R

EXERCICE 50

JFC

Exercice | PC | **Distance d'un vecteur à une partie non vide dans un préhilbertien. Un exemple où la distance n'est pas réalisée.**

E est un espace vectoriel préhilbertien, A est une partie non vide de E et x est un élément de E.

Q1. Montrer que $\{||x-a||;\ a \in A\}$ possède une borne inférieure. Cette borne inférieure est **la distance de x à A** que l'on note $d(x, A)$.

On écrit le plus souvent $d(x, A) = \underset{a \in A}{\operatorname{Inf}} ||x-a||$

Q2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique et $||.||$ est la norme associée. M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un élément p_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout p dans $[\![p_0, +\infty[\![$, $M - \dfrac{1}{p} I_n$ est inversible.

b) En déduire que $d(M, GL_n(\mathbb{R})) = 0$.

c) On suppose que M n'est pas inversible. Montrer qu'il n'existe pas d'élément P de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $||M-P|| = d(M, GL_n(\mathbb{R}))$.

Q1 A n'est pas vide donc $\{||x-a||;\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Comme elle est minorée par 0 elle possède une borne inférieure.

$\{||x-a||;\ a \in A\}$ possède une borne inférieure.

Q2 a) 1er cas.. M n'a pas de valeur propre strictement positive.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p} \notin \operatorname{Sp} M$. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $M - \frac{1}{p} I_n$ est inversible.

$p_0 = 1$ convient !

2ème cas.. M admet au moins une valeur propre strictement positive.

$\operatorname{Sp} M \cap]0, +\infty[\neq \emptyset$ et $\operatorname{Sp} M \cap]0, +\infty[$ est une partie finie de $\mathbb{R}$ (card $\operatorname{Sp} M \leqslant n$).

Alors $\operatorname{Sp} M \cap]0, +\infty[$ possède un plus petit élément λ_0.

$\forall \lambda \in]0, \lambda_0[$, $\lambda \notin \operatorname{Sp} M$ donc $\forall \lambda \in]0, \lambda_0[$, $M - \lambda I_n$ est inversible.

Posons $p_0 = \operatorname{Ent}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) + 1$. $p_0 \in \mathbb{N}^*$ car $\lambda_0 > 0$. $p_0 > \frac{1}{\lambda_0}$ et $\lambda_0 > 0$ donc $0 < \frac{1}{p_0} < \lambda_0$.

Mieux $\forall p \in [\![p_0, +\infty[\![$, $0 < \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_0} < \lambda_0$. Alors $\forall p \in [\![p_0, +\infty[\![$, $M - \frac{1}{p} I_n$ est inversible.

Dans les deux cas il existe un élément p_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout p dans $[\![p_0, +\infty[\![$, $M - \frac{1}{p} I_n$ est inversible.

b) Posons $d = d(M, GL_n(\mathbb{R}))$. $d = \underset{P \in GL_n(\mathbb{R})}{\operatorname{Inf}} ||M-P||$. $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $d \leqslant ||M-P||$

R

Alors $\forall p \in [\![p_0, +\infty [\![$, $\alpha \leq \|M - (M - \frac{1}{p} I_n)\| = \|\frac{1}{p} I_n\| = \frac{1}{p}\|I_n\|$.

En faisant tendre p vers $+\infty$ il vient $\alpha \leq 0$. or $\alpha \geq 0$. Ainsi $\alpha = 0$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $d(M, GL_n(\mathbb{R})) = 0$.

c) On suppose M non inversible.

Imaginons qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M - P\| = d(M, GL_n(\mathbb{R}))$.

Alors $\|M - P\| = 0$. $M - P = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. $M = P$. M est inversible !!

Si M n'est pas inversible il n'existe pas d'élément P de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M - P\| = d(M, GL_n(\mathbb{R}))$.

Remarque.- Nous avons ainsi montré que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{R})$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

R

EXERCICE 51

JFC

Exercice | PC | **Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien.**

Démarche utile lorsque les conditions d'application du théorème de meilleure approximation ne sont pas toutes réunies

E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. x est un élément de E.

Q1. Montrer qu'il existe au plus un élément y de F tel que : $||x-y|| = \underset{z\in F}{\text{Inf}}\, ||x-z||$

Q2. Soit y un élément de F. Montrer que : $||x-y|| = \underset{z\in F}{\text{Inf}}\, ||x-z||$ si et seulement si $x-y$ est orthogonale à F.

Q1 Supposons qu'il existe deux éléments y et y' de F tels que $\|x-y\| = \|x-y'\| = \underset{z\in F}{\text{Inf}}\, \|x-z\|$.

Posons $d = \underset{z\in F}{\text{Inf}}\, \|x-z\|$.

Rappelons que : $\forall (u,v)\in E^2$, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

Alors $\|(x-y)+(x-y')\|^2 + \|(x-y)-(x-y')\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-y'\|^2 = 4d^2$.

Ainsi $4d^2 = \|2x-(y+y')\|^2 + \|y'-y\|^2 = 4\|x-\frac{1}{2}(y+y')\|^2 + \|y'-y\|^2$

Or $y\in F$ et $y'\in F$ donc $\frac{1}{2}(y+y')\in F$ car F est un sous-espace vectoriel.

Donc $\|x-\frac{1}{2}(y+y')\|^2 \geqslant d^2$.

Alors $4d^2 = 4\|x-\frac{1}{2}(y+y')\|^2 + \|y'-y\|^2 \geqslant 4d^2 + \|y'-y\|^2$. Ce qui donne $0 \geqslant \|y'-y\|^2$.

Comme $\|y'-y\|^2 \geqslant 0$ il vient $\|y'-y\|^2 = 0$. $\|y'-y\| = 0$. $y' = y$.

<u>Il existe au plus un élément y de F tel que $\|x-y\| = \underset{z\in F}{\text{Inf}}\, \|x-z\|$.</u>

Q2 $y\in F$.

$*$ Supposons que $\|x-y\| = \underset{z\in F}{\text{Inf}}\, \|x-z\|$. Montrons que $x-y\in F^\perp$.

Soit $z\in F$. Montrons que $\langle x-y, z\rangle = 0$.

$\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $y+\lambda z\in F$ donc $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\|x-y\| \leqslant \|x-(y+\lambda z)\|$ ou $\|x-y\|^2 \leqslant \|x-(y+\lambda z)\|^2$.

$\|x-y\|^2 \leqslant \|(x-y)-\lambda z\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\lambda\langle x-y, z\rangle + \lambda^2\|z\|^2$. pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $0 \leqslant -2\lambda\langle x-y,z\rangle + \lambda^2\|z\|^2$.

Ainsi $\forall\lambda\in\,]0,+\infty[$, $0 \leqslant -2\langle x-y,z\rangle + \lambda\|z\|^2$ (1)

et $\forall\lambda\in\,]-\infty,0[$, $0 \geqslant -2\langle x-y,z\rangle + \lambda\|z\|^2$ (2)

R

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans (1) (resp. (2)) on obtient $0 \leq -2\langle x-y, z\rangle$ (resp. $0 \geq -2\langle x-y, z\rangle$).

