EXERCICE 55

Exercice **Polynômes de Legendre.**

• *Thème abordé dans oral ESCP 2008 2.12, 2011 2.3., ESSEC MI 1987, HEC 1996 MI.*

Dans ce texte $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout élément n, de $\mathbb{N}$ $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P,Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$. $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. On note $||.||$ la norme associée.

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{2^n\, n!}\, U_n^{(n)}$.

Q1 $\forall P \in E,\ L(P) = \big((X^2-1)\,P'\big)'$. Montrer que L est un endomorphisme symétrique de $(E, < .,. >)$.

Q2 Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si P est élément de E_n, $L(P)$ est encore un élément de E_n.

b) En déduire que L induit sur E_n un endomorphisme que nous noterons L_n.

Trouver la matrice M_n de L_n relativement à la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

c) Donner les valeurs propres de L_n et montrer que cet endomorphisme est diagonalisable.

Q3 n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que P_n est de degré n et calculer le coefficient a_n du terme de plus haut degré de P_n.

b) Montrer que P_n a la parité de n.

c) Montrer que $P_n(1) = 1$ (on pourra remarquer que $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$!).

d) Calculer P_0, P_1 et P_2.

e) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n admet exactement n zéros distincts et que ces zéros sont dans $]-1,1[$ (on pourra itérer Rolle).

Q4 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $U'_{n+1} - 2(n+1)XU_n = 0_E$ et que $(X^2-1)U'_n - 2nXU_n = 0_E$.

b) En dérivant $(n+1)$ fois les égalités précédentes, montrer que :

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n \qquad (1)$$

$$\text{et que} \qquad L(P_n) = n(n+1)\,P_n \qquad (2).$$

Q5 Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Q6 Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de L.

Q7 n est élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \Big(P_n(x)\Big)^2 + \dfrac{1-x^2}{n(n+1)}\Big(P'_n(x)\Big)^2$.

a) En utilisant (2), montrer que f_n est croissante.

b) En déduire que $\forall x \in [-1,1],\ |P_n(x)| \leqslant 1$.

Q8 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)\,P_n(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\,||P_n||^2$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big(P_n(t)\Big)^2\,\mathrm{d}t = 2 - 2\int_{-1}^{1} t\,P_n(t)\,P_n'(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En utilisant (1), en déduire que $||P_n||^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

Q9 On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ Q_k = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}}\ P_k$.

Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de E_n.

Q10 n est élément de $\mathbb{N}^*$ et $Q_n = (n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n$.

a) Montrer que Q_n appartient à E_n. Préciser la parité de Q_n et calculer $Q_n(1)$.

b) Montrer que $< XP_n, P_k > = < P_n, XP_k > = 0$ pour tout élément k de $[\![0, n-2]\!]$.

c) En déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que $Q_n = \lambda P_n + \mu P_{n-1}$.

d) Montrer que $\lambda = 0$, $\mu = -n$ et que l'on a :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n + nP_{n-1}.$$

Q1 • Soit $P \in E$. X^2-1 et P' sont dans E donc $(X^2-1)P'$ est dans E. Alors $((X^2-1)P')'$ appartient également à E. $L(P) \in E$.

$\forall P \in E, L(P) \in E$. L est une application de E dans E.

• Soit $(P,Q) \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$L(\lambda P+Q) = ((X^2-1)(\lambda P+Q)')' = ((X^2-1)(\lambda P'+Q'))' = (\lambda(X^2-1)P' + (X^2-1)Q')'$

$L(\lambda P+Q) = \lambda((X^2-1)P')' + ((X^2-1)Q')' = \lambda L(P) + L(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2, L(\lambda P+Q) = \lambda L(P) + L(Q)$. L est linéaire.

Ainsi L est un endomorphisme de E.

Soit $(P,Q) \in E^2$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$ et $v(t) = Q(t)$.

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie l'intégration par parties suivante.

$\langle L(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t)v'(t)\,dt$.

$\langle L(P), Q\rangle = [(t^2-1)P'(t)Q(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt$.

En échangeant P et Q on obtient $\langle L(Q), P\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)Q'(t)P'(t)\,dt = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt$.

Donc $\langle L(P), Q\rangle = \langle L(Q), P\rangle$. Ainsi $\langle L(P), Q\rangle = \langle P, L(Q)\rangle$.

$\forall (P,Q) \in E^2$, $\langle L(P), Q\rangle = \langle P, L(Q)\rangle$. L est symétrique.

L est un endomorphisme symétrique de E.

Q2 a) Soit $P \in E_n$. P' est un élément de E de degré au plus $n-1$. $(X^2-1)P'$ est un élément de E de degré au plus $n+1$, $((X^2-1)P')'$ est un élément de E de degré au plus n. Donc $L(P) \in E_n$.

$\forall P \in E_n, L(P) \in E_n$.

b) Soit L_n l'application de E_n dans E_n qui à tout P dans E_n associe $L(P)$.

D'après a) L_n est bien (!) une application de E_n dans E_n.

De plus la linéarité de L donne la linéarité de L_n.

Alors L_n est un endomorphisme de E_n.

Donc L induit sur E_n un endomorphisme de E_n.

- $L_0(1) = ((X^2-1)(1)')' = 0_{E_0}$. $\underline{\underline{M_0 = (0)}}$.
- $L_1(1) = ((X^2-1)(1)')' = 0_{E_1}$ et $L_1(X) = ((X^2-1)X')' = (X^2-1)' = 2X$. $\underline{\underline{M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}}$.
- Supposons que $n \geq 2$. $L_n(1) = ((X^2-1)(1)')' = 0_{E_n}$ et $L_n(X) = ((X^2-1)X')' = (X^2-1)' = 2X$.

$\forall \ell \in [\![2,n]\!]$, $L_n(X^\ell) = ((X^2-1)(X^\ell)')' = ((X^2-1)(\ell X^{\ell-1}))' = (\ell X^{\ell+1} - \ell X^{\ell-1})' = \ell(\ell+1)X^\ell - \ell(\ell-1)X^{\ell-2}$.

Posons $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = k(k+1)$ et $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $b_k = -k(k-1)$.

$L_n(1) = a_0 X^0$, $L_n(X) = a_1 X$ et $\forall \ell \in [\![2,n]\!]$, $L_n(X^\ell) = a_\ell X^\ell + b_\ell X^{\ell-2}$.

Alors $M_n = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_2 & & (0) \\ & a_1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & (0) & & \ddots & 0 \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_k = k(k+1)$ pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ et $b_k = k(k-1)$ pour tout k dans $[\![2,n]\!]$.

c) Ce qui précède montre que (dans les trois cas...) M_n est triangulaire supérieure et que l'ensemble de ses éléments diagonaux est $\{k(k+1) ; k \in [\![0,n]\!]\}$.

Alors $\underline{\underline{Sp\, L_n = Sp\, M_n = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}}}$.

V1 Posons $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = k(k+1)$.

$\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0$. $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\lambda_{k+1} > \lambda_k$.

Alors $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Donc $Sp\, L_n$ contient $n+1$ éléments et L_n est un endomorphisme de E_n qui est de dimension $n+1$ donc L_n est diagonalisable.

V2 $\forall (P,Q) \in E_n^2$, $\langle L_n(P), Q \rangle = \langle L(P), Q \rangle \overset{Q1}{=} \langle P, L(Q) \rangle = \langle P, L_n(Q) \rangle$.

L_n est un endomorphisme symétrique de E_n donc $\underline{\underline{L_n \text{ est diagonalisable}}}$.

(Q3) a) U_n est de degré $2n$ donc $U_n^{(n)}$ est de degré n.

Ainsi $\underline{\underline{P_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} \text{ est de degré } n}}$.

Le terme de plus haut degré de U_n est X^{2n} donc le terme de plus haut degré de $U_n^{(n)}$ est $2n(2n-1)\dots(2n-n+1)X^n$ soit encore $\frac{(2n)!}{n!} X^n$.

Alors le terme de plus haut degré de P_n est $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} X^n$

<u>Le coefficient du terme de plus haut degré de P_n est</u> $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

<u>b)</u> $U_n(-X) = ((-X)^2-1)^n = (X^2-1)^n\ U_n(X)$.

Montrons par récurrence que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $U_n^{(i)}(-X) = (-1)^i U_n^{(i)}(X)$.

- C'est clair pour $i=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $i \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $i+1$.

$U_n^{(i)}(-X) = (-1)^i U_n^{(i)}(X)$. En dérivant il vient : $(-1)U_n^{(i+1)}(-X) = (-1)^i U_n^{(i+1)}(X)$.

donc $U_n^{(i+1)}(-X) = (-1)(-1)^i U_n^{(i+1)}(X) = (-1)^{i+1} U_n^{(i+1)}(X)$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall i \in \mathbb{N}$, $U_n^{(i)}(-X) = (-1)^i U_n^{(i)}(X)$. En particulier $U_n^{(n)}(-X) = (-1)^n U_n(X)$

donc $P_n(-X) = \frac{1}{2^n n!} U_n(-X) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}(X) = (-1)^n P_n(X)$.

<u>$P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. P_n a la parité de n.</u>

<u>c)</u> $U_n = (X-1)^n (X+1)^n$. Posons $R_n = (X-1)^n$ et $S_n = (X+1)^n$.

$U_n^{(n)} = (R_n S_n)^{(n)} \underset{\uparrow \text{Leibniz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R_n^{(k)} S_n^{(n-k)}$. $U_n^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R_n^{(k)}(1) S_n^{(n-k)}(1)$.

1 est une racine d'ordre n de $R_n = (X-1)^n$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $R_n^{(k)}(1) = 0$.

De plus $R_n^{(n)} = n!$

Ainsi $U_n^{(n)}(1) = \binom{n}{n} R_n^{(n)}(1) S_n^{(0)}(1) = 1 \times n!\ S_n^{(0)}(1) = n!\ S_n(1) = n!\ (1+1)^n = 2^n n!$

Alors $P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}(1) = 1$. $P_n(1) = 1$.

<u>d)</u> $U_0 = 1$, $U_1 = X^2-1$, $U_2 = (X^2-1)^2$, $U_1' = 2X$, $U_2' = 2 \times 2X(X^2-1) = 4X^3-4X$, $U_2'' = 12X^2-4$.

$P_0 = \frac{1}{2^0\, 0!} U_0^{(0)} = 1$. $P_1 = \frac{1}{2 \times 1!} U_1^{(1)} = \frac{1}{2}(2X) = X$. $P_2 = \frac{1}{2^2\, 2!} U_2^{(2)} = \frac{1}{8}(12X^2-4) = \frac{1}{2}(3X^2-1)$.

<u>$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.</u>

e) $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $U_n^{(i)}$ admet au moins i zéros dans $]-1,1[$.

- $U_n(-1) = U_n(1) = 0$ et U_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Rolle montre alors l'existence d'un zéro pour U_n' appartenant à $]-1,1[$. La propriété est vraie pour $i=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $i+1$. (*) validation essentielle

  $U_n^{(i)}$ admet au moins i zéros dans $]-1,1[$. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ ces i zéros donnés dans l'ordre croissant. Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{i+1} = 1$.

