R

EXERCICE 58

JFC

Exercice **Approximation discrète.**

$n \in \mathbb{N}$. f est une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $x_0, x_1, ..., x_p$ sont $p+1$ points deux à deux distincts de I. On se propose d'approximer f par une fonction polynômiale de degré au plus n. On cherche alors P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$h(P) = \sum_{k=0}^{p} (P(x_k) - f(x_k))^2 \quad \text{soit minimale.}$$

h est donc une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^+$ dont on cherche le minimum et les "points" où ce minimum est atteint.

Q1. On considère l'application ψ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ qui à P élément de $\mathbb{R}_p[X]$ associe

$$\psi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_p)).$$

a) Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

b) En déduire qu'il existe un élément P_f de $\mathbb{R}_p[X]$ et un seul tel que : $\forall k \in [\![0,p]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)$.

Q2. Dans cette question $n \geqslant p$.

a) Montrer que le minimum de h existe et en donner la valeur.

b) Trouver l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ sui réalisent le minimum de h (on distinguera deux cas, $n = p$ et $n > p$).

Q3. Désormais $n < p$. On pose : $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_p[X])^2,\ <P,Q> = \sum_{k=0}^{p} P(x_k)Q(x_k)$.

a) Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$. On notera $||.||$ la norme associée.

b) Montrer que pour tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$, $h(P) = ||P - P_f||^2$. Résoudre le problème initial en utilisant le cours.

Q1 a) • ψ est une application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_p[X] \times \mathbb{R}_p[X]$.

$\psi(\lambda P + Q) = ((\lambda P+Q)(x_0), (\lambda P+Q)(x_1), \ldots, (\lambda P+Q)(x_p))$.

$\psi(\lambda P+Q) = (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \lambda P(x_1) + Q(x_1), \ldots, \lambda P(x_p) + Q(x_p))$.

$\psi(\lambda P+Q) = \lambda (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_p)) + (Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_p))$.

$\psi(\lambda P+Q) = \lambda\, \psi(P) + \psi(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_p[X])^2,\ \psi(\lambda P + Q) = \lambda \psi(P) + \psi(Q)$. ψ est linéaire.

• Soit $P \in \operatorname{Ker} \psi$. $\psi(P) = 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$ donc $P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_p) = 0$.

Alors $x_0, x_1, \ldots, x_p$ sont $p+1$ racines distinctes de P qui est de degré au plus p. Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_p[X]}$.

$\operatorname{Ker} \psi = \{0_{\mathbb{R}_p[X]}\}$. ψ est injective.

ψ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ et $\dim \mathbb{R}_p[X] = p+1 = \dim \mathbb{R}^{p+1} < +\infty$

Alors ψ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$. Finalement :

ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

$\forall k \in [\![0,p]\!],\ P(x_k) = f(x_k)$

$\Updownarrow$

$(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_p)) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_p))$.

$\Updownarrow$

$\psi(P) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_p))$.

Or $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_p)) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et ψ est une bijection de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$. Alors il existe un unique élément P_f de $\mathbb{R}_p[X]$ tel que $\psi(P_f) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_p))$.

Ainsi il existe un élément P_f de $\mathbb{R}_p[X]$ et un seul tel que $\forall k \in [\![0,p]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)$.

Q2 Ici $n \geqslant p$.

a) $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ (car $n \geqslant p$) et $h(P_f) = \sum_{k=0}^{p} (\underbrace{P_f(x_k) - f(x_k)}_{=0})^2 = 0$.

Donc $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ h(P_f) = 0 \leqslant \sum_{k=0}^{p} (P(x_k) - f(x_k))^2 = h(P)$.

Ainsi $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} h(P)$ existe et vaut 0. De plus P_f réalise ce minimum.

---

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

P réalise le minimum de h

$\Updownarrow$

$h(P) = 0$

$\Updownarrow$

$\sum_{k=0}^{p} (P(x_k) - f(x_k))^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\forall k \in [\![0,p]\!],\ (P(x_k) - f(x_k))^2 = 0$.

$\Updownarrow$

$\forall k \in [\![0,p]\!],\ P(x_k) - f(x_k) = 0$

$\Updownarrow$

$\forall k \in [\![0,p]\!],\ P(x_k) - P_f(x_k) = 0$

$\Updownarrow$

$x_0, x_1, \dots, x_p$ sont des racines de $P - P_f$.

1er cas. – $n = p$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_p[X]$

$h(P) = 0 \iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(x_k) - P_f(x_k) = 0 \iff \forall k \in [\![0,p]\!],\ P(x_k) = P_f(x_k)$.

$h(P) = 0 \iff \forall k \in [\![0,p]\!],\ P(x_k) = f(x_k) \overset{\text{Q1 b)}}{\iff} P = P_f$.

R.

Si $n=p$, P_f est l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui réalise le minimum de h.

2ième cas.. $n>p$. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Notons que $P-P_f\in\mathbb{R}_n[X]$.

$h(P)=0 \Leftrightarrow$ $x_0,x_1,\dots,x_p$ sont des racines de $P-P_f$

$h(P)=0 \Leftrightarrow (X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_p)$ divise $P-P_f$

$h(P)=0 \Leftrightarrow \exists\, Q\in\mathbb{R}_{n-(p+1)}[X],\quad P-P_f=(X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_p)\,Q$.