Alors $-2\langle x-y, z\rangle = 0$. $\langle x-y, z\rangle = 0$ et ceci pour tout z dans F.

Par conséquent $x-y \in F^\perp$.

* Réciproquement supposons que $x-y \in F^\perp$ et montrons que $\|x-y\| = \operatorname{Inf}_{z\in F} \|x-z\|$.

Soit $z \in F$. Montrons que $\|x-y\| \leq \|x-z\|$ (cela donnera rapidement le résultat...)

$\|x-z\|^2 = \|(x-y)+(y-z)\|^2$. Or $x-y \in F^\perp$ et $y-z \in F$. Pythagore donne alors :

$\|x-z\|^2 \overset{(*)}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$. Alors $\|x-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$ ou $\|x-z\| \geq \|x-y\|$.

donc $\forall z \in F$, $\|x-y\| \leq \|x-z\|$ et $y \in F$. Alors $\|x-y\| = \operatorname{Inf}_{z\in F} \|x-z\|$.

Mieux $\operatorname{Min}_{z\in F} \|x-z\|$ existe et vaut $\|x-y\|$.

(*) donne un peu plus encore. $\forall z \in F-\{y\}$, $\|x-z\|^2 > \|x-y\|^2$.

donc $\forall z \in F-\{y\}$, $\|x-z\| > \|x-y\|$. Ainsi y est le seul point de F qui réalise $\operatorname{Min}_{z\in F} \|x-z\|$ ... ce que nous savions déjà grâce à $g1$.

<u>Remarque</u>.. Supposons que F et $F^\perp$ soient supplémentaires. Soit $x \in E$.

$\exists!(y, y') \in F \times F^\perp$, $x = y + y'$.

Alors $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$ donc $\|x-y\| = \operatorname{Inf}_{z\in F} \|x-z\| = d(x, F)$.

y est même l'unique élément de F tel que $\|x-y\| = \operatorname{Inf}_{z\in F} \|x-z\| = d(x, F)$

Notons encore que y n'est autre que la projection orthogonale de x sur F.

Le théorème de meilleure approximation vaut encore dans un préhilbertien pourvu que le sous-espace concerné et son orthogonal soient supplémentaires.

R

EXERCICE 52

JFC

Exercice | PC | **La distance n'est pas réalisée again.**

$E = \mathbb{R}[X]$. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{\mathrm{Min}(p,q)} a_k b_k$. φ est un produit scalaire sur E

On pose encore $F = \{P \in E \mid P(0) = 1\}$ et $P_0 = X^0 = 1$.

Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'il n'existe pas délément P de F tel que $d(P_0, F) = \|P_0 - P\|$.

On pourra utiliser la famille $(X^{i+1} - X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

Supposons qu'il existe $P \in F$ tel que $d(P_0, F) = \|P_0 - P\|$.

La question 1 de l'exercice précédent montre que $P_0 - P \in F^\perp$.

$\forall i \in \mathbb{N}$, $X^{i+1} - X^i \in F$ car $\forall i \in \mathbb{N}$, $1^{i+1} - 1^i = 0$.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\langle P_0 - P, X^{i+1} - X^i \rangle = 0$. Posons $Q = P_0 - P$.

$\exists \delta \in \mathbb{N}^*, \exists (a_0, a_1, \dots, a_\delta) \in \mathbb{R}^{\delta+1}$, $Q = \sum_{\ell=0}^{\delta} a_\ell X^\ell$. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\langle Q, X^{i+1} - X^i \rangle = 0$

* coupé !

Alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $\langle Q, X^i \rangle = \langle Q, X^{i+1} \rangle$.

Pour $i = \delta$ ceci donne $a_\delta = 0$

Pour $i \in [\![0, \delta-1]\!]$, $\langle Q, X^i \rangle = \langle Q, X^{i+1} \rangle$ donne $a_i = a_{i+1}$.

Alors $a_0 = a_1 = \dots = a_\delta = 0$ donc $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P = P_0$.

Or $P_0(0) = 1$ et $P(0) = 0$ car $P \in F$. Ainsi $0 = 1$!

Donc il n'existe pas d'élément $P \in F$ tel que $d(P_0, F) = \|P_0 - P\|$.

Exercice.. Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$ ... c'est presque fait dans ce qui précède.

EXERCICE 53

JFC

Exercice | PC | **Pseudo inverse**

E et E' sont deux espace vectoriels euclidiens de dimensions non nulles p et n. f est une application linéaire de E dans E' et b' est un élément de E'.

Q1. Montrer que $\underset{x\in E}{\text{Min}}\,||b' - f(x)||$ existe.

Q2. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments de E qui réalisent ce minimum et b_0 est un élément de $\mathcal{S}$.

a) Exprimer les éléments de $\mathcal{S}$ en fonction de b_0 et d'un sous-espace vectoriel classique.

b) Montrer que $\mathcal{S}$ contient un élément de norme minimum et un seul que nous noterons b.

c) Montrer que b est caractérisé par $b' - f(b) \in \text{Im}\, f^{\perp}$ et $b \in (\text{Ker}\, f)^{\perp}$.

Q3. a) Montrer que l'application g de E' dans E qui a tout élément b' de E' associe l'élément b obtenu dans Q2, est linéaire.

g est le pseudo inverse de f.

b) Donner la nature de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Q1 $\{||b'-f(x)||\,;\, x\in E\} = \{||b'-y||\,;\, y\in \text{Im} f\}$.

Le théorème de meilleure approximation montre que $\underset{y\in \text{Im} f}{\text{Min}}||b'-y||$ existe. De plus la projection orthogonale $\hat{b}'$ de b' sur $\text{Im} f$ est l'unique élément de $\text{Im} f$ qui réalise ce minimum.

Alors : 1) $\underset{x\in E}{\text{Min}}||b'-f(x)||$ existe.

2) les éléments de E qui réalisent ce minimum sont les éléments dont l'image par f est $\hat{b}'$.

Q2 a) Nous venons de voir que $\mathcal{S} = \{x\in E \mid f(x) = \hat{b}'\}$.

$b_0 \in \mathcal{S}$ donc $f(b_0) = \hat{b}'$. Soit $x\in E$

$x\in \mathcal{S} \Leftrightarrow f(x) = \hat{b}' \Leftrightarrow f(x) = f(b_0) \Leftrightarrow f(x-b_0) = 0_{E'} \Leftrightarrow x - b_0 \in \text{Ker} f$.

$x\in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists t\in \text{Ker} f,\ x-b_0 = t \Leftrightarrow \exists t\in \text{Ker} f,\ x = b_0+t$.

$\mathcal{S} = \{b_0+t\,;\, t\in \text{Ker} f\}$.

b) $\text{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel. Ainsi $\mathcal{S} = \{b_0+t\,;\,t\in \text{Ker} f\} = \{b_0-t\,;\, t\in \text{Ker} f\}$

le théorème de meilleure approximation montre que $\underset{t\in \text{Ker} f}{\text{Min}}||b_0-t||$ existe et que la projection orthogonale $\hat{b}_0$ de b_0 sur $\text{Ker} f$ est l'unique élément de $\text{Ker} f$ qui réalise ce minimum.