(*) $i \in [\![1,n-1]\!]$ donc $U_n^{(i)}(1) = U_n^{(i)}(-1) = 0$ car 1 et -1 sont des zéros d'ordre n de U_n.
Alors $\forall k \in [\![0, \cancel{i+1}]\!]$, $U_n^{(i)}(\alpha_k) = 0$. Soit $k \in [\![0, i]\!]$. $U_n^{(i)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et $U_n^{(i)}(\alpha_k) = U_n^{(i)}(\alpha_{k+1})$ $(=0)$. Rolle montre alors l'existence de β_k dans $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $(U_n^{(i)})'(\beta_k) = 0$. $U_n^{(i+1)}(\beta_k) = 0$.
Alors $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i$ sont $i+1$ zéros distincts de $U_n^{(i+1)}$.
De plus $\forall k \in [\![0, i]\!]$, $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[\subset]-1,1[$.
Donc $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i$ sont $i+1$ zéros distincts de $U_n^{(i+1)}$ appartenant à $]-1,1[$.
Ceci achève la récurrence. La propriété est donc vraie pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
Elle est donc vraie pour n. Alors $U_n^{(n)}$ admet au moins n zéros dans $]-1,1[$.
Comme $P_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$, P_n admet au moins n zéros dans $]-1,1[$.
Or $\deg P_n = n$ donc P_n ne peut pas avoir plus de n zéros distincts.
Alors <u>P_n admet exactement n zéros distincts et ces n zéros sont dans $]-1,1[$.</u>

(Q4) c) $U_{n+1} = (X^2-1)^{n+1}$. $U_{n+1}' = (n+1)\,2X\,(X^2-1)^n = 2(n+1) X U_n$.

$$\underline{U_{n+1}' - 2(n+1) X U_n = 0_E.}$$

$(X^2-1) U_n' = (X^2-1)(n)(2X)(X^2-1)^{n-1} = 2n X (X^2-1)^n = 2n X U_n$.

$$\underline{(X^2-1) U_n' - 2n X U_n = 0_E.}$$

b) $U'_{n+1} - 2(n+1) X U_n = 0_E$. En dérivant $n+1$ fois cette égalité et en utilisant Leibniz il vient : $U_{n+1}^{(n+2)} - 2(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{(k)} U_n^{((n+1)-k)} = 0_E$.

$\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $X^{(k)} = \begin{cases} X & \text{si } k=0 \\ 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$. Alors $U_{n+1}^{(n+2)} - 2(n+1) \left[X\, U_n^{(n+1)} + (n+1)\, 1\, U_n^{(n)} \right] = 0_E$.

$\left(U_{n+1}^{(n+1)}\right)' - 2(n+1) \left[X \left(U_n^{(n)}\right)' + (n+1) U_n^{(n)} \right] = 0_E$.

$\left(2^{n+1} (n+1)!\, P_{n+1} \right)' = 2(n+1) \left[X \left(2^n n!\, P_n \right)' + (n+1) 2^n n!\, P_n \right]$

$2^{n+1}(n+1)!\, P'_{n+1} = 2^{n+1}(n+1)!\, X P'_n + (n+1)\, 2^{n+1}(n+1)!\, P_n$.

Alors $\underline{\underline{P'_{n+1} = X P'_n + (n+1) P_n}}$. (1)

$(X^2-1) U'_n - 2n X U_n = 0_E$. En dérivant $n+1$ fois et en utilisant Leibniz il vient :

$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^2-1)^{(k)} \left(U'_n\right)^{(n+1-k)} - 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{(k)} U_n^{(n+1-k)} = 0_E$.

$\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $(X^2-1)^{(k)} = \begin{cases} X^2-1 & \text{si } k=0 \\ 2X & \text{si } k=1 \\ 2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $X^{(k)} = \begin{cases} X & \text{si } k=0 \\ 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors :

$(X^2-1) U_n^{(n+2)} + (n+1) 2X\, U_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} 2\, U_n^{(n)} - 2n X\, U_n^{(n+1)} - 2n \binom{n+1}{1} U_n^{(n)} = 0_E$.

$(X^2-1) \left(U_n^{(n)}\right)'' + 2(n+1) X \left(U_n^{(n)}\right)' + n(n+1) U_n^{(n)} - 2n X \left(U_n^{(n)}\right)' - 2n(n+1) U_n^{(n)} = 0_E$.

$(X^2-1) \left(2^n n!\, P_n \right)'' + 2(n+1) X \left(2^n n!\, P_n \right)' + n(n+1) 2^n n!\, P_n - 2n X \left(2^n n!\, P_n \right)' - 2n(n+1) \left(2^n n!\, P_n \right) = 0_E$

En remarquant que $\left(2^n n!\, P_n\right)' = 2^n n!\, P'_n$, que $\left(2^n n!\, P_n\right)'' = 2^n n!\, P''_n$ et en divisant par $2^n n!\, P_n$ il vient :

$(X^2-1) P''_n + 2(n+1) X P'_n + n(n+1) P_n - 2n X P'_n - 2n(n+1) P_n = 0_E$.

$(X^2-1) P''_n + 2X P'_n - n(n+1) P_n = 0_E$. $\left((X^2-1) P'_n\right)' - n(n+1) P_n = 0_E$.

$L(P_n) - n(n+1) P_n = 0_E$. $\underline{\underline{L(P_n) = n(n+1) P_n}}$. (2)

Q5 • $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$ donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_k \in E_n$ et $P_k \neq 0_{E_n}$.

• $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $L_n(P_k) = L(P_k) = k(k+1)P_k$ et $P_k \neq 0_E$.

Pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, P_k est un vecteur propre de L_n associé à la valeur propre $k(k+1)$.

L_n est un endomorphisme de E_n ayant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et $\dim E_n = n+1$. Ainsi les sous-espaces propres de L_n sont des droites vectorielles.

Plus de doute : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $SEP(L_n, k(k+1)) = Vect(P_k)$.

$E_n = \bigoplus_{k=0}^{n} SEP(L_n, k(k+1)) = \bigoplus_{k=0}^{n} Vect(P_k)$. De plus L_n est symétrique donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux ; $Vect(P_0), Vect(P_1), \dots, Vect(P_n)$ sont deux à deux orthogonaux.

TOUT ceci suffit pour dire que <u>$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n constituée de vecteurs propres de L_n respectivement associés aux valeurs propres $0(0+1), 1(1+1), \dots, n(n+1)$.</u>

Q6 * Soit $\lambda \in Sp\,L$ et soit P un vecteur propre de L associé à λ.

$P \neq 0_E$. Posons $r = \deg P$. $P \in \mathbb{R}_r[X]$. Alors $L_r(P) = L(P) = \lambda P$ et $P \neq 0_{E}$ ou E_r !

Donc $\lambda \in Sp\,L_r$. $\exists k \in [\![0,r]\!]$, $\lambda = k(k+1)$.

De plus $P \in SEP(L, k(k+1)) = Vect(P_k)$.

Ainsi $\lambda = k(k+1)$ et $SEP(L,\lambda) = SEP(L, k(k+1)) \subset Vect(P_k)$.

Or $\dim SEP(L, k(k+1)) \geq 1$ et $\dim SEP(L, k(k+1)) \leq \dim Vect(P_k) = 1$.

$SEP(L, k(k+1)) \neq \{0_E\}$

Alors $\dim SEP(L, k(k+1)) = 1 = \dim Vect(P_k)$ et $SEP(L, k(k+1)) \subset Vect(P_k)$.

$SEP(L, k(k+1)) = Vect(P_k)$.

Donc si $\lambda \in Sp\,L$, <u>$\exists k \in \mathbb{N}$, $\lambda = k(k+1)$ et $SEP(L,\lambda) = Vect(P_k)$.</u>

<u>$Sp\,L \subset \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$ et les sous-espaces propres de L sont de dimension 1.</u>

* Réciproquement soit $\ell \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda = \ell(\ell+1)$.

$L(P_\ell) = L_\ell(P_\ell) = \ell(\ell+1) P_\ell$ et $P_\ell \neq 0_E$.

$L(P_\ell) = \lambda P_\ell$ et $P_\ell \neq 0_E$. $\lambda \in Sp\, L$. De plus $Vect(P_\ell) \subset SEP(L,\lambda)$.

On vient de voir que les sous-espaces propres de L sont de dimension 1.

Alors $\dim Vect(P_\ell) = 1 = \dim SEP(L,\lambda)$ et $Vect(P_\ell) \subset SEP(L,\lambda)$.

Ainsi $SEP(L,\lambda) = Vect(P_\ell)$.

Si $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell(\ell+1) \in Sp\, L$ et $SEP(L, \ell(\ell+1)) = Vect(P_\ell)$.

Pour conclure 1) $Sp\, L = \{\ell(\ell+1)\,;\ \ell \in \mathbb{N}\}$.

2) $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $SEP(L, \ell(\ell+1)) = Vect(P_\ell)$.

Q7 a) f_n est dérivable sur $[0,1]$

$\forall x \in [-1,1],\ f_n'(x) = 2P_n'(x)P_n(x) - \frac{2x}{n(n+1)}(P_n'(x))^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}\, 2P_n''(x)P_n'(x)$.

$\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \frac{2}{n(n+1)} P_n'(x)\left[n(n+1)P_n(x) - xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x)\right]$.

$\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \frac{2}{n(n+1)} P_n'(x)\left[L(P_n)(x) - xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x)\right]$

$\downarrow (2)$

$\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \frac{2}{n(n+1)} P_n'(x)\left[2xP_n'(x) + (x^2-1)P_n''(x) - xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x)\right]$

$\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \frac{2}{n(n+1)} P_n'(x)(xP_n'(x)) = \frac{2}{n(n+1)}\, x\, (P_n'(x))^2 \geqslant 0$.

f_n est croissante sur $[0,1]$.

b) $\forall x \in [0,1]$, $(P_n(x))^2 \leqslant (P_n(x))^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}(P_n'(x))^2 = f_n(x) \leqslant f_n(1) = (P_n(1))^2 = 1$.

$\forall x \in [0,1]$, $(P_n(x))^2 \leqslant 1$. $\forall x \in [0,1]$, $|P_n(x)|^2 \leqslant 1$ et $|P_n(x)| \geqslant 0$.

$\forall x \in [0,1]$, $|P_n(x)| \leqslant 1$. $\forall x \in [0,1]$, $|(-1)^n P_n(-x)| \leqslant 1$ $(P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$

Or $(-1)^n P_n(-x) = P_n(x)$. Donc $\forall x \in [0,1]$, $|P_n(-x)| = |(-1)^n P_n(-x)| \leqslant 1$.

Alors $\forall x \in [-1,0]$, $|P_n(x)| \leqslant 1$. Finalement $\forall x \in [-1,1]$, $|P_n(x)| \leqslant 1$.

Q8 e) $P'_{n+1} \in E_n$ et $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Alors $\exists (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \delta_k P_k$.

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t) P_n(t)\,dt = \langle P'_{n+1}, P_n\rangle = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \langle P_k, P_n\rangle \underset{\uparrow}{=} \delta_n \langle P_n, P_n\rangle = \delta_n \|P_n\|^2.$$

$\langle P_k, P_n\rangle = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est a_{n+1}, donc le coefficient de X^n dans P'_{n+1} est $(n+1)a_{n+1}$.
Le coefficient de X^n dans P_n est a_n et 0 dans P_k si $k \in [\![0, n-1]\!]$; le coefficient de X^n dans $\sum_{k=0} \delta_k X^k$ est $\delta_n a_n$.