$h(P)=0 \Leftrightarrow \exists\, Q\in\mathbb{R}_{n-(p+1)}[X],\ P=P_f+(X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_p)\,Q$.

Si $n>p$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui réalisent le minimum de h est:

$$\{P_f+(X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_p)\,Q\ ;\ Q\in\mathbb{R}_{n-(p+1)}[X]\}.$$

Q3 a) • $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une application de $\mathbb{R}_p[X]\times\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(P,Q,R)\in(\mathbb{R}_p[X])^3$.

$\langle P,\lambda Q+R\rangle=\sum_{k=0}^{p}P(x_k)(\lambda Q+R)(x_k)=\sum_{k=0}^{p}P(x_k)(\lambda Q(x_k)+R(x_k))$.

$\langle P,\lambda Q+R\rangle=\sum_{k=0}^{p}(\lambda P(x_k)Q(x_k)+P(x_k)R(x_k))=\lambda\sum_{k=0}^{p}P(x_k)Q(x_k)+\sum_{k=0}^{p}P(x_k)R(x_k)$.

$\langle P,\lambda Q+R\rangle=\lambda\langle P,Q\rangle+\langle P,R\rangle$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q,R)\in(\mathbb{R}_p[X])^3,\ \langle P,\lambda Q+R\rangle=\lambda\langle P,Q\rangle+\langle P,R\rangle$.

• Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}_p[X])^2$. $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{p}P(x_k)Q(x_k)=\sum_{k=0}^{p}Q(x_k)P(x_k)=\langle Q,P\rangle$.

$\forall(P,Q)\in(\mathbb{R}_p[X])^2,\ \langle P,Q\rangle=\langle Q,P\rangle$.

• $\forall P\in\mathbb{R}_p[X],\ \langle P,P\rangle=\sum_{k=0}^{p}P(x_k)P(x_k)=\sum_{k=0}^{p}(P(x_k))^2\geq 0$. $\forall P\in\mathbb{R}_p[X],\ \langle P,P\rangle\geq 0$.

• Soit $P\in\mathbb{R}_p[X]$ tel que $\langle P,P\rangle=0$. $\sum_{k=0}^{p}(P(x_k))^2\geq 0$.

Comme $\forall k\in[\![0,p]\!],\ (P(x_k))^2\geq 0$: $\forall k\in[\![0,p]\!],\ (P(x_k))^2=0$.

donc $\forall k\in[\![0,p]\!],\ P(x_k)=0$.

$P\in\mathbb{R}_p[X]$ et P admet au moins $p+1$ racines distinctes donc $P=0_{\mathbb{R}_p[X]}$.

$\forall P\in\mathbb{R}_p[X],\ \langle P,P\rangle=0\Rightarrow P=0_{\mathbb{R}_p[X]}$.

ceci achève de montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $h(P) = \sum_{k=0}^{p} (P(u_k) - f(u_k))^2 = \sum_{\ell=0}^{p} (P(u_\ell) - P_f(u_\ell))^2 = \sum_{\ell=0}^{p} ((P - P_f)(u_\ell))^2 = \|P - P_f\|^2$

donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $h(P) = \|P - P_f\|^2$.

$\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} h(P)$ existe $\Leftrightarrow$ $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - P_f\|^2$ existe $\Leftrightarrow$ $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - P_f\|$ existe $\Leftrightarrow$ $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P_f - P\|$ existe.

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}_p[X], \langle \cdot,\cdot \rangle)$ & $P_f \in \mathbb{R}_p[X]$.
Le théorème de meilleure approximation indique que $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P_f - P\|$ existe et que la projection orthogonale de P_f sur $\mathbb{R}_n[X]$ est l'unique élément qui réalise ce minimum.

Ainsi $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} h(P)$ existe et la projection orthogonale de P_f sur $\mathbb{R}_n[X]$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui réalise ce minimum.

Exercice Exercice d'oral HEC 2007

Bon exercice d'entraînement

Q1. Définition et propriétés d'un produit scalaire.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique (noté $< .,. >$) et de la norme euclidienne associée (notée $\|.\|$).

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.

Q2. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< g(x), g(y) >$.

Q3. On suppose, pour cette question seulement, que l'application f est bijective.

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $g = u \circ f$.

Montrer de plus que, pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Q4. On ne suppose plus nécessairement que f est bijective.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$ (*JF : mouais ?*).

Montrer qu'il existe une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ d'éléments de E telle que, pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $f_i = f(e_i)$.

Montrer que la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ définie, pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, par $g_i = g(e_i)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

c) Justifier que les familles $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ peuvent être complétées en des bases orthonormées

$\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ respectivement, de E.

Soit u l'endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(f_i) = g_i$.

d) Montrer que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ et que $g = u \circ f$.

e) L'endomorphisme u ainsi défini est-il unique ? *JF Hum, la réponse est oui ! Il faut comprendre : u est-il le seul endomorphisme de E vérifiant les deux qualités du d) ?*

Q1 Voir le cours.

Q2 Soit $(x,y) \in E^2$.

$<f(x), f(y)> = \frac{1}{2}\left[\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right]$ (identité de polarisation).

$<f(x), f(y)> = \frac{1}{2}\left[\|g(x+y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|g(x)+g(y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2\right]$

$<f(x), f(y)> = <g(x), g(y)>$ et ceci pour tout $(x,y) \in E^2$.