Alors $\min_{b\in\mathcal{S}} \|b\|$ existe et $b_0-\hat{b}_0$ est le seul élément de $\mathcal{S}$ qui réalise ce minimum.

Donc <u>$\mathcal{S}$ contient un élément de norme minimum et un seul qui est $b_0-\hat{b}_0$. Dans la suite nous le noterons b.</u>

c) * $b\in\mathcal{S}$ donc $f(b)$ est la projection orthogonale $\hat{b}'$ de b' sur $\mathrm{Im} f$.

Alors <u>$b'-f(b)\in(\mathrm{Im} f)^\perp$.</u>

$b=b_0-\hat{b}_0$ et $\hat{b}_0$ est la projection orthogonale de b_0 sur $\mathrm{Ker} f$. Alors <u>$b\in(\mathrm{Ker} f)^\perp$.</u>

* Soit c un élément de E tel que $b'-f(c)\in(\mathrm{Im} f)^\perp$ et $c\in(\mathrm{Ker} f)^\perp$.

Montrons que $c=b$.

$f(c)\in \mathrm{Im} f$ et $b'-f(c)\in(\mathrm{Im} f)^\perp$ donc $f(c)$ est la projection orthogonale $\hat{b}'$ de b' sur $\mathrm{Im} f$. Ainsi $c\in\mathcal{S}$. $\exists t\in \mathrm{Ker} f$, $c=b_0-t$.

Alors $b_0=c+t$ avec $c\in(\mathrm{Ker} f)^\perp$ et $t\in\mathrm{Ker} f$. Ainsi t est la projection orthogonale de b_0 sur $\mathrm{Ker} f$. Alors $t=\hat{b}_0$.

Donc $c=b_0-t=b_0-\hat{b}_0=b$. <u>$c=b$.</u>

<u>b est bien caractérisé par $b'-f(b)\in(\mathrm{Im} f)^\perp$ et $b\in(\mathrm{Ker} f)^\perp$.</u>

Q3) a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit b'_1 et b'_2 deux éléments de E'. Posons $z=\lambda g(b'_1)+g(b'_2)$,

$b_1=g(b'_1)$ et $b_2=g(b'_2)$. $z=\lambda b_1+b_2$.

b_1 et b_2 sont dans $(\mathrm{Ker} f)^\perp$ donc $z=\lambda b_1+b_2\in(\mathrm{Ker} f)^\perp$

$$\lambda b'_1+b'_2-f(z)=\lambda b'_1+b'_2-\lambda f(b_1)-f(b_2)=\lambda\underbrace{(b'_1-f(b_1))}_{\in(\mathrm{Im} f)^\perp}+\underbrace{(b'_2-f(b_2))}_{\in(\mathrm{Im} f)^\perp}\in(\mathrm{Im} f)^\perp$$

$z\in(\mathrm{Ker} f)^\perp$ et $\lambda b'_1+b'_2-f(z)\in(\mathrm{Im} f)^\perp$ donc $z=g(\lambda b'_1+b'_2)$.

Alors $g(\lambda b'_1+b'_2)=z=\lambda b_1+b_2=\lambda g(b'_1)+g(b'_2)$.

<u>Ceci achève de montrer que g est linéaire.</u>

b) • $\forall b' \in E'$, $b' - f(g(b')) \in (\mathrm{Im} f)^\perp$ et $f(g(b')) \in \mathrm{Im} f$.

Alors pour tout b' dans E', $f(g(b'))$ est la projection orthogonale de b' sur $\mathrm{Im} f$.

<u>$f \circ g$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im} f$.</u>

• Soit $t \in E$. Posons $y = f(t)$. $\exists ! (t_1, t_2) \in \mathrm{Ker} f \times (\mathrm{Ker} f)^\perp$, $t = t_1 + t_2$.

$t_2 \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$ et $y - f(t_2) \underset{f(t_1) = 0_{E'}}{=} y - f(t_1) - f(t_2) = y - f(t) = 0_{E'} \in (\mathrm{Im} f)^\perp$

Alors $t_2 = g(y)$ donc $t_2 = g(f(t))$. $g(f(t))$ est la projection orthogonale de t sur $(\mathrm{Ker} f)^\perp$ car $t = t_1 + t_2$ avec $t_1 \in \mathrm{Ker} f$ et $t_2 \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$.

Donc <u>$g \circ f$ est la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker} f)^\perp$.</u>

EXERCICE 54 JFC

Exercice **S** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation. Edhec 1999 PB.**

Bon entraînement.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, \dots, f_n$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_0(x) = e^{-x}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_k(x) = x^k\, e^{-x}$.

On appelle E_n, l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

On note d l'application qui à toute fonction de E_n, associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1) Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de E_n.

2) a. Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.

b. Montrer que d est un endomorphisme de E_n.

3) a. Vérifier que d est un automorphisme de E_n.

b. Justifier que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ d\left(\dfrac{1}{k!} f_k\right) = \dfrac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \dfrac{1}{k!} f_k$.

c. En déduire, pour tout j de $[\![0,n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

4) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale $I_j = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^j\, e^{-x}\, dx$ converge, puis donner sa valeur en fonction de j.

5) Montrer que l'application qui à tout couple (f,g) de E_n, associe $(f \,|\, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^x\, dx$ est un produit scalaire sur E_n.

Pour tout f de E_n, on note désormais $||f||$ la norme de f.

Partie 2

1) On pose $E_{n-1} = \text{Vect}(f_0, f_1 \dots, f_{n-1})$.

a. Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant : $||f_n - h|| = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{g \in E_{n-1}} ||f_n - g||$.

On pose désormais $h = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.

b. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

c. En déduire que pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$.

2) On considère la fonction P définie pour tout x réel par : $P(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_j (x+1)\dots(x+j) + (x+1)(x+2)\dots(x+n)$.

a. Vérifier que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(k) = 0$.

b. En déduire explicitement P, puis vérifier que $P(n) = n!$.

3) a. Montrer que $||f_n - h||^2 = (f_n - h \,|\, f_n)$.

b. En déduire la valeur de $m = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k\right)^2 e^{-x}\, dx$.

PROBLÈME

Partie 1.. (Q1) Par définition $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E_n.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k = 0_{E_n}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x} = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\right) e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = 0$.

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ admet alors une infinité de racines, ce polynôme est le polynôme nul ; ses coefficients sont nuls. Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ceci achève de prouver que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E_n.

Finalement $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de E_n.

(Q2) a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $k f_{k-1}(x) - f_k(x) = k x^{k-1} e^{-x} - x^k e^{-x} = (k x^{k-1}) e^{-x} + x^k(-e^{-x}) = f_k'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $d(f_k)(x) = (k f_{k-1} - f_k)(x)$.

Finalement $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.

b) * Soit $(f, g) \in E_n^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$d(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda d(f) + d(g)$

d est linéaire.