Alors $\delta_n a_n = (n+1) a_{n+1}$, $\delta_n = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. $\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t) P_n(t)\,dt = \delta_n \|P_n\|^2 = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t) P_n(t)\,dt = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2.$$

$$\int_{-1}^{1} t P_n(t) P'_n(t)\,dt \underset{\text{IPP}}{=} \left[t P_n(t) P_n(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(P_n(t) + t P'_n(t)\right) P_n(t)\,dt.$$

$$\int_{-1}^{1} t P_n(t) P'_n(t)\,dt = (P_n(1))^2 + (P_n(-1))^2 - \int_{-1}^{1} (P_n(t))^2\,dt - \int_{-1}^{1} t P'_n(t) P_n(t)\,dt.$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2\,dt = (P_n(1))^2 + (P_n(-1))^2 - 2\int_{-1}^{1} t P_n(t) P'_n(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} 1 + 1 - 2\int_{-1}^{1} t P_n(t) P'_n(t)\,dt.$$

$P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

$$\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2\,dt = 2 - 2\int_{-1}^{1} t P'_n(t) P_n(t)\,dt.$$

Alors $\|P_n\|^2 = 2 - \int_{-1}^{1} P_n(t)\left(t P'_n(t)\right)dt \underset{(1)}{=} 2 - \int_{-1}^{1} P_n(t)\left[P'_{n+1}(t) - (n+1) P_n(t)\right]dt$

$$\|P_n\|^2 = 2 - 2\int_{-1}^{1} P_n(t) P'_{n+1}(t)\,dt + 2(n+1)\|P_n\|^2 = 2 - 2(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2 + 2(n+1)\|P_n\|^2.$$

$$2(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2(n+1)\frac{\dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}} = 2(n+1)\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = 2(n+1) \times \frac{1}{2} \times (2n+2)(2n+1)\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$2(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2(n+1)(n+1)(2n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 2(2n+1).$$

Alors $\|P_n\|^2 = 2 - 2(2n+1)\|P_n\|^2 + 2(n+1)\|P_n\|^2$.

$(2(2n+1) - 2(n+1) + 1)\|P_n\|^2 = 2$. $\quad (2n+1)\|P_n\|^2 = 2$. $\quad \underline{\underline{\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}}}$.

Q9 Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\|P_\ell\|^2 = \dfrac{2}{2\ell+1}$ et $\|P_\ell\| \geq 0$.

Alors $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\|P_\ell\| = \sqrt{\dfrac{2}{2\ell+1}}$.

$\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $Q_\ell = \dfrac{1}{\|P_\ell\|} P_\ell$ donc $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\|Q_\ell\| = 1$.

Rappelons que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.
Alors $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une famille orthonormée, donc libre, d'éléments de E_n dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de E_n.
Ainsi $\underline{\underline{(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) \text{ est une base orthonormée de } E_n}}$.

Q10 a) $\deg((n+1)P_{n+1}) = n+1$ et $\deg((2n+1)XP_n) = n+1$ donc $\underline{\deg Q_n \leq n+1}$.

Le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)P_{n+1}$ est $(n+1)a_{n+1}$ et le coefficient de X^{n+1} dans $(2n+1)XP_n$ est $(2n+1)a_n$.

Alors le coefficient de X^{n+1} dans Q_n est $(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n$.

$$(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = (n+1)\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} - (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

$$(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = \frac{(2n)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\Big[\underbrace{(n+1)(2n+2)(2n+1) - (2n+1)\,2\,(n+1)^2}_{=0}\Big] = 0.$$

<u>Le coefficient de X^{n+1} dans Q_n est nul.</u>

Alors $\deg Q_n \leq n$. Q_n appartient à E_n.

$Q_n(-X) = (n+1)\,P_{n+1}(-X) - (2n+1)(-X)\,P_n(-X)$.

$Q_n(-X) = (n+1)\left[(-1)^{n+1}P_{n+1}(X)\right] - (2n+1)(-X)(-1)^n P_n(X)$.

$Q_n(-X) = (-1)^{n+1}\left[(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)X\,P_n(X)\right] = (-1)^{n+1}Q_n(X)$. $\underline{\underline{Q_n(-X) = (-1)^{n+1}Q_n(X)}}$.

<u>Q_n est pair si n est impair et impair si n est pair.</u>

$Q_n(1) = (n+1)P_{n+1}(1) - (2n+1)P_n(1) = n+1-(2n+1) = -n$. $\underline{\underline{Q_n(1) = -n}}$.

<u>b)</u> Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. $\langle XP_n, P_k\rangle = \int_{-1}^{1} t P_n(t) P_k(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P_n(t)(tP_k(t))\,dt = \langle P_n, XP_k\rangle$.

P_n est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ donc $P_n \in (\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}))^{\perp}$. $P_n \in (E_{n-1})^{\perp}$.

Or $\deg P_k = k$ donc $\deg(XP_k) = k+1$ et $k+1 \in [\![1, n-1]\!]$. $XP_k \in E_{n-1}$.

Dans ces conditions $\underline{\underline{\langle XP_n, P_k\rangle = \langle P_n, XP_k\rangle = 0}}$.

<u>c)</u> $Q_n \in E_n$. $\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $Q_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i$.

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $\langle Q_n, P_k\rangle = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \langle P_i, P_k\rangle \underset{\uparrow}{=} \beta_k \langle P_k, P_k\rangle = \beta_k \|P_k\|^2$.

$\langle P_i, P_k\rangle = 0$ si $i \neq k$

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $\langle Q_n, P_k\rangle = \langle (n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n, P_k\rangle = (n+1)\underbrace{\langle P_{n+1}, P_k\rangle}_{=0} - (2n+1)\underbrace{\langle XP_n, P_k\rangle}_{=0} = 0$.

Alors $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $\beta_k \|P_k\|^2 = \langle Q_n, P_k\rangle = 0$ et $\|P_k\|^2 \neq 0$ ($P_k \neq 0_E$).

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $\beta_k = 0$. Alors $Q_n = \beta_n P_n + \beta_{n-1}P_{n-1}$.

Ainsi $\underline{\underline{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ Q_n = \lambda P_n + \mu P_{n-1}}}$.

<u>d)</u> $-n = Q_n(1) = \lambda P_n(1) + \mu P_{n-1}(1) = \lambda + \mu$. $\underline{\lambda + \mu = -n}$.

$Q_n(-X) = (-1)^{n+1}Q_n(X)$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ et $P_{n-1}(-X) = (-1)^{n-1}P_{n-1}(X)$.

Alors $(-1)^{n+1}Q_n(1) = Q_n(-1) = \lambda P_n(-1) + \mu P_{n-1}(-1) = \lambda(-1)^n P_n(1) + \mu(-1)^{n-1}P_{n-1}(1)$.

Donc $(-1)^{n+1}(-n) = \lambda(-1)^n + \mu(-1)^{n-1}$. $(-1)^n n = \lambda(-1)^n - \mu(-1)^n$. $\underline{\lambda - \mu = n}$.

$\begin{cases} \lambda + \mu = -n \\ \lambda - \mu = n \end{cases}$. Alors $2\lambda = 0$. $\underline{\underline{\lambda = 0}}$. $\underline{\underline{\mu = -n}}$.

$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n = \varphi_n = -nP_{n-1}$.

$$\underline{\underline{(n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n + nP_{n-1} = 0_E}}.$$

EXERCICE 56

Exercice **Polynômes de Tchebychev (de première espèce).**

• *On pourra voir dans LYON 2005 PB 2 les polynômes de Tchebychev de seconde espèce. On trouve dans la partie II d'ESSEC MI 2000 ou dans ESSEC 1995 MI une propriété importante des polynômes de Tchebychev de première espèce.*

• *Thème abordé dans oral ESCP 2001 2.2, 2006 2.10, 2009 2.17.*

On rappelle que :

→ cos définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

→ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

PARTIE I

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \mathrm{C}_n^{2k}\,(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta - 1)^k$$

(calculer la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).

Q2 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe un élément T_n de $\mathbb{R}[X]$ et un seul tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

b) Préciser la parité de T_n. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$. Donner le degré de T_n.

c) Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.

Q3 Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(on pourra commencer par montrer que ces deux polynômes coïncident en $\cos\theta$).

Q4 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si k est élément de $[\![0, n-1]\!]$, $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ est une racine de T_n.

En déduire avec beaucoup de soin que T_n admet exactement n racines réelles distinctes et que ces racines sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Q5 $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le maximum et le minimum de T_n sur $[-1, 1]$. Montrer que la fonction T_n atteint sur $[-1, 1]$ ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

PARTIE II

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 Montrer que pour tout élément u de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} u(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q2 Pour tout couple (f, g) d'éléments de E on pose : $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite nous noterons $< .,. >$ ce produit scalaire et N la norme associée.

Dans la suite encore, F est le sous espace vectoriel de E constitué par les applications polynômiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si n appartient à $\mathbb{N}$, F_n est le sous-espace de F constitué par les applications polynômiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n. On pourra confondre F et $\mathbb{R}[X]$ (resp. F_n et $\mathbb{R}_n[X]$)...

On se propose, pour ω dans $\mathbb{N}$, de trouver l'ensemble S_ω des éléments P de F tels que :

$$\forall x \in [-1,1], (1-x^2)\, P''(x) - x\, P'(x) + \omega^2 P(x) = 0.$$

Q3 n est élément de $\mathbb{N}$.

Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de F_n (on pourra poser $t = \cos\theta$ ...).

En déduire que si n n'est pas nul, T_n est orthogonal à F_{n-1}.

Calculer la norme $N(T_n)$ de T_n.

Q4 Φ est l'application qui à tout élément P de F associe $\Phi(P)$ défini(e) par

$$\forall x \in [-1,1],\ \Phi(P)(x) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x).$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

b) P est un élément de F. Préciser la dérivée de $x \to \sqrt{1-x^2}\, P'(x)$ sur $]-1,1[$ (on pourra l'exprimer en fonction de $\Phi(P)$).

c) Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\Phi$. Montrer proprement que P' est nulle. Déterminer le noyau de Φ.

Q5 P et Q sont deux éléments de F. Montrer que :

$$< \Phi(P), Q > = < P, \Phi(Q) >$$

(utiliser proprement Q4b)).

Q6 n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que F_n est stable par Φ. Φ_n est l'application de F_n dans F_n qui à P dans F_n associe $\Phi(P)$.
Montrer très simplement que Φ_n est un endomorphisme diagonalisable de F_n.

b) Ici n n'est pas nul. Montrer que si P est élément de F_n, il existe un réel λ tel que : $\Phi_n(P) + \lambda P \in F_{n-1}$.

Montrer que si de plus P est orthogonal à F_{n-1} alors il en est de même pour $\Phi_n(P) + \lambda P$.

Montrer dans ce cas que : $\Phi_n(P) + \lambda P = 0$.

c) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\Phi_n(T_n) + n^2 T_n = \Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$.

Q7 n est dans $\mathbb{N}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ_n.

Q8 Répondre au problème posé.

- *Voir la suite du problème dans le sujet 3 de la sélection.*

PARTIE I

Q1 $n\in\mathbb{N}, \theta\in\mathbb{R}$, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k$.

à un changement près.

donc $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}\, i^{2k}(\sin\theta)^{2k}+\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^{2k+1}(\cos\theta)^{n-(2k+1)}\, i^{2k+1}(\sin\theta)^{2k+1}$.