Q3 Montrons ce résultat par analyse - synthèse.

- Analyse - Unicité. Supposons que u soit un endomorphisme de E tel que $g = u \circ f$. Comme f est bijective : $u = g \circ f^{-1}$ d'où l'unicité.
- Synthèse - Existence. Posons $u = g \circ f^{-1}$. Alors $g = u \circ f$. De plus g et f^{-1} sont deux endomorphismes de E donc u est un endomorphisme de E par

composition. ce qui achève de montrer l'existence d'un unique endomorphisme u de E tel que $g = u \circ f$.

$\exists!\, u \in \mathcal{L}(E),\ g = u \circ f$.

Soit $x \in E$. $\exists!\, t \in E$, $x = f(t)$ car f est bijective.

$\|u(x)\| = \|u(f(t))\| = \|g(t)\| = \|f(t)\| = \|x\|$.

$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Q4 a) Soit $x \in E$.

$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|g(x)\| = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} g$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) Notons qu'implicitement on suppose que $\operatorname{Im} f \neq \{0_E\}$. Nous traiterons le cas où $\operatorname{Im} f = \{0_E\}$ à la fin.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $f_i \in \operatorname{Im} f$ donc $\forall i \in [\![1,r]\!]\ \exists e_i \in E$, $f(e_i) = f_i$.

Il existe une famille $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ d'éléments de E telle que : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $f(e_i) = f_i$.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $g_i = g(e_i)$ donc $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une famille d'éléments de $\operatorname{Im} g$.

$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $\langle g_i, g_j \rangle = \langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une famille orthonormée de $\operatorname{Im} g$. c'est donc une famille libre.

$\dim \operatorname{Im} g = \dim E - \dim \operatorname{Ker} g = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = r$.

Alors $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une famille libre de cardinal r de $\operatorname{Im} g$ qui est de dimension r.

Ainsi $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de $\operatorname{Im} g$.

mieux $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

c) $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ et $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ étant deux familles orthonormées de E on peut les compléter en des bases orthonormées de E.

d) Soit $x\in E$. $\exists!(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $x=\sum_{i=1}^{n}x_i f_i$. $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ car $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ est une base orthonormée de E.

$u(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\, u(f_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i g_i$ donc $\|u(x)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ car $(g_1,g_2,\dots,g_n)$ est une base orthonormée de E.

Ainsi $\underline{\|u(x)\|=\|x\| \text{ et ceci pour tout } x \text{ dans } E}$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(u\circ f)(e_i)=u(f(e_i))=u(f_i)=g_i=g(e_i)$.

$u\circ f$ et g sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E.

Alors $\underline{g=u\circ f}$.

Remarque. Traitons le cas où $\mathrm{Im}\, f=\{0_E\}$. Supposons $\mathrm{Im}\, f=\{0_E\}$. Alors $f=0_{\mathcal{L}(E)}$.

donc $\mathrm{Ker}\, f=E$. Alors $\mathrm{Ker}\, g=E$ et $g=0_{\mathcal{L}(E)}$. Posons $u=\mathrm{Id}_E$ et $\hat{u}=-\mathrm{Id}_E$.

Alors $\forall x\in E$, $\|u(x)\|=\|x\|$ et $\|\hat{u}(x)\|=\|x\|$. De plus $g=u\circ f$ et $g=\hat{u}\circ f$.

Donc le résultat précédent vaut encore.

Ainsi $\underline{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont deux endomorphismes de } E \text{ tels que } \forall x\in E,\ \|f(x)\|=\|g(x)\|,\ \text{il existe}}$ $\underline{\text{un endomorphisme } u \text{ de } E \text{ tel que : } g=u\circ f \text{ et } \forall x\in E,\ \|u(x)\|=\|x\|.}$

e) $\underline{1^{er}\text{ cas}}$ f est bijective. Nous avons montré dans Q3 l'unicité de u.

$\underline{2^e\text{ cas}}$ f n'est pas bijective. a) $f=0_{\mathcal{L}(E)}$. La remarque précédente montre que u n'est pas unique car Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ conviennent.

b) $f\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $0<r<n$. $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\dots,f_{n-1},f_n)$ est encore une base orthonormée qui complète la famille orthonormée $(f_1,f_2,\dots,f_r)$. Alors l'endomorphisme $\hat{u}$ de E défini par $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\hat{u}(f_k)=g_k$ et $\hat{u}(-f_n)=g_n$ vérifie encore : $g=\hat{u}\circ f$ et $\forall x\in E$, $\|\hat{u}(x)\|=\|x\|$.

De plus $\hat{u}\neq u$ car $\hat{u}(f_n)=-g_n$, $u(f_n)=g_n$ et $g_n\neq 0_E$.

Finalement $\underline{u \text{ est unique si et seulement si } f \text{ est bijective.}}$

EXERCICE 40

JFC

Exercice n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall (P,Q)\in E^2,\ \varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Justifier la définition de φ et montrer que c'est un produit scalaire sur E.
Q2. Montrer que : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ \exists!\, T_k\in E,\ \forall x\in\mathbb{R},\ T_k(\cos x)=\cos kx$.
Q3. Montrer que $(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
Q4. Montrer que T_n admet n zéros dans $]-1,1[$. Nous noterons $x_0,\ x_1,\ \dots,x_{n-1}$ ces zéros ($1>x_0>x_1>\cdots>x_{n-1}>-1$).
Q5. Montrer que si P est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P(x_k).$$

Montrer que ceci vaut encore pour P élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (on pourra diviser P par T_n).

