.

Posons $X_0=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Alors $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$ existe et (α,β) est l'unique élément de $\mathbb{R}^2$ qui réalise ~~ce~~ minimum.

${}^tAA=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1\\-1&14\end{pmatrix}$ et ${}^tAB=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix}6&-1\\-1&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$. $\begin{cases}6\alpha-\beta=10\\-\alpha+14\beta=9\end{cases}$. $\begin{cases}\alpha=14\beta-9\\6\times14\beta-6\times9-\beta=10\end{cases}$.

8

Donc $83\beta = 6\times 9 + 10 = 64$; $\beta = \frac{64}{83}$. $\alpha = 14 \times \frac{64}{83} - 9 = \frac{149}{83}$.

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{149}{83} \text{ et } \beta = \frac{64}{83}}} .$$

$$f(\alpha,\beta) = \left(\frac{149}{83} - 10\right)^2 + \left(2\times\frac{149}{83} + \frac{64}{83} - 1\right)^2 + \left(2\times\frac{64}{83} - 1\right)^2 + \left(-\frac{149}{83} + 3\times\frac{64}{83} - 2\right)^2$$

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{83^2}\left[(-681)^2 + 279^2 + 45^2 + (-123)^2\right] = \frac{558756}{83^2} = \frac{6732}{83} .$$

Ainsi

1°) $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left[(x-10)^2 + (2x+y-1)^2 + (2y-1)^2 + (-x+3y-2)^2\right]$ existe

et vaut $\frac{6732}{83}$

2°) le minimum est atteint en le seul point $\left(\frac{149}{83}, \frac{64}{83}\right)$.

Exercice **PC** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation.**

Existence et valeur de : $\displaystyle \operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (a\cos t + b\sin t - t)^2\,\mathrm{d}t$

(munir l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0,\pi]$ d'un bon produit scalaire et se ramener à un problème de projection orthogonale... dans un euclidien).

Posons $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b)=\int_0^{\pi}(a\cos t+b\sin t-t)^2\,dt$. Posons $\forall t\in[0,\pi]$, $u(t)=\cos t$, $v(t)=\sin t$ et $w(t)=t$.

Notons E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

u, v, w sont trois éléments de E donc $E'=\mathrm{Vect}(u,v,w)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Posons $\forall (f,g)\in E^2$, $\langle f,g\rangle=\int_0^{\pi}f(t)g(t)\,dt$. Il est simple de montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E. Dans la suite nous confondrons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et sa restriction à E'.

Ainsi $(E',\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace vectoriel euclidien.

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b)=\|au+bv-w\|^2=\|w-(au+bv)\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Posons $F=\mathrm{Vect}(u,v)$. F est un sous-espace vectoriel de E'.

$\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b)$ existe $\Leftrightarrow \operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|w-(au+bv)\|^2$ existe $\Leftrightarrow \operatorname*{Min}_{z\in F}\|w-z\|^2$ existe $\Leftrightarrow \operatorname*{Min}_{z\in F}\|w-z\|$ existe

Le théorème de meilleure approximation appliqué dans E' avec l'élément w et le sous-espace vectoriel F indique que $\operatorname*{Min}_{z\in F}\|w-z\|$ existe et vaut $\|w-p_F(w)\|$ où $p_F(w)$ est la projection orthogonale sur F.

Remarque.– $p_F(w)$ est le seul élément de F qui réalise ce minimum.

Alors $\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b)$ existe et vaut $\|w-p_F(w)\|^2$ ou $\|w\|^2-\|p_F(w)\|^2$ ou encore $\|w\|^2-\langle w,p_F(w)\rangle$.

Déterminons $p_F(w)$. $p_F(w)\in F$ donc $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $p_F(w)=\alpha u+\beta v$.

$w-p_F(w)\in F^{\perp}$ donc $w-p_F(w)$ est orthogonal à u et v.

Alors $\begin{cases}\langle w,u\rangle=\langle p_F(w),u\rangle=\alpha\langle u,u\rangle+\beta\langle v,u\rangle\\ \langle w,v\rangle=\langle p_F(w),v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle+\beta\langle v,v\rangle\end{cases}$.

$\langle u,u\rangle=\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

$\langle u,v\rangle=\int_0^{\pi}\cos t\sin t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt=-\frac{1}{4}\left[\cos 2t\right]_0^{\pi}=0$

$\langle v,v\rangle=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt=\left[\frac{1}{2}t-\frac{\sin(2t)}{4}\right]=\frac{\pi}{2}$.