Ainsi $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(-1)^k(\sin\theta)^{2k}+i\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^{2k+1}(\cos\theta)^{n-(2k+1)}(-1)^k(\sin\theta)^{2k+1}$.

Par conséquent : $\cos n\theta=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(n\theta)=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta-1)^k$.

Q2 $n\in\mathbb{N}$. a) Posons $\boxed{T_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k}$.

$T_n\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta-1)^k=\cos n\theta$. T_n est donc une solution.

Supposons que $\hat{T}_n$ soit une seconde solution. Ainsi $\hat{T}_n\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\hat{T}_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

$T_n-\hat{T}_n\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $(T_n-\hat{T}_n)(\cos\theta)=T_n(\cos\theta)-\hat{T}_n(\cos\theta)=\cos n\theta-\cos n\theta=0$.

Ainsi peut-on dire que : $\forall x\in[-1,1]$, $(T_n-\hat{T}_n)(x)=0$.

$T_n-\hat{T}_n$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ admettant une infinité de racines donc $T_n-\hat{T}_n=0$. $\hat{T}_n=T_n$.

$\exists!\, T_n\in\mathbb{R}[X]$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$; $T_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k$.

b) $T_n(-X)=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(-X)^{n-2k}((-X)^2-1)^k=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(-1)^n\underbrace{(-1)^{-2k}}_{=1}X^{n-2k}(X^2-1)^k=(-1)^nT_n(X)$.

$T_n(-X)=(-1)^nT_n(X)$. T_n a la parité de n.

$T_n(1)=T_n(\cos 0)=\cos(n\times 0)=1$. $T_n(-1)=(-1)^nT_n(1)=(-1)^n$.

$T_n(1)=1$ et $T_n(-1)=(-1)^n$. Clairement $\deg T_n=n$ (le coeff. de X^n dans T_n est $\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}$)

c) $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(0\times\theta)=(\cos\theta)^0$; $T_0=1$. $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$; $T_2=2X^2-1$.

$\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(1\times\theta)=(\cos\theta)^1$; $T_1=X$. $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$; $T_3=4X^3-3X$.

$T_0=1$. $T_1=X$. $T_2=2X^2-1$. $T_3=4X^3-3X$. ces résultats s'obtiennent aussi avec la formule obtenue en a)

... $T_4=8X^4-8X^2+1$ et $T_5=16X^5-20X^3+5X$.

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ il suffit de prouver que $T_{n+2} - (2XT_{n+1} - T_n)$ est le polynôme nul ce qui peut se faire en lui donnant une infinité de racines. Posons $H_n = T_{n+2} - (2XT_{n+1} - T_n)$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $H_n(\cos\theta) = T_{n+2}(\cos\theta) - 2\cos\theta\, T_{n+1}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta)$

$H_n(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta) - 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) + \cos(n\theta)$

$H_n(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta) - [\cos(\theta+(n+1)\theta) + \cos(\theta-(n+1)\theta)] + \cos(n\theta)$

$H_n(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta) - \cos((n+2)\theta) - \cos(-n\theta) + \cos(n\theta) = 0$.

Ainsi $\forall x \in [-1,1]$, $H_n(x) = 0$.

H_n admet une infinité de racines donc $H_n = 0$. $\underline{T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.}$

(Q4) $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $T_n(y_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.

donc $\underline{\text{pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \text{ est un zéro de } T_n.}$

Notons que cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + k \times \frac{\pi}{n}$.
$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{\pi}{2n} \leq \theta_k = \frac{\pi}{2n} + k \times \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2n} + (n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{2n-1}{2n}\pi < \pi$.

De plus : $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \pi$ donc $-1 < \cos\theta_{n-1} < \cos\theta_{n-2} < \dots < \cos\theta_0 < 1$

Ainsi $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ sont n éléments deux à deux distincts de $]-1,1[$.

T_n a donc n racines réelles distinctes $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ appartenant à $]-1,1[$.
Comme T_n est degré n : $\underline{T_n \text{ admet exactement } n \text{ racines réelles et ces racines sont dans l'intervalle }]-1,1[.}$

(Q5) $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que T_n est continue sur le segment $[-1,1]$ donc y possède un maximum et un minimum.

$\max\limits_{x\in[-1,1]} (T_n(x)) = \max\limits_{\theta\in[0,\pi]} T_n(\cos\theta) = \max\limits_{\theta\in[0,\pi]} (\cos(n\theta)) = 1$ (prendre $\theta = 0$ ...).

$\min\limits_{x\in[-1,1]} (T_n(x)) = \min\limits_{\theta\in[0,\pi]} T_n(\cos\theta) = \min\limits_{\theta\in[0,\pi]} (\cos(n\theta)) = -1$ (prendre $\theta = \frac{\pi}{n}$ ...).

Soit $x \in [-1,1]$. $\exists!\, \theta \in [0,\pi]$, $x = \cos\theta$.

$T_n(x) = \pm 1 \iff T_n(\cos\theta) = \pm 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff n\theta \equiv 0\ [\pi] \iff \theta \equiv 0\ [\frac{\pi}{n}]$

$T_n(x) = \pm 1 \underset{\theta\in[0,\pi]}{\iff} \exists k \in [\![0,n]\!],\ \theta = k\frac{\pi}{n} \iff \exists k \in [\![0,n]\!],\ x = \cos\frac{k\pi}{n}$.

$\underline{T_n \text{ atteint sur } [-1,1] \text{ ses extremums en } n+1 \text{ points} : 1, \cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}, \dots, \cos\frac{(n-1)\pi}{n}, -1.}$

PARTIE II

Le texte de Q1 a été modifié. f est devenu u. Pour $\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\pi}u(\cos\theta)d\theta$ voir Q3.

Q1. Soit $\hat{f}\in E$. $t\mapsto\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$\hat{f}$ est continue sur $[-1,1]$ donc $\exists M\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in[-1,1]$, $|\hat{f}(t)|\leqslant M$.

$\forall t\in[0,1[$, $\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|\leqslant\frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant\frac{M}{(1-t)^{1/2}}$ ($\sqrt{1+t}\geqslant 1$ si $t\in[0,1[$).

La convergence de $\int_0^1\frac{M\,dt}{(1-t)^{1/2}}$ et la positivité de $t\mapsto\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|$ montrent que $\int_0^1\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt$ converge.

$\forall t\in]-1,0]$, $\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|\leqslant\frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant\frac{M}{(1+t)^{1/2}}$ ($\sqrt{1-t}\geqslant 1$ si $t\in]-1,0]$).

La convergence de $\int_{-1}^0\frac{M}{(1+t)^{1/2}}dt$ et la positivité de $t\mapsto\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|$ montrent que $\int_{-1}^0\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt$ converge.

Ainsi $\int_{-1}^1\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt$ converge. $\int_{-1}^1\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est absolument convergente donc convergente.

Q2 Notons que si $(f,g)\in E^2$, $fg\in E$ donc $\varphi(f,g)$ a un sens d'après Q1.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g,h)\in E^3$, $\varphi(\lambda f+g,h)=\int_{-1}^1\frac{(\lambda f+g)(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^1\frac{\lambda f(t)h(t)+g(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\lambda\int_{-1}^1\frac{f(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int_{-1}^1\frac{g(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Donc $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi(\lambda f+g,h)=\lambda\varphi(f,h)+\varphi(g,h)$.

$\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi(f,g)=\int_{-1}^1\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^1\frac{g(t)f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\varphi(g,f)$. $\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi(f,g)=\varphi(g,f)$.

Soit $f\in E$. $\forall t\in]-1,1[$, $\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$, donc $\varphi(f,f)=\int_{-1}^1\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\geqslant 0$. positivité de la fonction...

Supposons $\varphi(f,f)=0$. $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $0\leqslant\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\leqslant\int_{-1}^1\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0$

Ainsi $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Or $t\mapsto\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$... donc sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$...

Par conséquent $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $\forall t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0$; $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $\forall t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $f(t)=0$.

Ainsi $\forall t\in]-1,1[$, $f(t)=0$.

$f(-1)=\lim_{t\to-1}f(t)=0$ et $f(1)=\lim_{t\to1}f(t)=0$ car f est continue en -1 et 1. Donc f est nulle.

Ainsi $\forall f\in E$, $\varphi(f,f)\geqslant 0$ et $\forall f\in E$, $\varphi(f,f)=0_E\Rightarrow f=0_E$. φ est un produit scalaire sur E.

Q3 Soit $(f,g)\in E^2$.

Soit $\alpha\in]-1,1[$ et $\beta\in]-1,1[$. $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{t=\cos\theta}{=} \int_{\mathrm{Arccos}\,\alpha}^{\mathrm{Arccos}\,\beta} \frac{f(\cos\theta)g(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)\,d\theta = \int_{\mathrm{Arccos}\,\alpha}^{\mathrm{Arccos}\,\beta} f(\cos\theta)g(\cos\theta)\frac{-\sin\theta}{|\sin\theta|}\,d\theta$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\mathrm{Arccos}\,\beta}^{\mathrm{Arccos}\,\alpha} f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,d\theta$ ($\sin\theta\geq 0$ si $\theta\in[0,\pi]$ ...)

$\lim\limits_{\beta\to 1^-}\mathrm{Arccos}\,\beta = 0$ et $\lim\limits_{\alpha\to -1^+}\mathrm{Arccos}\,\alpha = \pi$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,d\theta.}$

Soit $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$.

$\displaystyle\langle T_i,T_j\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^\pi T_i(\cos\theta)T_j(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta$

$\displaystyle\langle T_i,T_j\rangle = \frac12\int_0^\pi \cos((i+j)\theta)\,d\theta + \frac12\int_0^\pi \cos((i-j)\theta)\,d\theta = \frac12\left[\frac{\sin((i+j)\theta)}{i+j}\right]_0^\pi + \frac12\left[\frac{\sin((i-j)\theta)}{i-j}\right]_0^\pi = 0$

$\forall (i,j)\in[\![0,n]\!]^2$, $i\neq j \Rightarrow \langle T_i,T_j\rangle = 0$. $(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale de F_n.

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\deg T_k = k$; $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $T_k\neq 0$!

$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale de F_n constituée de vecteurs non nuls ;

$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est alors une famille libre de $n+1$ éléments de F_n qui est de dimension $n+1$.

<u>$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une base orthogonale de F_n.</u> Au passage si $n\in\mathbb{N}^*$, <u>T_n est orthogonal à $\mathrm{Vect}(T_0,\dots,T_{n-1}) = F_{n-1}$</u>

$\displaystyle N^2(T_n) = \langle T_n,T_n\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^\pi T_n^2(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi (\cos(n\theta))^2\,d\theta = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}\,d\theta$

* $n=0$ $\displaystyle N^2(T_0) = \int_0^\pi \frac{1+1}{2}\,d\theta = \pi$
* $n\geq 1$ $\displaystyle N^2(T_n) = \int_0^\pi\left(\frac12 + \frac{\cos(2n\theta)}{2}\right)d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2n\theta)}{4n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

<u>$N(T_0) = \sqrt{\pi}$</u> et <u>$N(T_n) = \sqrt{\pi/2}$ si $n\in\mathbb{N}^*$.</u>

Q4 a) Par définition de F si $P\in F$ alors $\phi(P)\in F$. ϕ est une application de F dans F.