* $d(f_0) = f_0' = -f_0$ (la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$) ; $d(f_0) \in E_n$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k \in \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) = E_n$.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $d(f_k) \in E_n$.

Soit $f \in E_n$. $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k$.

$d(f) = d\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k d(f_k) \in E_n$. $\forall f \in E_n$, $d(f) \in E_n$.

Ceci achève alors de prouver que d est un endomorphisme de E_n.

Q3 a] Soit $f \in \mathrm{Ker}\, d$. $f' = 0_{E_n}$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda$.

$f \in E_n$ donc $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lambda = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x}$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{x^k}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda$. Nécessairement $\lambda = 0$. $f = 0_{E_n}$.

Finalement $\mathrm{Ker}\, d = \{0_{E_n}\}$. d est un endomorphisme injectif de E_n qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n+1$; ceci suffit pour dire que :
d est un automorphisme de E_n.

b] Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.

$d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{k!} d(f_k) = \frac{1}{k!} [k f_{k-1} - f_k] = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$

c] $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}\left(d\left(\frac{1}{k!} f_k\right)\right) = d^{-1}\left(\frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} d^{-1}(f_{k-1}) - \frac{1}{k!} d^{-1}(f_k)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{k!} f_k = \frac{1}{(k-1)!} d^{-1}(f_{k-1}) - \frac{1}{k!} d^{-1}(f_k)$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} f_k = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{(k-1)!} d^{-1}(f_{k-1}) - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} d^{-1}(f_k) = \frac{1}{0!} d^{-1}(f_0) - \frac{1}{j!} d^{-1}(f_j)$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = j! \left[- \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} f_k + d^{-1}(f_0)\right]$

Notons que $d(f_0) = -f_0$ donc $f_0 = d^{-1}(-f_0) = -d^{-1}(f_0)$; $d^{-1}(f_0) = -f_0$.

Ainsi $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = j! \left[- \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} f_k - f_0\right] = -j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f_k$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = -j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f_k$. Cette dernière égalité vaut encore pour $j = 0$.

Ainsi $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $d^{-1}(f_j) = -j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f_k$.

(Q4) Soit $j \in \mathbb{N}$. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $j \in [\![0,n]\!]$ (!).

Posons $g_j = d^{-1}(f_j)$; $d(g_j) = f_j$ donc $g_j' = f_j$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A x^j e^{-x} dx = \int_0^A f_j(x) dx = \int_0^A g_j'(x) dx = g_j(A) - g_j(0)$.

$\int_0^A x^j e^{-x} dx = g_j(A) - g_j(0) = -j! \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{\ell!} f_\ell(A) + j! \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{\ell!} f_k(0)$.

Notons que : $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $\lim_{A \to +\infty} f_k(A) = \lim_{A \to +\infty} (A^k e^{-A}) = 0$ et $f_k(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \geq 1 \\ 1 \text{ si } k = 0 \end{cases}$

Ainsi $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x^j e^{-x} dx = -j! \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{\ell!} \times 0 + j! \times \frac{1}{0!} \times 1 = j!$.

Donc $\int_0^{+\infty} x^j e^{-x} dx$ existe et vaut $j!$

Pour tout j dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^j e^{-x} dx$ existe et vaut $j!$ ...qui est un résultat du programme ; $\Gamma(j+1) = j!$

(Q5) * Soit $(f,g) \in E_n^2$.

Montrons que $\int_0^{+\infty} f(x) g(x) e^{x} dx$ converge.

$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$ et $g = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f_i$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right) e^{-x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i\right) e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) g(x) e^{x} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i\right) e^{-x} e^{-x} e^{x}$

Posons $\varphi = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i X^i\right)$. $\varphi \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ donc $\exists (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\varphi = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j X^j$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) g(x) e^{x} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \; x^j e^{-x}$

Pour tout $j \in [\![0, 2n]\!]$, $\int_0^{+\infty} x^j e^{-x} dx$ converge donc $\int_0 f(x) g(x) e^{x} dx$ converge

également.

Ainsi si $(f,g) \in E_n^2$, $\int_0^{+\infty} f(x) g(x) e^{x} dx$ converge.

* Soit $(f,g,h)\in E_n^3$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty}[(\lambda f+g)h](x)e^x\,dx=\int_0^{+\infty}[\lambda f(x)h(x)e^x+g(x)h(x)e^x]\,dx=\lambda\int_0^{+\infty}f(x)h(x)e^x\,dx+\int_0^{+\infty}g(x)h(x)e^x\,dx$$

↑ toutes les intégrales convergent.

Ainsi $(\lambda f+g|h)=\lambda(f|h)+(g|h)$

* Soit $(f,g)\in E_n^2$. $(f|g)=\int_0^{+\infty}(fg)(x)e^x\,dx=\int_0^{+\infty}(gf)(x)e^x\,dx=(g|f)$; $(f|g)=(g|f)$.

* Soit $f\in E_n$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f^2(x)e^x\geqslant 0$; $\int_0^{+\infty}f^2(x)e^x\,dx\geqslant 0$; $(f|f)\geqslant 0$.

Supposons $(f|f)=0$. Alors $x\mapsto f^2(x)e^x$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $\int_0^{+\infty}f^2(x)e^x\,dx=0$.

Alors $x\mapsto f^2(x)e^x$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f^2(x)e^x=0$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f^2(x)=0$. $f=0_{E_n}$.

Ainsi $(f|f)=0\Rightarrow f=0$.

Les quatre points précédents montrent que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E_n.

Partie 2 (Q1) a) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout élément x de E il existe un unique élément x^* de F tel que $\|x-x^*\|=\min_{y\in F}\|x-y\|$; x^* est la projection orthogonale de x sur F.

E_{n-1} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(E_n,(\cdot|\cdot))$ et f_n est un élément de E_n. Par conséquent il existe un unique élément h de E_{n-1} tel que :

$$\|f_n-h\|=\min_{g\in E_{n-1}}\|f_n-g\|=\operatorname{Inf}_{g\in E_{n-1}}\|f_n-g\|.$$ h est la projection orthogonale de f_n sur E_{n-1}.