Q1 • Soit $(P,Q)\in E^2$. Posons $M=\max_{t\in[-1,1]}|P(t)Q(t)|$ ($|PQ|$ est continue sur le segment $[-1,1]$).

Notons que $h : t\mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$\forall t\in[0,1[,\ 0\leqslant |h(t)|\leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant \dfrac{M}{(1-t)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1-t)^{1/2}}$ converge ($1/2<1$) ;

alors $\displaystyle\int_0^1|h(t)|dt$ converge.

$\forall t\in]-1,0],\ 0\leqslant |h(t)|\leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant \dfrac{M}{(1+t)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{dt}{(1+t)^{1/2}}$ converge ($1/2<1$) ;

alors $\displaystyle\int_{-1}^0|h(t)|dt$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_{-1}^1|h(t)|dt$ converge ; $\displaystyle\int_{-1}^1 h(t)dt$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout élément (P,Q) de $\mathbb{R}_n[X]^2$, $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ existe.

• Montrons que φ est un produit scalaire sur E.
Soit $(P,Q,R)\in E^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

toutes les intégrales convergent

$\rightarrow \varphi(\lambda P+Q,R)=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{(\lambda P+Q)(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^1\frac{\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\lambda\int_{-1}^1\frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int_{-1}^1\frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Alors $\varphi(\lambda P+Q,R)=\lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$.

$\rightarrow \varphi(Q,P)=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\varphi(P,Q)$.

$\rightarrow$ + $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ donc $\varphi(P,P) \geq 0$.

+ Supposons $\varphi(P,P)=0$. Alors $t \mapsto \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$ et

$\int_{-1}^{1} \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$. Alors $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$. $\forall t \in]-1,1[$, $P(t)=0$.

P admet une infinité de zéros ; $P = 0_E$. Ceci achève de prouver que

<u>φ est un produit scalaire sur E.</u>

Q2 Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos kx = \mathrm{Re}\left[e^{ikx}\right] = \mathrm{Re}\left[(\cos x + i \sin x)^k\right] = \mathrm{Re}\left(\sum_{r=0}^{k} C_k^r (\cos x)^{k-r} (i \sin x)^r\right)$$

$$\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{0 \leq 2r \leq k} C_k^{2r} (\cos x)^{k-2r} (i)^{2r} (\sin x)^{2r} + \sum_{0 \leq 2r+1 \leq k} C_k^{2r+1} (\cos x)^{k-(2r+1)} i^{2r+1} (\sin x)^{2r+1}\right)$$

$$\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{r=0}^{E(k/2)} C_k^{2r} (\cos x)^{k-2r} (-1)^r (1-\cos^2 x)^r + i \sum_{r=0}^{E(\frac{k-1}{2})} C_k^{2r+1} (\cos x)^{k-(2r+1)} (-1)^r (\sin x)^{2r+1}\right)$$

Alors $\cos(kx) = \sum_{r=0}^{E(k/2)} C_k^{2r} (\cos x)^{k-2r} (\cos^2 x - 1)^r$.

Posons $T_k = \sum_{r=0}^{E(k/2)} C_k^{2r} X^{k-2r} (X^2-1)^r$. $T_k \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg T_k \leq k \leq n$, $T_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

$\exists T_k \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$. Montrons l'unicité de T_k. Soit $\hat{T}_k$ une seconde solution.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(T_k - \hat{T}_k)(\cos x) = \cos(kx) - \cos(kx) = 0$, $\forall y \in [-1,1]$, $(T_k - \hat{T}_k)(y) = 0$.

$T_k - \hat{T}_k$ admet une ∞ de racines, $T_k - \hat{T}_k = 0_E$. $\hat{T}_k = T_k$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\exists !\, T_k \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

Remarque.. $\deg T_k \leq k$ et le coefficient de X^k dans T_k est $\sum_{r=0}^{E(k/2)} C_k^{2r} > 0$. $\left(\sum_{r=0}^{E(k/2)} C_k^{2r} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 2^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}\right)$

$\deg T_k = k$. Il est également clair que T_k a la parité de k.

Notons encore que $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2-1$ et $T_3 = 4X^3-3X$ (formules de trigo. classiques) !

Q3) Soit $(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2$.

Soit $(A,B)\in\,]-1,1[^2$.

$$\int_A^B \frac{T_k(t)\,T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{t=\cos u}{=} \int_{\operatorname{Arccos} A}^{\operatorname{Arccos} B} \frac{T_k(\cos u)\,T_\ell(\cos u)}{\sqrt{1-\cos^2 u}}\,(-\sin u\,du) = \int_{\operatorname{Arccos} B}^{\operatorname{Arccos} A}\frac{\cos(ku)\cos(\ell u)}{|\sin u|}\sin u\,du$$

Arccos prend ses valeurs dans $[0,\pi]$ et sin est positif sur $[0,\pi]$ donc.

$$\int_A^B \frac{T_k(t)\,T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\operatorname{Arccos} B}^{\operatorname{Arccos} A}\cos(ku)\cos(\ell u)\,du \,.\quad \lim_{A\to -1}\operatorname{Arccos} A = \pi \text{ et } \lim_{B\to 1}\operatorname{Arccos} B = 0$$

Ainsi $\varphi(T_k,T_\ell) = \int_0^\pi \cos(ku)\cos(\ell u)\,du$.