Soient $(P,Q)\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(\lambda P+Q)(x) = (1-x^2)(\lambda P+Q)''(x) - x(\lambda P+Q)'(x) = (1-x^2)(\lambda P''(x)+Q''(x)) - x(\lambda P'(x)+Q'(x))$.

$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(\lambda P+Q)(x) = \lambda\left[(1-x^2)P''(x) - xP'(x)\right] + \left[(1-x^2)Q''(x) - xQ'(x)\right]$.

$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(\lambda P+Q)(x) = \lambda\,\phi(P)(x) + \phi(Q)(x) = [\lambda\phi(P)+\phi(Q)](x)$.

<u>$\phi(\lambda P+Q) = \lambda\,\phi(P) + \phi(Q)$.</u>

Ainsi ϕ est un endomorphisme de F.

b) $P \in F$. $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}\,P'(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[$, $u'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} P'(x) + \sqrt{1-x^2}\,P''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left((1-x^2)P''(x) - xP'(x)\right)$

$\forall x \in]-1,1[$, $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\phi(P)(x)$.

c) Soit $P \in \operatorname{Ker}\phi$. $\forall x \in [-1,1]$, $\phi(P)(x) = 0$.

Ainsi, en utilisant la relation de b) : $\forall x \in]-1,1[$, $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\phi(P)(x) = 0$.

Donc u' est nulle sur $]-1,1[$. Par conséquent u est constante sur $]-1,1[$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1,1[$, $u(x) = \sqrt{1-x^2}\,P'(x) = \lambda$. $\forall x \in]-1,1[$, $P'(x) = \lambda \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Or $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} P'(x) = P'(1)$ donc nécessairement $\lambda = 0$!

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $P'(x) = 0$. P' étant continue sur $[-1,1]$: $\forall x \in [-1,1]$, $P'(x) = 0$.

P est donc constante sur $[-1,1]$. $P \in F_0$.

Réciproquement si $P \in F_0$: $P' = P'' = 0$ et $\phi(P) = 0$ donc $P \in \operatorname{Ker}\phi$.

Ainsi $\operatorname{Ker}\phi = F_0$.

Q5) $(P,Q) \in F^2$. Soit $(\alpha,\beta) \in]-1,1[^2$.

$$\int_\alpha^\beta \frac{\phi(P)(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_\alpha^\beta u'(t)Q(t)\,dt = [u(t)Q(t)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)Q'(t)\,dt$$

$u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}\,P'(x)$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\phi(P)(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(P'(t)Q'(t)\sqrt{1-t^2}\right)dt$$

$$\lim_{\beta \to 1^-}\left(\sqrt{1-\beta^2}\,P'(\beta)Q(\beta)\right) = \lim_{\alpha \to -1^+}\left(\sqrt{1-\alpha^2}\,P'(\alpha)Q(\alpha)\right) = 0$$

Ainsi : $$\int_{-1}^1 \frac{\phi(P)(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int_{-1}^1 \left(P'(t)Q'(t)\sqrt{1-t^2}\right)dt$$

Donc $$\langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

En échangeant P et Q on obtient : $<\phi(Q),P> = -\int_{-1}^{1} Q'(t)P'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$

Ainsi $<\phi(P),Q> = -\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = -\int_{-1}^{1} Q'(t)P'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = <\phi(Q),P> = <P,\phi(Q)>$.

$\forall (P,Q)\in E^2,\ <\phi(P),Q> = <P,\phi(Q)>$. ϕ est un endomorphisme symétrique de E

Q6 a) Soit $P\in F_n$. P est polynômiale de degré au plus n et :
$\forall x\in[-1,1],\ \phi(P) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x)$, donc $\phi(P)$ est également polynômiale de de degré au plus n ($\deg P''\leq n-2$ et $\deg P'\leq n-1$)

Donc $\forall P\in F_n,\ \phi(P)\in F_n$. F_n est stable par ϕ.

Par définition ϕ_n est une application de F_n dans F_n.
$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q)\in F_n^2,\ \phi_n(\lambda P+Q) = \phi(\lambda P+Q) = \lambda\phi(P)+\phi(Q) = \lambda\phi_n(P)+\phi_n(Q)$.
ϕ_n est donc un endomorphisme de F_n.
$\forall(P,Q)\in F_n^2,\ <\phi_n(P),Q> = <\phi(P),Q> = <P,\phi(Q)> = <P,\phi_n(Q)>$.

ϕ_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

Ainsi ϕ_n est un endomorphisme diagonalisable de F_n.

b) $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $P\in F_n$
Clairement si $P\in F_{n-1}$ pour tout réel λ, $\phi_n(P)+\lambda P\in F_{n-1}$ car F_{n-1} est stable par ϕ donc par ϕ_n.
On peut donc se contenter de traiter le cas où P est de degré n ... ce que nous ne ferons pas !
Reprenons P dans F_n et notons a_n le coefficient de X^n dans P (si $P\in F_{n-1}$, $a_n=0$!). ~~~> ou de x^n...
Le coefficient de X^n dans $\phi_n(P)$ est : $-n(n-1)a_n - na_n = -n^2a_n$.
Ainsi $\phi_n(P)+n^2P$ est un élément de F_n dont le coefficient de X^n est nul.

Donc $\phi_n(P)+n^2P\in F_{n-1}$. Si $P\in F_n$, $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \phi_n(P)+\lambda P\in F_{n-1}$.

Supposons de plus : P orthogonal à F_{n-1}.

$\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle P, Q\rangle = 0$.

$\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle \phi_n(P)+\lambda P, Q\rangle = \langle \phi_n(P), Q\rangle + \lambda\langle P, Q\rangle = \langle \phi_n(P), Q\rangle = \langle P, \phi_n(Q)\rangle$

or si Q appartient à F_{n-1}, $\phi_n(Q) = \phi(Q)$ appartient à F_{n-1} car F_{n-1} est stable par ϕ.

Comme P est orthogonal à F_{n-1} il vient $\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle P, \phi_n(Q)\rangle = 0$.

Donc $\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle \phi_n(P)+\lambda P, Q\rangle = 0$; $\underline{\phi_n(P)+\lambda P \text{ est orthogonal à } F_{n-1}}$.

$\phi_n(P)+\lambda P \in F_{n-1}$ et $\phi_n(P)+\lambda P \in F_{n-1}^{\perp}$ donc $\underline{\phi_n(P)+\lambda P = 0}$

Nous venons en fait de prouver que si $\underline{P \in F_{n-1}^{\perp} : \phi_n(P)+\lambda P = 0 \text{ avec } \lambda = n^2.}$

c) Tout est clair. Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \in F_n$.

1er cas.. $n \in \mathbb{N}^*$. D'après Q3, T_n est orthogonal à F_{n-1} d'après ce qui précède : $\phi_n(T_n)+n^2T_n = 0$. Donc $\phi(T_n)+n^2T_n = 0$

2e cas.. $n=0$. $\phi(T_n)+n^2T_n = \phi(T_0) = 0$ ($T_0' = T_0'' = 0$ ou $T_0 \in F_0 = \mathrm{Ker}\,\phi$).

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\phi_n(T_n)+n^2T_n = \phi(T_n)+n^2T_n = 0}$.

(Q7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. $F_k \subset F_n$.

$$\phi_n(T_k)+k^2T_k = \phi(T_k)+k^2T_k = 0.$$

Donc $\phi_n(T_k) = -k^2T_k$ et $T_k \neq 0$. Par conséquent $-k^2 \in Sp(\phi_n)$.

ϕ_n admet au moins $n+1$ valeurs propres distinctes $0, -1, -2^2, \dots, -n^2$. Comme ϕ_n est un endomorphisme de F_n espace vectoriel de dimension $n+1$, ϕ_n a au plus $n+1$ valeurs propres distinctes.

Ainsi $\underline{0, -1, -2^2, \dots, -n^2 \text{ sont les valeurs propres de } \phi_n}$ et les sous-espaces propres de ϕ_n sont des droites vectorielles.

Remarque.- $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $SEP(\phi_n, -k^2) = \mathrm{Vect}(T_k)$.

(Q8). $\omega \in \mathbb{N}$. Posons $S_\omega = \{P \in F \mid \forall x \in [-1,1],\ (1-x^2)P''(x) - xP'(x) + \omega^2P(x) = 0\}$.

D'après ce qui précède : $\mathrm{Vect}(T_\omega) \subset S_\omega$. Réciproquement soit $P \in S_\omega$. Si $P=0$: $P \in \mathrm{Vect}(T_\omega)$.

Supposons P non nul et notons n son degré. $\phi_n(P) = -\omega^2 P$. $-\omega^2 \in Sp(\phi_n)$ et $P \in SEP(\phi_n, -\omega^2) = \mathrm{Vect}(T_\omega)$

donc $P \in \mathrm{Vect}(T_\omega)$.

Finalement $\underline{S_\omega = \mathrm{Vect}(T_\omega)}$.

EXERCICE 57

Exercice **Polynôme de Laguerre.**

• *Thème abordé dans problème d'EDHEC 1998, LYON 1998, LYON 2011, oral ESCP 2011 2.11.*

• *Ce qui suit est constitué des parties II et III de LYON 2011. Pour un texte plus ambitieux sur le sujet voir le sujet dans les problèmes de bilinéaire ou dans la slection proposée (sujet 5).*

Partie II : Polynômes de Laguerre

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to e^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f_n.

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

9. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'n(x) - L_n(x).$$

11. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L'_n(x) + (n+1-x)\, L_n(x).$$

13. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x\, L''_n(x) - (x-1)\, L'_n(x) + n\, L_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

14. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\, dx$ converge.

On considère l'application

$$< .,. >:\ E \times E \to \mathbb{R},\ (P,Q) \to < P,Q >= \int_0^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, dx.$$

15. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(P)(x) = x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x).$$

16. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

17. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

18. En déduire, pour tout $(P,Q) \in E \times E$:

$$< T(P), Q >= - \int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

19. Établir : $\forall (P,Q) \in E \times E,\ < T(P), Q >=< P, T(Q) >$.

20. En utilisant le résultat de la question **13**, calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.

21. En déduire que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est orthogonale.

22. Montrer :

$$\forall P \in E_N,\ T(P) \in E_N.$$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N, c'est à dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N,\ T_N(P) = T(P).$$

23. Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une base de E_N.

24. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$.

25. Est-ce que T_n est diagonalisable ? Est-ce que T_n est bijectif ?

Partie II : Polynômes de Laguerre

Remarque *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $x \to x^n$ et $x \to e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors par produit f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie la définition de $f_n^{(n)}$ et donc de L_n.*

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = e^x f_0^{(0)}(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$. Donc $L_0 = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = 1 \text{ ou } L_0 = 1.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x\,e^{-x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = e^x f_1'(x) = e^x\left(e^{-x} + x\,(-e^{-x})\right) = 1 - x$. Donc $L_1 = 1 - X$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = 1 - x \text{ ou } L_1 = 1 - X.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{1}{2}\,x^2\,e^{-x}$. La formule de leïbniz donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\left(2\,e^{-x} + 2\,(2\,x)\,(-e^{-x}) + x^2\,e^{-x}\right)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\,e^{-x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = e^x f_2''(x) = e^x\left(\frac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\,e^{-x}\right) = 1 - 2\,x + \frac{1}{2}\,x^2$.