$h\in E_{n-1}$; ceci permet d'écrire $h=-\sum_{i=0}^{n-1}a_if_i$.

b) h est la projection orthogonale de f_n sur E_{n-1} donc $h\in E_{n-1}$ et $f_n-h\in E_{n-1}^{\perp}$

Comme $E_{n-1}=\mathrm{Vect}(f_0,f_1,\dots,f_{n-1})$, pour tout k dans $[\![0,n-1]\!]$, f_n-h est orthogonal à f_k

c) Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$.

$$0=(f_n-h|f_k)=(f_n|f_k)-(h|f_k)=(f_n|f_k)-\Big(-\sum_{j=0}^{n-1}a_jf_j\Big|f_k\Big)=(f_n|f_k)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(f_j|f_k).$$

$$0=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} x^k e^{-x} e^x \,dx + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_0^{+\infty} x^j e^{-x} x^k e^{-x} e^x \,dx = \int_0^{+\infty} x^{n+k} e^{-x} \,dx + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_0^{+\infty} x^{j+k} e^{-x} \,dx$$

donc $\sum_{j=0}^{n-1} a_j I_{j+k} + I_{n+k} = 0$; $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$

$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \ \sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0.$

Q2 a) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.

$$P(k) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (k+1)\cdots(k+j) + (k+1)(k+2)\cdots(k+n)$$

$$P(k) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{(k+j)!}{k!} + \frac{(k+n)!}{k!} = \frac{1}{k!}\left[a_0 k! + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)!\right]$$

$$P(k) = \frac{1}{k!}\left[\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)!\right] = 0.$$

$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \ P(k) = 0.$

$0,1,2,\dots,n-1$ sont des zéros de P. $X(X-1)\cdots(X-(n-1))$ divise P. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = Q \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$

Or remarque : $\deg P = \deg[(X+1)(X+2)\cdots(X+n)] = n$ et $\deg\left(\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right) = n$.

Nécessairement $\deg Q = 0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $Q = \lambda$.

Ainsi $P = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

Le coefficient de X^n dans P est encore le coefficient de X^n dans $(X+1)\cdots(X+n)$ c'est-à-dire 1.

Le coefficient de X^n dans $\lambda \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ est λ. Ainsi $\lambda = 1$ et $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

$P(n) = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k) = \prod_{i=1}^{n} i = n!$. $P(n) = n!$

Q3 a) $h \in E_{n-1}$ et $f_n - h \in E_{n-1}^{\perp}$ donc $\|f_n - h\|^2 = (f_n - h \mid f_n - h) = (f_n - h \mid f_n) - \underbrace{(f_n - h \mid h)}_{=0} = (f_n - h \mid f_n)$.

$\|f_n - h\|^2 = (f_n - h \mid f_n)$.

b) $m = \inf_{(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k\right)^2 e^{-x} = \inf_{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n e^{-x} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k e^{-x}\right)^2 e^x \,dx$

$$m = \operatorname{Inf}_{g \in E_{n-1}} \int_0^{+\infty} (f_n(x) - g(x))^2 e^{-x}\, dx = \operatorname{Inf}_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|^2 = \|f_n - h\|^2 = (f_n - h \mid f_n)$$

$$(f_n - h \mid f_n) = (f_n \mid f_n) + (-h \mid f_n) = (f_n \mid f_n) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (f_j \mid f_n) = (n+n)! + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+n)! = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)!$$

$$P(n) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n+1)\cdots(n+j) + (n+1)(n+2)\cdots(n+n).$$

$$n!\, P(n) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)! = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)! = (f_n - h \mid f_n).$$

Ainsi $\quad m = n!\, P(n) = (n!)^2.$

$$m = \operatorname{Inf}_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \right)^2 e^{-x}\, dx = (n!)^2.$$

R

EXERCICE 55 J.F.C.

Exercice **Matrice du produit scalaire.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace vectoriel euclidien E.

On considère la matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est **la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$.**

Q1. x et y sont deux éléments de E. On pose $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$.

Montrer que $< x, y >= {}^tXAY = {}^tYAX =< X, AY >=< Y, AX >$ et que $||x|| = \sqrt{{}^tXAX}$.

Q2. $\mathcal{B}'$ est une seconde base de E, A' est la matrice du produit scalaire dans $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$. Montrer que $A' = {}^tPAP$.

Q3. Montrer que A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.

Énoncer et démontrer une réciproque.

Q1 Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Z = AY = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Posons encore $A = (a_{ij})$!!

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^n <e_i, e_j>\, y_j$.

$<x,y> = <\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j> = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j <e_i, e_j>$.

$<x,y> = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n <e_i, e_j> y_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i z_i = {}^tXZ = {}^tXAY = <X, AY>$.

$\underline{<x,y> = {}^tXAY = <X,AY>}$. Par symétrie du produit scalaire on a aussi $\underline{<x,y> = {}^tYAX = <Y,AX>}$.

On a encore $<x,x> = {}^tXAX = <X,AX>$. Donc $\underline{||x|| = \sqrt{{}^tXAX} = \sqrt{<X,AX>}}$.

Q2 Soient X' et Y' deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons x et y les éléments de E de matrices X' et Y' dans $\mathcal{B}'$.

Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$. $X = PX'$ et $Y = PY'$

${}^tX'A'Y' = <x,y> = {}^tXAY = {}^t(PX')APY' = {}^tX'\,{}^tPAPY'$

Ainsi $\underline{{}^tX'(A' - {}^tPAP)Y' = 0}$.

R

Ainsi $\forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall Y' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX'(A' - {}^tPAP)Y' = 0$.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ {}^tE_i(A' - {}^tPAP)E_j = 0$.

Posons $A' - {}^tPAP = (d_{ij})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{ij} \underset{\uparrow \text{ai commu...}}{=} {}^tE_i(A' - {}^tPAP)E_j = 0$

Finalement $A' - {}^tPAP = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $A' = {}^tPAP$.

Q3 $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_j, e_i \rangle$

Donc la matrice $A = (\langle e_i, e_j \rangle)$ est symétrique.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit λ une valeur propre de A. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit x l'élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$.

$\langle x, x \rangle = \langle X, AX \rangle = \langle X, \lambda X \rangle = \lambda \|X\|^2$.

Alors $\lambda = \dfrac{\langle x, x \rangle}{\|X\|^2}$ car $\|X\|^2 \neq 0$ puisque $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\lambda = \dfrac{\|x\|^2}{\|X\|^2}$. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $x \neq 0_E$. Alors $\|x\|^2 > 0$.

$\|x\|^2 > 0$ et $\|X\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

Les valeurs propres de A sont strictement positives.

Réciproque .. Soit $C = (c_{ij})$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

dont les valeurs propres sont strictement positives.

Montrons que C est la matrice d'un produit scalaire.

Pdas 19 $E' = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

φ $\forall (X,Y) \in E' \times E'$, $\varphi(X,Y) = {}^tXCY = \langle X, CY \rangle$.

Montrons que φ est un produit scalaire sur E' de matrice C dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de E'.

- φ est bien une application de $E' \times E'$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(X,Y,Z) \in E'^3$.

$\varphi(X, \lambda Y + Z) = \langle X, C(\lambda Y + Z) \rangle = \langle X, \lambda CY + CZ \rangle = \lambda \langle X, CY \rangle + \langle X, CZ \rangle$

$\varphi(X, \lambda Y + Z) = \lambda \varphi(X,Y) + \varphi(X,Z)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (X,Y,Z) \in E'^3, \ \varphi(X, \lambda Y + Z) = \lambda \varphi(X,Y) + \varphi(X,Z)$.

- Soit $(X,Y) \in E'^2$.

$$\varphi(X,Y) = \langle X, CY \rangle = \langle CY, X \rangle = {}^t(CY)X = {}^tY\,{}^tCX \overset{{}^tC = C}{=} {}^tYCX = \langle Y, CX \rangle = \varphi(Y,X).$$

$\forall (X,Y) \in E'^2, \ \varphi(X,Y) = \varphi(Y,X)$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ $\varphi(X,X) = \langle X, CX \rangle = 0$.