R

$\langle w,u\rangle = \int_0^{\pi} t\cos t\,dt = [t\sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\times\sin t\,dt = -\int_0^{\pi}\sin t\,dt = [\cos t]_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2.$

$\langle w,v\rangle = \int_0^{\pi} t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos t)\,dt = -\pi\cos\pi + [\sin t]_0^{\pi} = \pi.$

Alors $\begin{cases} \alpha\,\dfrac{\pi}{2} + \beta\times 0 = -2 \\ \alpha\times 0 + \beta\times\dfrac{\pi}{2} = \pi \end{cases}$. $\underline{\alpha = -\dfrac{4}{\pi} \text{ et } \beta = 2}$. $\underline{p_F(w) = -\dfrac{4}{\pi}u + 2v}$.

$\|w\|^2 = \int_0^{\pi} t^2\,dt = \dfrac{\pi^3}{3}.$

$\|w\|^2 - \langle w, p_F(w)\rangle = \|w\|^2 - \langle w, \alpha u + \beta v\rangle = \|w\|^2 - \alpha\langle w,u\rangle - \beta\langle w,v\rangle.$

$\|w\|^2 - \langle w, p_F(w)\rangle = \dfrac{\pi^3}{3} - \left(-\dfrac{4}{\pi}\right)(-2) - 2\pi = \dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{8}{\pi} - 2\pi$

Donc $\underline{\underline{\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi}(a\cos t + b\sin t - t)^2\,dt \text{ existe et vaut } \dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{8}{\pi} - 2\pi}}$.

Remarques. 1. $(-\frac{4}{\pi}, 2)$ est le seul point de $\mathbb{R}^2$ qui réalise ce minimum.

2. $\dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{8}{\pi} - 2\pi \simeq 1,506.$

R

EXERCICE 48

JFC

Exercice | PC | Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation.

Existence et valeur de : $\displaystyle \operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2\,(\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

Q1 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $h : t \mapsto t^2(\ln t - at - b)^2$ est continue sur $]0,1]$.

De plus $\displaystyle\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} (t\ln t - at^2 - bt)^2 = 0$. Alors h est prolongeable par continuité en 0.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2\,dt$ converge et $f(a,b)$ a un sens.

f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

Q2 Posons $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall (g_1,g_2)\in E^2$, $\langle g_1,g_2\rangle = \displaystyle\int_0^1 g_1(t)\,g_2(t)\,dt$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E (preuve simple).

Notons $\|\cdot\|$ la norme associée.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $u(t) = t^2$, $v(t) = t$ et $w(t) = \begin{cases} t\ln t & \text{si } t\in\,]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

u, v, w sont trois éléments de E (la continuité de ces trois fonctions sur $[0,1]$ est assez claire).

Posons $E' = \operatorname{Vect}(u,v,w)$ (pour travailler dans un espace vectoriel euclidien) et $F = \operatorname{Vect}(u,v)$. Nous confondons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et sa restriction à E'.

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (t\ln t - at^2 - bt)^2\,dt = \int_0^1 (w(t) - a\,u(t) - b\,v(t))^2\,dt = \|w - au - bv\|^2$.

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b) = \|w - (au+bv)\|^2$.

$\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b)$ existe $\iff \displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|w-(au+bv)\|^2$ existe $\iff \displaystyle\operatorname*{Min}_{z\in F} \|w - z\|^2$ existe $\iff \displaystyle\operatorname*{Min}_{z\in F}\|w-z\|$ existe.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E' et $w\in E'$.

Le théorème de meilleure approximation permet de dire que $\displaystyle\operatorname*{Min}_{z\in F}\|w-z\|$ existe

et vaut $\|w - p_F(w)\|$ où $p_F(w)$ est la projection orthogonale de w sur F.

On peut également dire que $p_F(w)$ est le seul élément de F qui réalise ce minimum.

Ainsi $\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b)$ existe et vaut $\|w - p_F(w)\|^2$

Rappelons que $\|w - p_F(w)\|^2 = \|w\|^2 - \|p_F(w)\|^2 = \|w\|^2 - \langle w, p_F(w)\rangle$.