Ou $L_2 = 1 - 2\,X + \frac{1}{2}\,X^2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = 1 - 2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 \text{ ou } L_2 = 1 - 2\,X + \frac{1}{2}\,X^2.}$$

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = x^n$ et $v(x) = e^{-x}$. u_n et v sont n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n = \frac{1}{n!}\,u_n\,v$.

La formule de leïbniz donne alors : $f_n^{(n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,u_n^{(k)}\,v^{(n-k)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,u_n^{(n-k)}\,v^{(k)}$.

Deux récurrences simples montrent que :

1. $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)} = (-1)^k\,v$ ou $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v^{(k)}(x) = (-1)^k\,e^x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\,u_n^{(n-k)}(x)\,v^{(k)}(x)\right] = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\,\frac{n!}{(n-(n-k))!}\,x^{n-(n-k)}\,(-1)^k\,e^{-x}\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\,\frac{n!}{k!}\,x^k\,(-1)^k\,e^{-x}\right] = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}\,x^k\right]$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x) = e^x\left(e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}\,x^k\right]\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}\,x^k\right] = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}\,x^k$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}\,x^k \text{ ou } L_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}\,X^k\ .}$$

8. Notons que $\frac{(-1)^n}{n!}\binom{n}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0$! ! Alors plus de doute !

pour tout n dans $\mathbb{N}$, L_n est une fonction polynômiale (ou un polynôme) de degré n dont le coefficient du terme de plus haut degré est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

9. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}(n+1)\, x^n\, e^{-x} + \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,(-e^{-x}) = \dfrac{1}{n!}\, x^n\, e^{-x} - \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).}$$

10. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}(x) = e^x\, f_{n+1}^{(n+1)}(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x\, f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x\, f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x \left(f_{n+1}^{(n+1)}(x) + f_{n+1}^{(n+2)}(x)\right)$.

Or $f'_{n+1} = f_n - f_{n+1}$. En dérivant $n+1$ fois on obtient : $f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)} - f_{n+1}^{(n+1)}$ ou $f_{n+1}^{(n+1)} + f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x\, f_n^{(n+1)}(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = e^{-x}\, L_n(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x}\, L_n(x) + e^{-x}\, L'_n(x) = e^{-x}\left(L'_n(x) - L_n(x)\right)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x\, f_n^{(n+1)}(x) = e^x\, e^{-x}\left(L'_n(x) - L_n(x)\right) = L'_n(x) - L_n(x)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ L'_{n+1} = L'_n - L_n.}$$

11. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}\, e^{-x}}{(n+1)!} = \dfrac{x}{n+1}\,\dfrac{x^n\, e^{-x}}{n!} = \dfrac{x}{n+1}\, f_n(x)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}\, f_n(x).}$$

12. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = (n+1)\, e^x\, f_{n+1}^{(n+1)} = e^x\left((n+1)\, f_{n+1}\right)^{(n+1)}(x)$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ u_1(x) = x$. Alors $(n+1)\, f_{n+1} = u_1\, f_n$ d'après **Q11**.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = e^x\left((n+1)\, f_{n+1}\right)^{(n+1)}(x) = e^x\,(u_1\, f_n)^{(n+1)}(x)$.

La formule de Leïbniz donne $(u_1\, f_n)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}\, u_1^{(k)}\, f_n^{(n+1-k)}$.

Or $u_1^{(0)} = u_1,\ u_1^{(1)} = 1$ et $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ u_1^{(k)} = 0$.

Alors $(u_1\, f_n)^{(n+1)} = \dbinom{n+1}{0}\, u_1\, f_n^{(n+1)} + \dbinom{n+1}{1}\, 1 \times f_n^{(n)} = u_1\, f_n^{(n+1)} + (n+1)\, f_n^{(n)}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = e^x\,(u_1\, f_n)^{(n+1)}(x) = e^x\left(x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, f_n^{(n)}(x)\right)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, e^x\, f_n^{(n)}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, L_n(x)$.

Remarquons alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = e^{-x}\, L_n(x)$.

Donc en dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L_n'(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x f_n^{(n+1)}(x) = -L_n(x) + L_n'(x)$ (résultat que nous avions déjà obtenu dans **Q10**)...).

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, e^x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, L_n(x) = x\,\big(-L_n(x) + L_n'(x)\big) + (n+1)\, L_n(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L_n'(x) + (n+1-x)\, L_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L_n'(x) + (n+1-x)\, L_n(x).}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ (n+1)\, L_{n+1} = X\, L_n' + (n+1-X)\, L_n.}$$

13. Soit n dans $\mathbb{N}$. $(n+1)\, L_{n+1} = X\, L_n' + (n+1-X)\, L_n$. En dérivant on obtient :

$(n+1)\, L_{n+1}' = L_n' + X\, L_n'' - L_n + (n+1-X)\, L_n' = X\, L_n'' - L_n + (n+2-X)\, L_n'$. Or $L_{n+1}' = L_n' - L_n$.

Ainsi $(n+1)\,(L_n' - L_n) = X\, L_n'' - L_n + (n+2-X)\, L_n'$. Ce qui donne :

$0_{\mathbb{R}[X]} = -(n+1)\,(L_n' - L_n) + X\, L_n'' - L_n + (n+2-X)\, L_n' = X\, L_n'' - (X-1)\, L_n' + n\, L_n$.

$X\, L_n'' - (X-1)\, L_n' + n\, L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X\, L_n'' - (X-1)\, L_n' + n\, L_n = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x\, L_n''(x) - (x-1)\, L_n'(x) + n\, L_n(x) = 0.}$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

14. • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{(k+1)-1}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

• Soit A un élément de E. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tels que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k\, e^{-x}\right) \mathrm{d}x$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } A \text{ de } E, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ *en montrant que* $\big|A(x)\, e^{-x}\big| \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *par croissance comparée.*

15. • Soit (P, Q) un couple d'éléments de E.

PQ appartient à E donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}(PQ)(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge ! Ainsi $< P,Q >$ existe.

$< .,. >$ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de E.

$$< \lambda\,P+Q,R >=\int_0^{+\infty}(\lambda\,P+Q)(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P(x)\,R(x)+Q(x)\,R(x)\big)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$< \lambda\,P+Q,R >=\int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P(x)\,R(x)\,e^{-x}+Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_0^{+\infty}P(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\,P+Q,R >=\lambda < P,R > + < Q,R >$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q,R)\in E^3,\ < \lambda\,P+Q,R >=\lambda < P,R > + < Q,R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

• Soit (P,Q) un couple d'éléments de E. $\displaystyle < P,Q >=\int_0^{+\infty}P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}Q(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x=< Q,P >$.

$\forall(P,Q)\in E^2,\ < P,Q >=< Q,P >$. $< .,. >$ est symétrique.

• Soit P un élément de E. $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\geqslant 0$ et $0\leqslant+\infty$! donc $\displaystyle < P,P >=\int_0^{+\infty}\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

$\forall P\in E,\ < P,P >\ \geqslant 0$. $< .,. >$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $< P,P >=0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x=0$.

▼ $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

▼ $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

▼ $0\neq+\infty$!

Alors $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est nulle sur $[0,+\infty[$. Comme $x\to e^{-x}$ ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$: $\forall x\in[0,+\infty[,\ \big(P(x)\big)^2=0$.

Ainsi $\forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)=0$. La fonction polynômiale P admet alors une infinité de zéro c'est donc la fonction polynômiale nulle. $P=0_E$.

$\forall P\in E,\ < P,P >\Rightarrow P=0_E$. $< .,. >$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

16. • Soit P un élément de E. $x\to x$, P'', $x\to x-1$ et P' sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par produit $x\to x\,P''(x)$ et $x\to(x-1)\,P'(x)$ sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire $x\to x\,P''(x)-(x-1)\,P'(x)$ est une application polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc un élément de E. Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$\forall P\in E,\ T(P)\in E$. T est une application de E dans E.

• Soit λ un réel et soient P, Q deux éléments de E.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x)=x\,(\lambda\,P+Q)''(x)-(x-1)\,(\lambda\,P+Q)'(x)=x\,\big(\lambda\,P''(x)+Q''(x)\big)-(x-1)\,\big(\lambda\,P'(x)+Q'(x)\big)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x)=\lambda\big(x\,P''(x)+(x-1)\,P'(x)\big)+\big(x\,Q''(x)+(x-1)\,Q'(x)\big)=\lambda\,T(P)(x)+T(Q)(x)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x)=\big(\lambda\,T(P)+T(Q)\big)(x)$. $T(\lambda\,P+Q)=\lambda\,T(P)+T(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ T(\lambda P + Q) = \lambda T(P) + T(Q)$. T est linéaire. Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } E.}$$

17. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\,P'(x)\,e^{-x}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = P'(x)\,e^{-x} + x\,P''(x)\,e^{-x} + x\,P'(x)\,(-e^{-x}) = (x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x))\,e^{-x} = T(P)(x)\,e^{-x}$.

$x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de $x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

> Pour pout P dans E, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

18. Soient P et Q deux éléments de E.

Rappelons que nous avons posé $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\,P'(x)\,e^{-x}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = T(P)(x)\,e^{-x}$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$. φ et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc nous pouvons intégrer par parties.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\,Q(x)\Big]_0^A - \int_0^A \varphi(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \varphi(A)\,Q(A) - \varphi(0)\,Q(0) - \int_0^A x\,P'(x)\,e^{-x}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$. Notons que $\varphi(0) = 0$. Alors :

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = A\ P'(A)\,e^{-A}\,Q(A) - \int_0^A x\,P'(x)\,e^{-x}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A} - \int_0^A x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (1).$

$x \to x\,P'(x)\,Q'(x)$ appartient à E comme produit de trois éléments de E.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (2).$

Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) = 0$.

$x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ est un élément de E comme produit de trois éléments de E.

Si $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ est la fonction nulle de E alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) = 0$!

Supposons maintenant que $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ n'est pas la fonction nulle de E.

Soit r le degré de la fonction polynôme $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré.

$\displaystyle\big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) \underset{A\to+\infty}{\sim} a_r\,A^r\,e^{-A} = a_r\,\frac{A^r}{e^A}$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(a_r\,\frac{A^r}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\Big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\Big) = 0 \quad (3).$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1), et en tenant compte de (2) et (3) on obtient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E \times E,\ < T(P), Q > = -\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

19. Soit P et Q deux éléments de E. $< T(P), Q >= -\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$.

L'intégrale ne change pas si l'on permute P et Q donc $< T(P), Q >=< T(Q), P >$.

Par symétrie du produit scalaire : $< T(P), Q >=< P, T(Q) >$.

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E \times E,\ < T(P), Q >=< P, T(Q) >.}$$

Remarque *T est un endomorphisme symétrique de $(E, < .,. >)$, non ?! Mais il est vrai que le programme se limite aux endomorphismes symétriques d'espaces vectoriels euclidiens...*

20. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ T(L_n)(x) = x\, L_n''(x) - (x-1)\, L_n'(x) = -n\, L_n(x)$ d'après **Q13**. Donc $T(L_n) = -n\, L_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T(L_n) = -n\, L_n.}$$

Remarque *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $L_n \neq 0_E$. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $-n$ est une valeur propre de T et L_n est un vecteur propre associé.*

Exercice *Montrer que le spectre de T est $\{-n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$.*

21. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0, N]\!]$. $< T(L_i), L_j >=< L_i, T(L_j) >$ d'après **Q19**.