<u>Remarque</u> : Plus généralement : $\forall (P,Q)\in E^2,\ \varphi(P,Q) = \int_0^\pi P(\cos u)\,Q(\cos u)\,du$.

$$\varphi(T_k,T_\ell) = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos((k+\ell)u)+\cos((k-\ell)u)\right)du$$

Supposons $k\neq\ell$; alors $\varphi(T_k,T_\ell) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k+\ell)u)}{k+\ell}+\frac{\sin((k-\ell)u)}{k-\ell}\right]_0^\pi = 0$.

Supposons $k=\ell$. $\varphi(T_k,T_\ell) = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos(2ku)+1\right)du$.

- Si $k=\ell=0$ $\varphi(T_k,T_\ell) = \int_0^\pi du = \pi$.
- Si $k=\ell\neq 0$ $\varphi(T_k,T_\ell) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2ku)}{2k}+u\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

Finalement $\forall (k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2$, $\varphi(T_k,T_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq\ell \\ \pi & \text{si } k=\ell=0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k=\ell\neq 0 \end{cases}$

$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale de E et $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $T_k\neq 0$. Alors $(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale et libre de $n+1$ éléments de E et $\dim E = n+1$

Ainsi : <u>$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une base orthogonale de E.</u>

(Q4) Soit $x \in]-1,1[$. $\exists ! \theta \in]0,\pi[$, $x = \cos\theta$

$T_n(x)=0 \Leftrightarrow T_n(\cos\theta)=0 \Leftrightarrow \cos(n\theta)=0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$.

Rappelons que $\theta \in]0,\pi[$.

Ainsi $T_n(x)=0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$.

Posons donc $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $x_k = \cos\theta_k$.

→ $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $T_n(x_k) = \cos(n\theta_k) = 0$

→ $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \pi$ donc $1 > \cos\theta_0 > \cos\theta_1 > \dots > \cos\theta_{n-1} > -1$ car cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Alors $1 > x_0 > \dots > x_{n-1} > -1$

Finalement $\underline{T_n \text{ admet exactement } n \text{ zéros dans }]-1,1[}$.

__Remarque__ : $\deg T_n = n$. Donc $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont __LES__ n zéros de T_n.

(Q5) __Etape 1__ : Montrons cette formule pour $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$.

Soit $\ell \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \varphi(T_\ell,1) = \varphi(T_\ell,T_0) = \begin{cases} \pi & \text{si } \ell=0 \quad (\varphi(T_0,T_0)=\pi) \\ 0 & \text{si } \ell \neq 0 \end{cases}$$

Posons $S_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} T_\ell(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} T_\ell(\cos\theta_k)$

$$S_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\ell\theta_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\ell\frac{\pi}{2n} + \ell k\frac{\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\ell\frac{\pi}{2n} + \ell k \frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

$$S_\ell = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\ell\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\ell\pi}{n}}\right)^k\right)$$

__1er cas__ : $\ell=0$. $S_\ell = \mathrm{Re}\left(1 \times \sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = n$; $\frac{\pi}{n} S_\ell = \pi = \int_{-1}^{1}\frac{T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

__2e cas__ : $\ell \in [\![1,n-1]\!]$. $S_\ell = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\ell\pi}{2n}}\left(\frac{1-\left(e^{i\frac{\ell\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{\ell\pi}{n}}}\right)\right)$ car $e^{i\frac{\ell\pi}{n}} \neq 1$

$$S_\ell = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{\ell\pi}{2n}} \times e^{i\frac{\ell\pi}{2}}}{e^{i\frac{\ell\pi}{2n}}} \times \frac{e^{-i\frac{\ell\pi}{2}} - e^{i\frac{\ell\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\ell\pi}{2n}} - e^{i\frac{\ell\pi}{2n}}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\ell\frac{\pi}{2}} \frac{-2i\sin(\ell\pi/2)}{-2i\sin(\ell\pi/2n)}\right)$$

$$S_\ell = \mathrm{Re}\left(e^{i\ell\pi/2}\, \frac{\sin(\ell\pi/2)}{\sin(\ell\pi/2n)} \right) = \mathrm{Re}\left(i^\ell\, \frac{\sin(\ell\pi/2)}{\sin(\ell\pi/2n)} \right)$$

Si ℓ est pair $\sin(\ell\pi/2) = 0$ et $S_\ell = 0$.

Si ℓ est impair : $i^\ell \dfrac{\sin(\ell\pi/2)}{\sin(\ell\pi/2n)}$ est un imaginaire pur donc sa partie réelle est nulle.

Dans les deux cas $S_\ell = 0$. Ainsi $\dfrac{\pi}{n} S_\ell = 0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

<u>Conclusion</u>. $\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\ell(x_k)$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (famille orthogonale de n éléments non nuls de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n).

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $P = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell T_\ell$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \int_{-1}^{1} \frac{T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\alpha_\ell\, \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\ell(x_k)\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell T_\ell(x_k)}_{P(x_k)}$$

Ainsi $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. $\exists! (Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $P = QT_n + R$ avec $\deg R < \deg T_n = n$.