Supposons $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Montrons alors que $\varphi(X,X) > 0$.

Soit à montrer que $\langle X, CX \rangle > 0$.

$C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et C est symétrique. Alors il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ constituée de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$\exists (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k X_k$. Alors $CX = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k C X_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \alpha_k X_k$

comme $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthonormée $\langle X, CX \rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \alpha_k$

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k > 0$ par hypothèse. Ainsi $\varphi(X,X) = \langle X, CX \rangle \geqslant 0$.

Supposons $\varphi(X,X) = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \alpha_k = \langle X, CX \rangle = \varphi(X,X) = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \gamma_k^2 \alpha_k \geqslant 0$

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_k^2 d_k = 0$ et $d_k = 0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_k^2 = 0$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_k = 0$. $X = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k X_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ce

qui contredit l'hypothèse. Alors $\varphi(X,X) > 0$.

Donc $\varphi(X,X) = 0$ si $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\varphi(X,X) > 0$ si $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\forall X \in E'$, $\varphi(X,X) \geqslant 0$.

Et $\forall X \in E'$, $\varphi(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0_{E'}$.

Ceci achève de montrer que <u>φ est un produit scalaire sur $E' = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

Notons que la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$.

est C.

Posons $C = (c_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = {}^tE_i C E_j = \langle E_i, CE_j \rangle = \varphi(E_i, E_j)$.

C est bien la matrice du produit scalaire φ de E' dans la base

$\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de E'.

<u>C est une matrice de produit scalaire.</u>

EXERCICE 56

Exercice n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et E est un espace vectoriel euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $< ., . >$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base <u>**quelconque**</u> de E. On pose : $\forall x \in E,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Montrer que f est un automorphisme de E.

c) Que dire de f lorsque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E. Enoncer et démontrer une réciproque.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) Montrer que f est symétrique.

b) Prouver que les valeurs propres de f sont strictement positives.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$.

Montrer qu'il existe un unique élément e'_i de E orhogonal aux vecteurs $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{i-1},\ e_{i+1},\ \ldots,\ e_n$ et tel que $< e'_i, e_i >= 1$.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base de E et préciser la matrice de f relativement aux base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ **<u>Facultatif</u>** Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E, à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$. Vérifier que $\big(s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormale de E.

Q1 <u>a)</u> . f est, de toute évidence une application de E dans E.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in E^2$.

$f(\lambda x + y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < \lambda x + y, e_k > e_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda < x, e_k > + < y, e_k >) e_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k + \sum_{k=1}^{n} < y, e_k > e_k$.

$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

<u>f est un endomorphisme de E.</u>

<u>b)</u> Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k = 0_E$; $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $< x, e_k > = 0$ ($(e_1, \ldots, e_n)$ est libre).

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $< x, e_k > = 0$; $x \in (\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n))^{\perp} = E^{\perp} = \{0_E\}$; $x = 0_E$.

$\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ donc f est injectif

f est un <u>endomorphisme</u> injectif de E et $\dim E < +\infty$; <u>f est un automorphisme de E</u>.

<u>c)</u> * Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < e_i, e_k > e_k = < e_i, e_i > e_i = e_i$.

· Les endomorphismes f et Id_E, de E, coïncident sur la base $\mathcal{B}$.

Ainsi <u>$f = \mathrm{Id}_E$</u>.

* Réciproquement, supposons que $f = \mathrm{Id}_E$ et montrons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Il suffit de prouver que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale, non ?

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $e_i \underset{f = Id_E}{=} f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle e_k$. Comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle e_i, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \\ 0 \text{ si } k \neq i \end{cases}$

Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle e_i, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \\ 0 \text{ si } k \neq i \end{cases}$.

ceci achève de montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Finalement $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E si et seulement si $f = Id_E$.

(Q2) a) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle f(x), y \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle \overset{\alpha!}{=} \sum_{k=1}^{n} \langle x, \langle e_k, y \rangle e_k \rangle.$$

Donc $\langle f(x), y \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$. f est un endomorphisme symétrique de E.

b) Soit λ une valeur propre de E. $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$.

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle f(x), x \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle$$

$$\lambda \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle)^2 ; \quad \lambda = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle)^2 \geq 0.$$

Or f est injective donc $0 \notin Sp(f)$. Ainsi $\lambda \neq 0$ et $\lambda \geq 0$. $\lambda > 0$.

Les valeurs propres de f sont strictement positives.

(Q3) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Posons $F_i = Vect(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$.

$\dim F_i = n-1$ donc $F_i^{\perp}$ est une droite vectorielle de E.

Soit u_i un vecteur non nul de $F_i^{\perp}$. $F_i^{\perp} = Vect(u_i)$.

Observons que u_i et e_i ne sont pas orthogonaux car si u_i et e_i sont orthogonaux : $e_i \in (\mathrm{Vect}(u_i))^{\perp} = (F_i^{\perp})^{\perp} = F_i = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n)$ et la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est alors liée.

Montrons maintenant que : $\exists !\, e'_i \in E$ tel que $\begin{cases} 1) \ e'_i \text{ est orthogonal à } e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n \\ 2) \ \langle e'_i,e_i\rangle = 1 \end{cases}$

→ Analyse / unicité.

Supposons que e'_i existe. $e'_i \in (\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n))^{\perp} = F_i^{\perp} = \mathrm{Vect}(u_i)$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $e'_i = \lambda u_i$.

De plus $1 = \langle e'_i,e_i\rangle = \langle \lambda u_i, e_i\rangle = \lambda\langle u_i,e_i\rangle$, $\lambda = \dfrac{1}{\langle u_i,e_i\rangle}$ car $\langle u_i,e_i\rangle \neq 0$.

Ainsi $e'_i = \dfrac{1}{\langle u_i,e_i\rangle} u_i$.

→ Synthèse / existence. Posons $e'_i = \dfrac{1}{\langle u_i,e_i\rangle} u_i$ ($\langle u_i,e_i\rangle \neq 0$!).

Alors $e'_i \in \mathrm{Vect}(u_i) = F_i^{\perp}$, e'_i est orthogonal à $e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n$.

De plus $\langle e'_i,e_i\rangle = \left\langle \dfrac{1}{\langle u_i,e_i\rangle} u_i, e_i\right\rangle = \dfrac{1}{\langle u_i,e_i\rangle}\langle u_i,e_i\rangle = 1$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique élément e'_i de E orthogonal à $e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n$ et tel que $\langle e'_i,e_i\rangle = 1$.

b) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e'_i) = \sum_{k=1}^{n} \langle e'_i,e_k\rangle e_k = \langle e'_i,e_i\rangle e_i = e_i$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e'_i = f^{-1}(e_i)$. Alors $\mathcal{B}' = (e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ est l'image par l'automorphisme f^{-1} de la base $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ est une base de E ... c'est l'unique base de E biorthogonale à $\mathcal{B}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e'_i) = e_i$. $M(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = I_n$ (matrice identité ou unité de $M_n(\mathbb{R})$).