Donc $< -i\, L_i, L_j >=< L_i, -j\, L_j >$. Alors $-i\ < L_i, L_j >= -j\ < L_i, L_j >$ et ainsi $(j - i)\ < L_i, L_j >= 0$.

Comme $j - i$ n'est pas nul : $< L_i, L_j >$ est nul.

$\forall (i, j) \in [\![0, N]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < L_i, L_j >= 0$.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

Remarque *Ce qui n'est pas un scoop car L_0, L_1, ..., L_N sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.*

22. Soit P un élément de E_N. P est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

P'' (resp. P') est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur où égal à $N-2$ (resp. $N-1$).

Alors $x \to x\, P''(x)$ (resp. $x \to (x-1)\, P'(x)$) est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-1$ (resp. N).

Alors les deux fonctions $x \to x\, P''(x)$ et $x \to (x-1)\, P'(x)$ appartiennent à E_N. Leur différence également.

Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$$\boxed{\forall P \in E_N,\ T(P) \in E_N.}$$

23. D'après **Q8**, pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré i.

Donc pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est un élément de E_N.

$(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une famille orthogonale d'éléments **non nuls** de E_N. C'est donc une famille libre de cardinal $N+1$ de E_N qui est de dimension $N+1$. Alors c'est une base de E_N.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une base de } E_N.}$$

24. $\forall i \in [\![0, N]\!],\ T(L_i) = -i\, L_i$. Donc

$\boxed{\text{la matrice de } T_N \text{ dans la base } (L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(0, -1, -2, \ldots, -N) \text{ de } \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).}$

$$\boxed{M_{(L_0,L_1,\ldots,L_N)}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -N \end{pmatrix}.}$$

25. Restons poli ! Oui T_N est diagonalisable car $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une base de E_N constituée de vecteurs propres de T_N ! ! !

$$\boxed{T_N \text{ est diagonalisable.}}$$

0 est valeur propre de T_N donc T_N n'est pas injectif et encore moins bijectif !

$$\boxed{T_N \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Exercice **Polynôme d'Hermite. ESSEC 2002.**

• *Ce qui suit est la partie I d'ESSEC 2002. On peut aussi voir ESCP MI 1997, LYON 2008, oral ESCP 2007 2.3, 2007 2.12.*

On aura intért à remplacer, lorsque cela est possible, x par X.

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré) est égal à 1.

1) Définition d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$

a) Établir que l'application associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\phi(P) = 2xP' - P"$ (où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Écrire sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Eléments propres de l'endomorphisme ϕ

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de ϕ (on supposera que $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ et montrer que ϕ est diagonalisable.

b) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p = 0$$

c) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, que H_p est nécessairement de degré p.

d) Expliciter les polynômes $H_0,\ H_1,\ H_2,\ H_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de x^{p-1} $(1 \leqslant p \leqslant n)$ et de x^{p-2} $(2 \leqslant p \leqslant n)$ dans l'expression du polynôme H_p.

3) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$< P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

b) Montrer alors que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to < P, Q > \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Exprimer la dérivée de $x \mapsto P'(x)\, e^{-x^2}$ en fonction de $\phi(P)(x)\, e^{-x^2}$, puis prouver qu'on a pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$< \phi(P), Q >=< P, \phi(Q) >$$

d) En déduire que $< H_p, H_q >= 0$ lorsque p et q sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et n, puis que $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Montrer enfin que $< H_p, Q >= 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$.

4) Etude des racines des polynômes H_p $\quad (1 \leqslant p \leqslant n)$

a) Montrer, en remarquant que $< H_p, H_0 >= 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) On note $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \leqslant p$) et on pose alors $P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m)$.

Étudier le signe du polynôme $H_p P_m$ et déterminer la valeur de l'intégrale $< H_p, P_m >$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.

c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5) Relations entre les polynômes $H_p \quad (2 \leqslant p \leqslant n)$

a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-3}[X]$ où $3 \leqslant p \leqslant n$:

$$< xH_{p-1}, Q >= 0 \qquad ; \qquad < H_p - xH_{p-1}, Q >= 0$$

En exprimant le polynôme $H_p - xH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$, établir la relation :

$$2Hp - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (\text{pour } 2 \leqslant p \leqslant n)$$

b) Prouver l'égalité $< H'_p, Q >= 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$ où $2 \leqslant p \leqslant n$, puis en déduire la relation :

$$H'_p = pH_{p-1} \quad (\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n)$$

PARTIE I

⚠ Dans cette partie j'utiliserai X à la place de x quand je parlerai de polynômes.

Q1 Définition d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $-P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $2XP' - P'' \in \mathbb{R}_n[X]$.

φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda P+Q) = 2X(\lambda P+Q)' - (\lambda P+Q)'' = 2X(\lambda P'+Q') - (\lambda P''+Q'') = \lambda(2XP' - P'') + (2XQ' - Q'')$

$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

φ est linéaire.

Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

b) $\varphi(1) = 0$. $\varphi(X) = 2X$. $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\varphi(X^k) = 2XkX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} = 2kX^k - k(k-1)X^{k-2}$.

A deux abus près : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(X^k) = 2kX^k - k(k-1)X^{k-2}$.

Alors la matrice de φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\times 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3\times 2 & & \vdots \\ & & 4 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 2n \end{pmatrix}$$

Q2 a) La matrice de φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de φ sont les éléments de la diagonale de cette matrice.

Ainsi $\mathrm{Sp}\,\varphi = \{2k \,;\, k \in [\![0,n]\!]\}$. Alors nous posons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = 2k$.

φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

Alors φ est diagonalisable.

b) φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$; nécessairement les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

Soit p un élément de $[\![0,n]\!]$. Considérons un élément U_p de $\mathbb{R}_n[X]$ qui engendre le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_p = 2p$. $U_p \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Soit $\tilde{b}_p$ le coefficient du terme de plus haut degré de U_p. Posons $H_p = \frac{1}{\tilde{b}_p} U_p$.

H_p est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ et H_p est encore un élément de $SEP(\varphi, 2p)$.

Ainsi $2XH'_p - H''_p = 2pH_p$; $H''_p - 2XH'_p + 2pH_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Soit $\hat{H}_p$ un second élément unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\hat{H}''_p - 2X\hat{H}'_p + 2p\hat{H}_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$\hat{H}_p$ appartient au sous-espace propre de φ associé à la valeur propre $2p$.

(car $2X\hat{H}'_p - \hat{H}''_p = 2p\hat{H}_p$) qui est la droite vectorielle engendrée par U_p ou par H_p.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{H}_p = \lambda H_p$. Le coefficient du ~~terme~~ de plus haut degré de $\hat{H}_p$ est le même que le coefficient du terme de plus haut degré de λH_p ; ainsi $1 = \lambda \times 1$. $\lambda = 1$

Alors $\hat{H}_p = H_p$.

<u>Pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, il existe un et un seul polynôme unitaire H_p vérifiant $H''_p - 2XH'_p + 2pH_p = 0$</u>

<u>c)</u> Soit $p \in [\![0,n]\!]$. $H_p \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Posons $k = \deg H_p$. Soit a_k le coefficient de X^k dans H_p. $a_k \neq 0$.

Le coefficient de X^k dans $H''_p - 2XH'_p + 2pH_p$ est : $0 - 2ka_k + 2pa_k$.

Ainsi $a_k \neq 0$ et $2(p-k)a_k = 0$. Alors $p - k = 0$; $k = p$.

<u>Pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, H_p est de degré p.</u>

<u>d)</u> 1 (resp. X) a toutes les qualités pour être H_0 (resp. H_1). <u>$H_0 = 1$ et $H_1 = X$.</u>

$\varphi(X^2) = 4X^2 - 2 = 4(X^2 - \frac{1}{2})$. $4(X^2 - \frac{1}{2}) = \varphi(X^2) \underset{\varphi}{=} \varphi(X^2 - \frac{1}{2})$!!

$X^2 - \frac{1}{2}$ est unitaire et $\varphi(X^2 - \frac{1}{2}) = 2 \times 2(X^2 - \frac{1}{2})$. $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

Ainsi <u>$H_2 = X^2 - \frac{1}{2}$.</u>

$\varphi(X^3) = 6X^3 - 6X$. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi(X^3 + aX) = 6X^3 - 6X + 2aX = 6(X^3 + (\frac{a}{3} - 1)X)$

Remarquons alors que $\forall a \in \mathbb{R}$, $a = \frac{a}{3} - 1 \iff a = -\frac{3}{2}$.

Alors $\phi(X^3-\frac{3}{2}X) = 6(X^3-\frac{3}{2}X)$ et $X^3-\frac{3}{2}X$ est un polynôme unitaire.

Ainsi $\underline{H_3 = X^3-\frac{3}{2}X}$.

Again ! $\phi(X^4) = 8X^4-12X^2$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $\phi(X^4+\alpha X^2+\beta) = 8X^4-12X^2+\alpha(4X^2-2) = 8(X^4+\frac{\alpha-3}{2}X^2-\frac{\alpha}{4})$.

$\frac{\alpha-3}{2}=\alpha$ et $-\frac{\alpha}{4}=\beta \iff \alpha=-3$ et $\beta=\frac{3}{4}$.

Alors $X^4-3X^2+\frac{3}{4}$ est unitaire et $\phi(X^4-3X^2+\frac{3}{4}) = 8(X^4-3X^2+\frac{3}{4})$.

Ainsi $\underline{H_4 = X^4-3X^2+\frac{3}{4}}$ ... $H_5 = X^5-5X^3+\frac{15}{4}$; $H_6 = X^6-\frac{15}{2}X^4+\frac{45}{4}X^2-\frac{15}{8}$ ...

Soit $p\in[\![3,n]\!]$. Notons b_p (resp. c_p) le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans H_p.

Le coefficient de X^{p-2} (resp. X^{p-3}) dans H'_p est : $(p-1)b_p$ (resp. $(p-2)c_p$).

Le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans XH'_p est : $(p-1)b_p$ (resp. $(p-2)c_p$).

Le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans H''_p est : 0 (resp. $p(p-1)$).

Alors le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans $H''_p-2XH'_p+2pH_p$ est :

$0-2(p-1)b_p+2pb_p$ (resp. $p(p-1)-2(p-2)c_p+2pc_p$) ; c'est

à dire $2b_p$ (resp. $p(p-1)+4c_p$).

Comme $H''_p-2XH'_p+2pH_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$: $2b_p=0$ et $p(p-1)+4c_p=0$

Alors $b_p=0$ et $c_p = -\frac{p(p-1)}{4}$.

Observons alors que le coefficient de X^{2-1} dans $H_2 = X^2-\frac{1}{2}$ est 0 et

que le coefficient de X^{2-2} dans H_2 est $-\frac{1}{2} = -\frac{2(2-1)}{4}$. Ainsi le

résultat précédent vaut pour $p=2$.

Pour tout p dans $⟦2, n⟧$ le coefficient de X^{p-1} dans H_p est 0 et le coefficient de X^{p-2} dans H_p est $-\frac{p(p-1)}{4}$.

(Q3) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Commençons cette question par deux petits lemmes.

Lemme 1. $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \lim_{x \to +\infty} \left(P(x) e^{-x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(P(x) e^{-x^2}\right) = 0.}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P est constant le résultat est clair.