$\deg(QT_n) = \deg(P - R) \leq 2n-1$; $\deg Q + \deg T_n \leq 2n-1$; $\deg Q \leq n-1$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \varphi(Q, T_n) + \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_k)$$

$Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ et $T_n \in (\mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_{n-1}))^\perp$ donc $\varphi(Q, T_n) = 0$.

Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(P(x_k) - \underbrace{Q(x_k)T_n(x_k)}_{=0}\Big) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k)$.

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k)$.

EXERCICE 61

Exercice $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de l'espace vectoriel euclidien E. f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y >$

ii) $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E.

iii) $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$

(on pourra se rappeler qu'il est possible d'exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme).

Q2. Dans toute la suite f vérifie i). Montrer que f est un automorphisme de E et que f^{-1} vérifie également i).

Q3. $g = f - Id_E$. Montrer que $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Q4. $\forall n \in N^*,\ f_n = \dfrac{1}{n}\left(Id_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$.

a) Calculer $f_n(y)$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et y dans $\ker g$.

b) Si z est dans $\operatorname{Im} g$, montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n(z)\| = 0$.

c) Déduire de ce qui précède que, pour tout élément x de E, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n \geqslant 1}$ converge dans E vers un élément que nous noterons $\ell(x)$. Que dire de l'application ℓ ?

Q1 i) ⇒ ii). $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \|f(e_i)\| = \sqrt{\langle f(e_i), f(e_i)\rangle} = 1$.

Ainsi $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une famille orthonormale de n vecteurs de E et E est de dimension n ; $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E (ua !)

ii) ⇒ iii) Soit $x \in E$. $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E donc $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

$(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ ———————— $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

donc $\|f(x)\| = \|x\|$.

iii) ⇒ i). Soit $(x,y) \in E^2$.

$\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left[\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right]$.

$\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \langle x, y\rangle$.

Finalement : i) ⇒ ii) ⇒ iii) ⇒ i) ; i) ⇔ ii) ⇔ iii).

<u>Exercice</u>.- Montrer que si f est une application de E dans E vérifiant i) alors f est linéaire.

Q2 * $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))\rangle = \langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\rangle$.

Donc $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = \langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\rangle$ et <u>f^{-1} vérifie i)</u>.

* f est un automorphisme car f est injective et $\dim E < +\infty$ ($x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$!)

Q3) Notons d'abord que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont orthogonaux.

Soit $x \in \operatorname{Ker} g$ et $y \in \operatorname{Im} g$. $\exists t \in E,\ y = g(t) = f(t) - t$.

$g(x) = 0_E$ donc $f(x) = x$.

Ainsi $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(t) - t\rangle = \langle f(x), f(t)\rangle - \langle f(x), t\rangle \underset{f \text{ vérifie } i)}{=} \langle x, t\rangle - \langle f(x), t\rangle \underset{f(x)=x}{=} \langle x,t\rangle - \langle x,t\rangle = 0$

$\forall x \in \operatorname{Ker} g,\ \forall y \in \operatorname{Im} g,\ \langle x,y\rangle = 0$. $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont donc orthogonaux.

En particulier $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0_E\}$. Or $\dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim E$; ceci achève alors de prouver que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Ainsi <u>$\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires et orthogonaux.</u>

Q4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $y \in \operatorname{Ker} g$. $f(y) = y$. Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(y) = y$.

Donc $f_n(y) = \frac{1}{n}\left[y + f(y) + f^2(y) + \dots + f^{n-1}(y)\right] = \frac{1}{n}(y + \dots + y) = y$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \in \operatorname{Ker} g,\ f_n(y) = y$.</u>

b) Soit $z \in \operatorname{Im} g$. $\exists t \in E,\ z = f(t) - t = (f - \mathrm{Id}_E)(t)$

$f_n(z) = \frac{1}{n}\left[(\mathrm{Id}_E + f + \dots + f^{n-1}) \circ (f - \mathrm{Id}_E)\right](t) = \frac{1}{n}\left[(f^n - \mathrm{Id}_E)(t)\right]$

$f_n(z) = \frac{1}{n}(f^n(t) - t)$; $\|f_n(z)\| = \frac{1}{n}\|f^n(t) - t\| \leq \frac{1}{n}\left[\|f^n(t)\| + \|t\|\right]$.

Or $\|f(t)\| \underset{(iii)}{=} \|t\|$; $\|f^2(t)\| = \|f(f(t))\| \underset{(iii)}{=} \|f(t)\| = \|t\|$. Une récurrence simple donne alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ \|f^k(t)\| = \|t\|$.

Ainsi $\|f_n(z)\| \leq \frac{1}{n}\left[\|t\| + \|t\|\right] = \frac{2}{n}\|t\|$. Par encadrement il vient alors :

<u>$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(z)\| = 0$</u> ... ce qui signifie encore : $\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = 0_E$.

c) Soit $x \in E$. $\exists (y,z) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Im} g,\ x = y + z$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = f_n(y) + f_n(z) = y + f_n(z)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) - y = f_n(z)$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(f_n(x) - y) = 0$; <u>$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = y$.</u>

Notons p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} g$ (et rappelons que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g^{\perp}$).

Pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = p(x)$. La suite (f_n) converge donc vers p ici !

EXERCICE

Exercice

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne de x.

Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.
   b) Montrer que $[\mathrm{Im}(A)]^\perp \subset \mathrm{Ker}({}^tA)$.
   c) En déduire que $\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

2. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer le noyau de ${}^tA$.

   b) Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.