Calculons $p_F(\omega)$. $p_F(\omega)\in F$ donc $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $p_F(\omega)=\alpha u+\beta v$.

De plus $\omega-p_F(\omega)\in F^\perp$. Ainsi $\langle \omega-p_F(\omega),u\rangle=\langle\omega-p_F(\omega),v\rangle=0$.

donc $\begin{cases}\langle\omega,u\rangle=\langle p_F(\omega),u\rangle=\alpha\langle u,u\rangle+\beta\langle v,u\rangle\\ \langle\omega,v\rangle=\langle p_F(\omega),v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle+\beta\langle v,v\rangle\end{cases}$.

<u>Remarque</u>.. Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $\varepsilon\in]0,1]$

$$\int_\varepsilon^1 t^n\ln t\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{t}\,dt=-\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon-\frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 t^n\,dt.$$

Intégration par parties simple

$\int_\varepsilon^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{1}{n+1}\varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon-\frac{1}{(n+1)^2}(1-\varepsilon^{n+1})$. Donc $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{1}{(n+1)^2}$.

Alors $\int_0^1 t^n\ln t\,dt$ converge et vaut $-\frac{1}{(n+1)^2}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 w(t)\,t^{n-1}\,dt=-\frac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi $\int_0^1 w(t)u(t)\,dt=-\frac{1}{(3+1)^2}=-\frac{1}{16}$ et $\int_0^1 w(t)v(t)\,dt=-\frac{1}{(2+1)^2}=-\frac{1}{9}$.

$\langle\omega,u\rangle=-\frac{1}{16}$ et $\langle\omega,v\rangle=-\frac{1}{9}$.

$\langle u,u\rangle=\int_0^1 t^4\,dt=\frac{1}{5}$, $\langle v,v\rangle=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$ et $\langle u,v\rangle=\int_0^1 t^3\,dt=\frac{1}{4}$.

Alors $\begin{cases}\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{4}\beta=-\frac{1}{16}\\ \frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\beta=-\frac{1}{9}\end{cases}$. $\begin{cases}4\alpha+5\beta=-\frac{20}{16}=-\frac{5}{4}\\ 3\alpha+4\beta=-\frac{12}{9}=-\frac{4}{3}\end{cases}$.

$4L_1-5L_2$ donne $\alpha=4(-\frac{5}{4})-5(-\frac{4}{3})=\frac{5}{3}$; $\alpha=\frac{5}{3}$.

$3L_1-4L_2$ donne $-\beta=3(-\frac{5}{4})-4(-\frac{4}{3})=\frac{19}{12}$; $\beta=-\frac{19}{12}$.

$$\underline{\underline{p_F(\omega)=\frac{5}{3}u-\frac{19}{12}v.}}$$

Rappelons que $\|\omega-p_F(\omega)\|^2=\|\omega\|^2-\|p_F(\omega)\|^2=\|\omega\|^2-\langle\omega,p_F(\omega)\rangle$.

Observons que la troisième quantité est plus simple à calculer que les autres.

Soit $\varepsilon\in]0,1]$. $\int_\varepsilon^1(\omega(t))^2dt=\int_\varepsilon^1 t^2(\ln t)^2dt=\left[\frac{t^3}{3}(\ln t)^2\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{t^3}{3}\times\frac{2}{t}\times\ln t\,dt$.

$\int_\varepsilon^1(\omega(t))^2dt=-\frac{\varepsilon^3}{3}(\ln\varepsilon)^2-\frac{2}{3}\int_\varepsilon^1 t^2\ln t\,dt$

Alors $\|\omega\|^2=\int_0^1(\omega(t))^2dt=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{\varepsilon^3}{3}(\ln\varepsilon)^2-\frac{2}{3}\int_\varepsilon^1 t^2\ln t\,dt\right)=-\frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln t\,dt=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{(2+1)^2}\right)=\frac{2}{27}$.

R

$$\|w\|^2 - \langle w, p_F(w)\rangle = \frac{2}{27} - \langle w, \frac{5}{3}u - \frac{19}{12}v\rangle = \frac{2}{27} - \frac{5}{3}\underbrace{\langle w,u\rangle}_{-\frac{1}{16}} + \frac{19}{12}\underbrace{\langle w,v\rangle}_{-\frac{1}{9}}$$

$$\|w\|^2 - \langle w, p_F(w)\rangle = \frac{2}{27} + \frac{5}{48} - \frac{19}{108} = \frac{1}{432}\left[2\times 16 + 5\times 9 - 4\times 19\right] = \frac{1}{432}(32+45-76) = \frac{1}{432}.$$

Finalement $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{432}$.