Supposons que P ne soit pas constant. Soit k le degré de P et a_k le coefficient de x^k dans P. $k \geq 1$ et $a_k \neq 0$

Alors $|P(x) e^{-x^2}| \underset{+\infty\ (-\infty)}{\sim} |a_k| |x|^k e^{-x^2} = |a_k| (x^2)^{\frac{k}{2}} e^{-x^2}$

Alors, par croissance comparée : $\lim_{x \to +\infty} |P(x) e^{-x^2}| = \lim_{x \to -\infty} |P(x) e^{-x^2}| = 0$.

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} (P(x) e^{-x^2}) = \lim_{x \to -\infty} (P(x) e^{-x^2}) = 0$.

Lemme 2 $\boxed{\forall S \in \mathbb{R}[X], \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-t^2} dt \text{ converge.}}$

$\varphi : t \mapsto S(t) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après le lemme 1, $\lim_{t \to +\infty} (t^2 \varphi(t)) = \lim_{t \to -\infty} (t^2 \varphi(t)) = 0$

Alors $\exists A \in \mathbb{R}^*_+, \forall t \in [A, +\infty[, \quad 0 \leq |t^2 \varphi(t)| \leq 1$.

$\exists B \in \mathbb{R}^*_-, \forall t \in]-\infty, B], \quad 0 \leq |t^2 \varphi(t)| \leq 1$.

$\forall t \in [A, +\infty[, \ 0 \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\forall t \in]-\infty, B], \ 0 \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et de $\int_{-\infty}^{B} \frac{1}{t^2} dt$ et la positivité de $|\varphi|$ donnent

la convergence de $\int_A^{+\infty} |\varphi(t)| dt$ et de $\int_{-\infty}^{B} |\varphi(t)| dt$ donc la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ est absolument convergente donc convergente. Ce qui achève la démonstration du lemme 2.

a) Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$. $PQ \in \mathbb{R}[X]$ donc d'après le lemme 2, $\int_{-\infty}^{+\infty} (PQ)(t) e^{-t^2} dt$ est convergente.

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt$ existe.

b) Soit $(P,Q,R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Toutes les intégrales convergent

- $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P + Q)(t) R(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(t) R(t) e^{-t^2} + Q(t) R(t) e^{-t^2}) dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) R(t) e^{-t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) R(t) e^{-t^2} dt$

  $\underline{\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle}$.

- $\langle Q, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) P(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt = \langle P, Q \rangle$; $\underline{\langle Q, P \rangle = \langle P, Q \rangle}$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $P^2(t) e^{-t^2} \geqslant 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t^2} dt \geqslant 0$; $\underline{\langle P, P \rangle \geqslant 0}$.

- Supposons $\langle P, P \rangle = 0$. $t \mapsto (P(t))^2 e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

  Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t^2} dt = 0$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $(P(t))^2 e^{-t^2} = 0$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $(P(t))^2 = 0$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 0$

  $\underline{\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}}$.

Ceci suffit pour dire que : $\underline{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

c) Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. $\psi : t \mapsto P'(t) e^{-t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = P''(t) e^{-t^2} - 2t P'(t) e^{-t^2} = -\Phi(P)(t) e^{-t^2}$.

$\underline{\text{La dérivée de } t \mapsto P'(t) e^{-t^2} \text{ est : } t \mapsto -\Phi(P)(t) e^{-t^2}}$.

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$\int_A^B \Phi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt = -\int_A^B \psi'(t) Q(t)$. Une intégration par parties donne alors :

$\int_A^B \Phi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt = -[\psi(t) Q(t)]_A^B + \int_A^B \psi(t) Q'(t) dt$

$\int_A^B \Phi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt = -P'(B) Q(B) e^{-B^2} + P'(A) Q(A) e^{-A^2} + \int_A^B P'(t) Q'(t) e^{-t^2} dt$.

$\Phi(P)$, Q, P' et Q' sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$ convergent.

$P'Q \in \mathbb{R}[X]$ donc, d'après le lemme 1, $\lim\limits_{B\to+\infty} (P'(B)Q(B)e^{-B^2}) = \lim\limits_{A\to-\infty} (P'(A)Q(A)e^{-A^2}) = 0$.

En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ dans la dernière égalité de la page précédente on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$.

Ainsi $\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P', Q'\rangle$ ... nous nous en souviendrons.

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P', Q'\rangle$ et $\langle \Phi(Q), P\rangle = \langle Q', P'\rangle$.

Alors $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P', Q'\rangle = \langle Q', P'\rangle = \langle \Phi(Q), P\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle$.

$\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle$; Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Φ étant symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Soit $(p,q)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $p\neq q$.

$SEP(\Phi, 2p)$ et $SEP(\Phi, 2q)$ sont orthogonaux, $H_p\in SEP(\Phi,2p)$ et $H_q\in SEP(\Phi,2q)$; ainsi H_p et H_q sont orthogonaux.

$\forall (p,q)\in[\![0,n]\!]^2$, $p\neq q \Rightarrow \langle H_p, H_q\rangle = 0$.

Soit $p\in[\![0,n]\!]$.

$(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une famille d'éléments non nuls et deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}_p[X]$.

Alors $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une famille libre de cardinal $p+1$ de $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$. $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

Mieux $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_p[X]$.

Pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_p[X]$.

En particulier $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$. H_p est orthogonal à $H_0, H_1, \dots, H_{p-1}$.

H_p est orthogonal à $\mathrm{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_{p-1}) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Ainsi $\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$.

$\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$.

Q4 Etude des racines des polynômes H_p $(1 \leq p \leq n)$.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$.

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) e^{-t^2} dt = \langle H_p, 1 \rangle \overset{1 \in \mathbb{R}_{p-1}[X]}{=} 0 ;$$

Si $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}$ car elle est continue et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$.

Clairement $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ n'est pas la fonction nulle, alors $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}$.

$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $H_p(t_1) e^{-t_1^2} > 0$ et $H_p(t_2) e^{-t_2^2} < 0$.

H_p est continue sur $\mathbb{R}$, $H_p(t_1) > 0$ et $H_p(t_2) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe c dans l'intervalle ouvert défini par t_1 et t_2 tel que $H_p(c) = 0$.

H_p admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Si H_p n'admet que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}$, H_p garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas.

Alors H_p admet au moins une racine d d'ordre impair dans $\mathbb{R}$.

H_p s'annule en changeant de signe en d.

H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) $a_1, a_2, \dots, a_m$ sont en fait les racines d'ordre impair de H_p dans $\mathbb{R}$.
Alors $H_p P_m = H_p(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_m)$ n'a que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}$. Ainsi <u>$H_p P_m$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.</u>

Supposons $m < p$. Alors $\langle H_p, P_m \rangle = 0$ car $P_m \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = 0$.

Alors $t \mapsto H_p(t) P_m(t) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et

$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}, H_p(t) P_m(t) = 0$. $H_p P_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

ceci donne $H_p = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $P_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce qui n'est pas.

Par conséquent <u>$m = p$.</u>

c) P_m divise H_p ($a_1, \dots, a_m$ sont m racines de H_p deux à deux distinctes) et

$\deg P_m = p = \deg H_p$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $H_p = \lambda P_m = \lambda P_p$.

Comme H_p et P_p sont unitaires : <u>$H_p = P_p = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_p)$</u>

<u>H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.</u>

Q5 Relations entre les polynômes H_p ($2 \leq p \leq n$).

a) Supposons que $p \in [\![3, n]\!]$. Soit $\varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$.

$\langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t H_{p-1}(t) \varphi(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p-1}(t)\, t\varphi(t) e^{-t^2} dt = \langle H_{p-1}, X\varphi \rangle$.

Or $X\varphi \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$ donc $\langle H_{p-1}, X\varphi \rangle = 0$.

$\varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X] \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$. Alors $\langle H_p - X H_{p-1}, \varphi \rangle = \langle H_p, \varphi \rangle - \langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$.

<u>$\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$, $\langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$ et $\langle H_p - X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$ ceci pour tout $p \in [\![3, n]\!]$.</u>

Soit $p \in [\![2,n]\!]$

H_p et XH_{p-1} sont deux polynômes unitaires de degré p.

Ainsi $H_p - XH_{p-1}$ est un élément de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$\exists(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $\quad H_p - XH_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i H_i$.

Supposons $p \geqslant 3$

$\forall k \in [\![0, p-3]\!]$, $\langle H_p - XH_{p-1}, H_k \rangle = 0$ d'après ce qui précède.

$\forall k \in [\![0, p-3]\!]$, $0 = \langle \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i H_i, H_k \rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \langle H_i, H_k \rangle \underset{\uparrow}{=} \alpha_k \|H_k\|^2$

$\langle H_i, H_k \rangle = 0$ si $i \neq k$

$\forall k \in [\![0, p-3]\!]$, $\alpha_k \|H_k\|^2 = 0$ et $\|H_k\|^2 \neq 0$

$\forall k \in [\![0, p-3]\!]$, $\alpha_k = 0$.

Alors $\quad H_p - XH_{p-1} = \alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$

Notons que ceci vaut aussi pour $p = 2$ car $H_2 - XH_1 = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i H_i$.

Le coefficient de X^{p-1} dans $H_p - XH_{p-1}$ est : $0 - 0 = 0$

Le coefficient de X^{p-2} dans $H_p - XH_{p-1}$ est : $-\frac{p(p-1)}{4} - \left(-\frac{(p-1)(p-2)}{4}\right)$;

c'est à dire : $-\frac{p-1}{4}(p-(p-2)) = -\frac{p-1}{2}$.

$\uparrow$ coeff de X^{p-2} dans H_p $\qquad \uparrow$ coeff de X^{p-3} dans H_{p-1}.

Le coefficient de X^{p-1} dans $\alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$ est : α_{p-1}.

Le coefficient de X^{p-2} dans $\alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$ est : $\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} \times 0 = \alpha_{p-2}$.

Ainsi $\quad \alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} = -\frac{p-1}{2}$. $\quad H_p - XH_{p-1} = -\frac{p-1}{2} H_{p-2}$.

ceci suffit pour dire que : $\underline{\forall p \in [\![2,n]\!],\ 2H_p - 2XH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0}$.

b) Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Soit $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$. Soit S un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $S' = Q$.

Alors $S \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $\langle H'_p, Q \rangle = \langle H'_p, S' \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ Q3\,c)}}{=} \langle \Phi(H_p), S \rangle = 2p \langle H_p, S \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ S \in \mathbb{R}_{p-1}[X]}}{=} 0$

$\underline{\forall p \in [\![1,n]\!], \forall Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X], \langle H'_p, Q \rangle = 0.}$

Soit $p \in [\![1,n]\!]$. $\quad H'_p - pH_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$ (le coeff. de X^{p-1} dans H'_p est p) et

$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, $\langle H'_p - pH_{p-1}, Q \rangle = \langle H'_p, Q \rangle - p\langle H_{p-1}, Q \rangle = 0 - p \times 0 = 0$.

$H'_p - pH_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X] \cap \mathbb{R}_{p-2}[X]^\perp$. $\quad H'_p - pH_{p-1} = 0$. $\quad H'_p = pH_{p-1}$. Ceci vaut également pour $p = 1$. Alors $\underline{\forall p \in [\![1,n]\!],\ H'_p = pH_{p-1}}$.