On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Déterminer la matrice B associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

   c) Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A.

   d) Calculer BA. Que constatez-vous ?

3. Reprendre la construction et les calculs précédents pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

__Remarques__ 1.. Nous nous conformerons au texte et établirons toutes les conclusions

2.. Nous traiterons le cas général (Q3) avant de faire un résumé des résultats de Q2 !

3.. Nous expédions Q1 en une levée.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}^p$.

$x \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^p,\ \langle x, Ay \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^p,\ {}^t(Ay)x = 0$

$x \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^p,\ {}^ty\,{}^tAx = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^p,\ \langle y, {}^tAx \rangle = 0 \Leftrightarrow {}^tAx \in (\mathbb{R}^p)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.

$x \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp \Leftrightarrow {}^tAx = 0_{\mathbb{R}^p} \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, {}^tA$.

Ainsi $\underline{\underline{(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\, {}^tA}}$. Alors $((\mathrm{Im}\, A)^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp$. $\underline{\underline{\mathrm{Im}\, A = (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp}}$.

De même $\underline{(\mathrm{Im}\, {}^tA)^\perp = \mathrm{Ker}\, A}$ et $\underline{\mathrm{Im}\, {}^tA = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp}$.

(Q3) (*) Notons que : $\forall x\in\mathbb{R}^p,\ \exists!\,(x',x'')\in \mathrm{Ker}\,{}^tA\times \mathrm{Im}\,{}^tA,\ x=x'+Ax''$.

• <u>Existence</u>.. Soit $x\in\mathbb{R}^p$. $\exists!\,(x',y)\in \mathrm{Ker}\,{}^tA\times \mathrm{Im}\,A,\ x=x'+y$ car $\mathrm{Im}\,A=(\mathrm{Ker}\,{}^tA)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\,{}^tA$ sont supplémentaires.

$\exists t\in\mathbb{R}^p,\ y=At$. Or $\mathbb{R}^p=\mathrm{Ker}\,A\oplus(\mathrm{Ker}\,A)^\perp=\mathrm{Ker}\,A\oplus \mathrm{Im}\,{}^tA$ — on applique Q1 à ${}^tA$ et on obtient $(\mathrm{Ker}\,A)^\perp=\mathrm{Im}\,{}^tA$

Alors $\exists!\,(z,x'')\in \mathrm{Ker}\,A\times\mathrm{Im}\,{}^tA,\ t=z+x''$.

Finalement : $x=x'+At=x'+A(z+x'')\underset{Az=0 \text{ car } z\in \mathrm{Ker}\,A}{=}x'+Ax''$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}^p,\ \exists\,(x',x'')\in\mathrm{Ker}\,{}^tA\times\mathrm{Im}\,{}^tA,\ x=x'+Ax''$

. <u>Unicité</u>. Soit $x\in\mathbb{R}^p$. Supposons que $x=x'+Ax''=\hat{x}'+A\hat{x}''$ avec $(x',x'')\in\mathrm{Ker}\,{}^tA\times\mathrm{Im}\,{}^tA$ et $(\hat{x}',\hat{x}'')\in\mathrm{Ker}\,{}^tA\times\mathrm{Im}\,{}^tA$.

$x=x'+Ax''=\hat{x}'+A\hat{x}''$. Comme $\mathrm{Ker}\,{}^tA$ et $\mathrm{Im}\,{}^tA$ sont en somme directe puisqu'ils sont supplémentaires : $x'=\hat{x}'$ et $Ax''=A\hat{x}''$.

Alors $A(x''-\hat{x}'')=0_{\mathbb{R}^p}$; $x''-\hat{x}''\in\mathrm{Ker}\,A$. Comme x'' et $\hat{x}''$ sont dans $\mathrm{Im}\,{}^tA$,

$x''-\hat{x}''\in\mathrm{Ker}\,A\cap\mathrm{Im}\,{}^tA=\mathrm{Ker}\,A\cap(\mathrm{Ker}\,A)^\perp=\{0_{\mathbb{R}^p}\}$; $x''-\hat{x}''=0_{\mathbb{R}^p}$.

Ainsi $x''=\hat{x}''$.
Finalement $x'=\hat{x}'$ et $x''=\hat{x}''$ d'où l'unicité.

<u>$\forall x\in\mathbb{R}^p,\ \exists!\,(x',x'')\in\mathrm{Ker}\,{}^tA\times\mathrm{Im}\,{}^tA,\ x=x'+Ax''$.</u>

(*) "$u : x\mapsto x''$" est linéaire.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^p$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\exists!\,(x',x'')\in\mathrm{Ker}\,{}^tA\times\mathrm{Im}\,{}^tA,\ x=x'+Ax''$ et

$\exists!\,(y',y'')\in\mathrm{Ker}\,{}^tA\times\mathrm{Im}\,{}^tA,\ y=y'+Ay''$.

$u(x)=x''$ et $u(y)=y''$.

$x+\lambda y = (x'+\lambda y') + A(x''+\lambda y'')$, $x'+\lambda y' \in \mathrm{Ker}\,{}^tA$ et $x''+\lambda y'' \in \mathrm{Im}\,{}^tA$.