<u>Remarque</u> : $\left(\frac{5}{3}, -\frac{19}{12}\right)$ est le seul élément de $\mathbb{R}^2$ qui réalise ce minimum.

R

EXERCICE

JFC

Exercice | PC | **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation.**

Attention piège à c.

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{F} = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 1\}$.

Montrer l'existence et donner la valeur de $\underset{f\in\mathcal{F}}{\text{Min}} \displaystyle\int_0^1 (f(t))^2\,dt$

Notons que $\mathcal{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E car $0_E \notin \mathcal{F}$ ...

Posons $\forall (f,g)\in E^2$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. C'est de notoriété publique que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée.

$\forall f\in E$, $\|f\|^2 = \int_0^1 (f(t))^2\,dt$. On cherche donc l'existence et la valeur de $\underset{f\in\mathcal{F}}{\text{Min}}\|f\|^2$.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $f_0(t)=1$. Notons que $\int_0^1 f_0(t)\,dt = 1$.

Soit $f\in E$.

$f\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f_0(t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (f(t)-f_0(t))\,dt = 0$.

Posons $F = \{g\in E \mid \int_0^1 g(t)\,dt = 0\}$.

$f\in\mathcal{F} \Leftrightarrow f-f_0\in F \Leftrightarrow \exists g\in F,\ f-f_0 = g \Leftrightarrow \exists g\in F,\ f = f_0+g$.

$\underline{\mathcal{F} = \{f_0+g\ ;\ g\in F\}}$. Notons que F est un sous-espace vectoriel de E.

- $F\subset E$
- $0_E\in F$ donc $F\neq\emptyset$
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(g_1,g_2)\in F^2$. $\int_0^1 (\lambda g_1+g_2)(t)\,dt = \lambda\int_0^1 g_1(t)\,dt + \int_0^1 g_2(t)\,dt \overset{g_1\in F \text{ et } g_2\in F}{=} \lambda\times 0 + 0 = 0$.

  donc $\lambda g_1+g_2\in F$.

  $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (g_1,g_2)\in F^2$, $\lambda g_1+g_2\in F$.

  Ceci achève de montrer que $\underline{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Notons que : $\mathcal{F} = \{f_0+g\ ;\ g\in F\} = \{f_0-g\ ;\ g\in F\}$

Alors $\underset{f\in\mathcal{F}}{\text{Min}}\|f\|^2$ existe $\Leftrightarrow \underset{g\in F}{\text{Min}}\|f_0-g\|^2$ existe $\Leftrightarrow \underset{g\in F}{\text{Min}}\|f_0-g\|$ existe.

Le théorème de meilleure approximation nous tend les bras... $\underline{\text{sauf que}}$ E n'est pas de dimension finie. Or le théorème du cours est énoncé dans un euclidien...

R

Notons que F n'est pas plus de dimension finie que E ! Cela se complique !!

Soit $g \in F$. $\langle f_0, g\rangle = \int_0^1 f_0(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt \underset{g\in F}{=} 0$.

Donc $\forall g \in F$, $\langle f_0, g\rangle = 0$. Alors Pythagore donne :

$\forall g \in F$, $\|f_0 - g\|^2 = \|f_0\|^2 + \|g\|^2$. Donc $\forall g \in F$, $\|f_0 - g\|^2 \geq \|f_0\|^2$ avec égalité si et seulement si $g = 0_E$.

Alors 1/ $\min\limits_{g\in F} \|f_0 - g\|^2$ existe et vaut $\|f_0\|^2$

2/ 0_E est le seul élément de F qui réalise ce minimum

Comme $J_F = \{f_0 - g \,;\, g \in F\}$: $\min\limits_{f \in J_F} \|f\|$ existe, vaut $\|f_0\|^2$ et f_0 est le seul élément de J_F qui réalise ce minimum.

Notons que $\|f_0\|^2 = \int_0^1 1 \times 1\, dt = 1$.

Donc $\min\limits_{f\in J_F} \int_0^1 (f(t))^2 dt$ existe, vaut 1 et f_0 est le seul élément de J_F qui réalise ce minimum.