Remarque.. On peut retrouver $\mathcal{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ base de E en montrant simplement que cette famille est libre. Pour cela il suffit de partir de $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e'_k = 0_E$ et d'écrire que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \langle 0_E,e_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e'_k, e_i\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e'_k,e_i\rangle = \alpha_i$!

(Q4) Observons que : $s=(s\circ f)^{-1} \Leftrightarrow s=f^{-1}\circ s^{-1} \Leftrightarrow s\circ s=f^{-1}$.

Considérons une base orthonormale $\hat{\mathcal{B}}$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (une telle base existe car f est symétrique). $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$.

$M_{\hat{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$; $M_{\hat{\mathcal{B}}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$. Soit s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base orthonormale $\hat{\mathcal{B}}$ est $\begin{pmatrix} \sqrt{1/\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{1/\lambda_n} \end{pmatrix}$.

1) s est symétrique car sa matrice dans la base <u>orthonormale</u> $\hat{\mathcal{B}}$ est symétrique.

2) $Sp(s) = \left\{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \ldots, \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}}\right\}$ donc les valeurs propres de s sont strictement positives.

3) s est un automorphisme de E car $0 \notin Sp(s)$ et $\dim E < +\infty$.

4) $M_{\hat{\mathcal{B}}}(s\circ s) = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = M_{\hat{\mathcal{B}}}(f^{-1})$ donc $s\circ s = f^{-1}$; $s = f^{-1}\circ s^{-1} = (s\circ f)^{-1}$.

<u>Il existe un automorphisme symétrique s de E, à valeurs propres strictement positives tel que</u>

<u>$s=(s\circ f)^{-1}$</u>... on peut même montrer l'unicité de s ... c'est un bon exercice.

Notons que $(s(e_1), \ldots, s(e_n))$ est une base orthonormale il suffit de vérifier que c'est une famille orthonormale ($\ldots \dim E = n$).

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$e_i = f(f^{-1}(e_i)) = \sum_{k=1}^{n} \langle f^{-1}(e_i), e_k \rangle e_k$; comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle f^{-1}(e_i), e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k\neq i \end{cases}$.

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle f^{-1}(e_i), e_k \rangle = \langle s\circ s(e_i), e_k \rangle \overset{s \text{ est symétrique}}{=} \langle s(e_i), s(e_k) \rangle$.

Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle s(e_i), s(e_k) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k\neq i \end{cases}$

ceci achève de montrer que <u>$(s(e_1), \ldots, s(e_n))$ est une base orthonormale de E.</u>

EXERCICE 57

Exercice **LYON 1997 PB 1 Utilisation de la matrice d'un produit scalaire pour trouver une projection dans un problème d'approximation d'une fonction continue par un polynôme.**

Bon entraînement.

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 On passe... Montrer que l'application $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}\ (f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, e_i l'application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R} : t \mapsto t^{i-1}$.

On rappelle que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E_n.

Q2 Calculer, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $\Phi(e_i,e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n : $H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$.

Q3 Etude du cas $n = 2$

JF Rappeler un résultat essentiel sur l'inversibilité d'une matrice d'ordre 2.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.

b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Q4 Etablir que la matrice H_n est diagonalisable.

Q5 a) Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.

On note $a_1,\ldots,a_n$ les réels tels que $P = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $b_1,\ldots,b_n$, les réels tels que $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Montrer : $\Phi(P,Q) = {}^tAH_nB$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

b) En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives (*JF* Ok on utilise ce qui précède mais on est prié de faire très propre et surtout dans le bon sens).

c) La matrice H_n est-elle inversible ?

Q6 Soit $f \in E$. On note, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\beta_i = \Phi(e_i,f)$.

On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1}B$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

On considère l'application $d : \ E_n \longrightarrow \mathbb{R} \ P \longmapsto ||P - f||$

a) Montrer : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \Phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

b) En déduire : $\forall Q \in E_n, \ \Phi(Q, P_0 - f) = 0$.

c) Etablir : $\forall P \in E_n, \ ||P - f||^2 = ||P - P_0||^2 + ||P_0 - f||^2$.

d) Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

e) Montrer : $||P_0 - f||^2 = ||f||^2 - ||P_0||^2$.

f) **Un exemple :** On choisit ici $n = 2$ et $f : \ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \ t \longmapsto \left| t - \dfrac{1}{3} \right|$. Calculer P_0 et $d(P_0)$.

PREMIER PROBLÈME

Q1 f, g et h sont des éléments de E et λ est un réel.

* $\varphi(f,\lambda g+h)=\int_0^1 f(t)(\lambda g+h)(t)\,dt=\lambda\int_0^1 f(t)g(t)+\int_0^1 f(t)h(t)\,dt=\lambda\varphi(f,g)+\varphi(f,h)$.

* $\varphi(g,f)=\int_0^1 g(t)f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt=\varphi(f,g)$.

* $\varphi(f,f)=\int_0^1 f^2(t)\,dt\geq 0$.

Supposons $\varphi(f,f)=0$; $\int_0^1 f^2(t)\,dt=0$. f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc f^2 est nulle sur $[0,1]$. f est nulle sur $[0,1]$.

Résumons. $\forall (f,g,h)\in E^3$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(f,\lambda g+h)=\lambda\varphi(f,g)+\varphi(f,h)$.

$\forall (f,g)\in E^2$, $\varphi(g,f)=\varphi(f,g)$

$\forall f\in E$, $\varphi(f,f)\geq 0$

$\forall f\in E$, $\varphi(f,f)=0\Rightarrow f=0_E$

<u>φ est un produit scalaire sur E.</u>

Q2. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $\varphi(e_i,e_j)=\int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}\,dt=\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt\overset{i+j-1\neq 0}{=}\left[\dfrac{t^{i+j-1}}{i+j-1}\right]_0^1=\dfrac{1}{i+j-1}$.

Remarque.. H_n est la matrice de la restriction à E_n du produit scalaire φ dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Q3 a) $H_2=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix}$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de

$$H_2-\lambda I_2=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1/2\\ 1/2 & 1/3-\lambda\end{pmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{;} \begin{pmatrix}1/2 & 1/3-\lambda\\ 1-\lambda & 1/2\end{pmatrix} \underset{L_1\leftarrow 2L_1}{;} \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}-2\lambda\\ 1-\lambda & 1/2\end{pmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2+(\lambda-1)L_1}{;} \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}-2\lambda\\ 0 & \frac{1}{2}+(\lambda-1)(\frac{2}{3}-2\lambda)\end{pmatrix}.$$

Par conséquent $H_2-\lambda I_2$ est non inversible si et seulement si :

$$0=\frac{1}{2}+(\lambda-1)\left(\frac{2}{3}-2\lambda\right)=-2\lambda^2+\frac{8}{3}\lambda+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-2\left(\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{12}\right)=-2\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\right]$$

donc λ est valeur propre de H_2 si et seulement si $0=-2\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{13}{36}\right]=-2\left(\lambda-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(\lambda-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$

Par conséquent H_2 admet deux valeurs propres distinctes : $\dfrac{4+\sqrt{13}}{6}$ et $\dfrac{4-\sqrt{13}}{6}$.

b) oui ! Voir plus haut ou plus bas !

c) 0 n'est pas valeur propre de H_2 donc H_2 est inversible.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que : $H_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = x' \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = y' \end{cases} \begin{cases} 2x + y = 2x' \\ \frac{3}{2}x + y = 3y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 2x' - 3y' \\ y = 2x' - 2x = 2x' - 8x' + 12y' = -6x' + 12y' \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 4x' - 6y' \\ y = -6x' + 12y' \end{cases}$; Par conséquent $\underline{H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}}$.

Q4 H_n est diagonalisable car H_n est une matrice symétrique et à coefficients réels.

Q5 **a)** Posons $B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = H_n B$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $b'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1} b_j$.

$${}^tA H_n B = \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \,\phi(e_i, e_j)$$

${}^tA H_n B = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\right) = \phi(P, Q)$ ce qui n'est pas une grosse surprise !

$\underline{{}^tA H_n B = \phi(P,Q).}$

b) Soit λ une valeur propre (nécessairement réelle) de H_n.

$\exists\, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $U \neq 0$ et $H_n U = \lambda U$. Posons $Q = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$.

Comme U n'est pas nul Q ne l'est pas davantage et donc :

$$0 < \phi(Q,Q) = {}^tU H_n U = {}^tU(\lambda U) = \lambda\, {}^tU U = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i^2.$$

$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ et $\lambda \sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

<u>Les valeurs propres de H_n sont toutes</u> (réelles et) <u>strictement positives</u>.

Remarque.. Ce qui n'est pas un scoop puisque H_n est la matrice d'un produit scalaire ... donc H_n est symétrique et définie positive !

Exercice.. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E_n et $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour u et v éléments de E_n de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$ on pose $\phi(u,v) = {}^tX H_n Y$

Notez que ϕ est un produit scalaire sur E_n ssi H_n est symétrique et définie positive ; c'est à dire ssi H_n est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

c) H_n est inversible car 0 n'est pas valeur propre de H_n.

Q6 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\phi(e_i, P_0 - f) = \phi(e_i, P_0) - \phi(e_i, f) = \phi(e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi(e_i, e_j) - \beta_i$$

$A_0 = H_n^{-1} B$ donc $B = H_n A_0$; par conséquent $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j)\, \alpha_j$

Finalement : $\phi(e_i, P_0 - f) = \sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j)\alpha_j - \beta_i = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \phi(e_i, P_0 - f) = 0.$

b) Soit $Q \in E_n$. $\exists (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

$\phi(Q, P_0 - f) = \phi(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i, P_0 - f) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, \phi(e_i, P_0 - f) = 0$ d'après a).

$\forall Q \in E_n, \ \phi(Q, P_0 - f) = 0.$

Remarque.. Ne le cachons pas, $\begin{cases} 1°.. \ P_0 \in E_n \\ 2°.. \ \forall Q \in E_n, \ \phi(Q, P_0 - f) = 0 \end{cases}$, donc P_0 n'est autre que la projection orthogonale de f sur E_n. c), d) et e) sont alors clairs non ? Mais réinventons la roue...

c) Soit P un élément de E_n. $P - P_0 \in E_n$ donc d'après b) $P - P_0$ et $P_0 - f$ sont orthogonaux. Pythagore donne alors :

$$\|P - f\|^2 = \|P - P_0 + P_0 - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$$

$\forall P \in E_n, \ \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2.$

$\forall P \in E_n, \ \|P - f\|^2 - \|P_0 - f\|^2 = \|P - P_0\|^2$

donc $\forall P \in E_n - \{P_0\}, \quad \|P - f\|^2 > \|P_0 - f\|^2.$

Par conséquent $\forall P \in E_n - \{P_0\}$, $d(P) > d(P_0)$.
Donc **d admet un minimum et ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.**

c) $P_0 - f$ et P_0 sont orthogonaux car $P_0 \in E_n$.

Pythagore donne : $\|f\|^2 = \|P_0 - f + P_0\|^2 = \|P_0 - f\|^2 + \|P_0\|^2$.

Finalement : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

Q6 Posons $\beta_0 = \varphi(e_0, f)$ et $\beta_1 = \varphi(e_1, f)$.
D'après ce qui précède $P_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ avec $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = H_2^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ et
$d(P_0) = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.
Ne reste plus qu'à calculer $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1$, $\|f\|^2$ et $\|P_0\|^2$.

$$\beta_1 = \varphi(e_0, f) = \int_0^1 1 \times |t - 1/3|\,dt = -\int_0^{1/3} (t - 1/3)\,dt + \int_{1/3}^1 (t - 1/3)\,dt = -\left[\frac{(t-1/3)^2}{2}\right]_0^{1/3} + \left[\frac{(t-1/3)^2}{2}\right]_{1/3}^1$$

$$\beta_1 = \frac{(0 - 1/3)^2}{2} + \frac{(1 - 1/3)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{18}.$$

A méditer !! $x \mapsto |x|^3$ est une primitive de $x \mapsto x|x|$!

$$\beta_2 = \varphi(e_1, f) = \int_0^1 t\,|t - 1/3|\,dt = \int_0^1 (t - 1/3)|t - 1/3|\,dt + \frac{1}{3}\int_0^1 |t - 1/3|\,dt = \left[\frac{|t-1/3|^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{3} \times \frac{5}{18}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left|-\frac{1}{3}\right|^3\right] + \frac{5}{54} = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{27}\right] + \frac{5}{54} = \frac{1}{162}[14 + 15] = \frac{29}{162}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{18}\\ \frac{29}{162}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{9} - \frac{29}{27}\\ -\frac{5}{3} + \frac{58}{27}\end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}1\\ 13\end{pmatrix}$$

$$\underline{P_0 = \frac{1}{27} + \frac{13}{27}X.} \qquad \|P_0\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{27} + \frac{13}{27}t\right)^2 dt = \frac{27}{13}\left[\frac{\left(\frac{1}{27} + \frac{13}{27}t\right)^3}{3}\right]_0^1$$

$$\|P_0\|^2 = \frac{9}{13}\left[\left(\frac{14}{27}\right)^3 - \left(\frac{1}{27}\right)^3\right] = \frac{9}{13}\,\frac{2743}{19683} = \frac{211}{2187}.$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |t - 1/3|^2\,dt = \frac{1}{3}\left[(t - 1/3)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

$$d(P_0) = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{211}{2187}} = \sqrt{\frac{32}{2187}} = \sqrt{\frac{2^5}{3^7}} = \frac{4}{27}\sqrt{3/2} \qquad \underline{d(P_0) = \frac{4}{27}\sqrt{\frac{3}{2}}.}$$

$$\underline{d(P_0) \simeq 0{,}181\ 443\ 68}$$