Ainsi $(x+\lambda y)' = x'+\lambda y'$ et $(x+\lambda y)'' = x''+\lambda y''$. Cette dernière égalité montre que : $u(\lambda x+y) = \lambda u(x) + u(y)$.

Ainsi l'application " $u : x \mapsto x''$ " est un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$.

(*) AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A.

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. $\exists! (x', x'') \in \mathrm{Ker}\,{}^tA \times \mathrm{Im}\,{}^tA$, $x = x' + Ax''$

$x'' = Bx$. Notons également que $Ax'' \in \mathrm{Im}\,A$ et $x' \in \mathrm{Ker}\,{}^tA = (\mathrm{Im}\,A)^\perp$.

Donc Ax'' est la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Im}\,A$.

Ainsi ABx est la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Im}\,A$.

<u>AB est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,A$.</u>

(*) BA est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de ${}^tA$.

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. $\exists! (x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,A \times (\mathrm{Ker}\,A)^\perp$, $x = x_1 + x_2$

Notons que x_2 est la projection orthogonale de x sur $(\mathrm{Ker}\,A)^\perp = \mathrm{Im}\,{}^tA$

$Ax = Ax_1 + Ax_2 = Ax_2 = 0 + Ax_2$ avec $0 \in \mathrm{Ker}\,{}^tA$ et $x_2 \in \mathrm{Im}\,{}^tA$.

Ainsi $BAx = x_2$

<u>BA est la matrice de la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker}\,A)^\perp = \mathrm{Im}\,{}^tA$.</u>

Q3 Notons $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1/2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1/(p-1) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1/(p-1) \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_p) = \operatorname{Vect}(e_2, \frac{1}{2}e_3, \dots, \frac{1}{p-1}e_p) = \operatorname{Vect}(e_2, e_3, \dots, e_p)$.

$\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Vect}({}^tAe_1, {}^tAe_2, \dots, {}^tAe_p) = \operatorname{Vect}(e_1, \frac{1}{2}e_2, \dots, \frac{1}{p-1}e_{p-1}) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$.

Notons que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA = p-1$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} {}^tA = 1$.

Observons que $A(e_p) = 0$ et ${}^tAe_1 = 0$. Alors $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_p)$ et $\operatorname{Ker} {}^tA = \operatorname{Vect}(e_1)$.

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(e_2, e_3, \dots, e_p)$, $\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_p)$ et $\operatorname{Ker} {}^tA = \operatorname{Vect}(e_1)$.

<u>Remarque</u>.. Nous retrouvons $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} {}^tA$ et $(\operatorname{Im} {}^tA)^\perp = \operatorname{Ker} A$

Soit $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ un élément de $\mathbb{R}^p$.

$$x = x_1 e_1 + \sum_{k=2}^{p} x_k e_k = x_1 e_1 + \sum_{k=2}^{p} x_k (k-1) A e_{k-1} = x_1 e_1 + A\left(\sum_{k=1}^{p-1} k x_{k+1} e_k\right)$$

Or $x_1 e_1 \in \operatorname{Ker} {}^tA$ et $\sum_{k=1}^{p-1} k x_{k+1} e_k \in \operatorname{Im} {}^tA$.

Ainsi $\underline{u(x) = \sum_{k=1}^{p-1} k x_{k+1} e_k}$. Alors $\underline{\underline{u(e_1) = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2, p]\!], u(e_i) = (i-1)e_{i-1}}}$

Par conséquent $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & p-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

$ABe_1 = A0_{\mathbb{R}^p} = 0_{\mathbb{R}^p}$

$\forall i \in [\![2, p]\!]$, $ABe_i = (i-1)Ae_{i-1} = (i-1)\frac{1}{i-1}e_i$

$ABe_1 = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $ABe_i = e_i$. AB est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(e_2, \dots, e_p) = \operatorname{Im} A$, non?

$BAe_p = B0_{\mathbb{R}^p} = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $BAe_i = B(\frac{1}{i}e_{i+1}) = \frac{1}{i}Be_{i+1} = \frac{1}{i}ie_i = e_i$.

$\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $e_i = e_i$ et $BAe_p = 0_{\mathbb{R}^p}$. BA est bien la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} {}^tA$.

Exercice Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note E le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $< .,. >$ et de norme associée notée $||.||$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

On considère l'endomorphisme f de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

On note I la matrice carrée unité d'ordre n .

Étant donnés n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on pose $m = \text{Min}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et on suppose que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d(e_i) = a_i\, e_i$.

On note enfin g l'endomorphisme de E défini par $g = f + d$.

Q1 a) Montrer que le vecteur $w = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de f. A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer $\text{Im}\, f$ et en préciser une base orthonormée.

c) Prouver que $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E de base $\mathcal{B}' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$.

d) Justifier que $\text{Im}\, f = (\text{Ker}(f))^{\perp}$.

e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f, et que pour tout vecteur u de E, $||f(u)|| \leqslant n\, ||u||$.

Q2 a) Justifier que d est un automorphisme de E .

b) Montrer que pour tout u de E, $||d(u)|| \geqslant m\, ||u||$, et que pour tout v de E, $||d^{-1}(v)|| \leqslant \dfrac{1}{m}\, ||v||$.

c) Prouver que pour tout vecteur non nul u de E, $||f(u)|| < ||d(u)||$.

d) En déduire en étudiant $\text{Ker}(g)$ que l'endomorphisme g est un automorphisme de E .

Q3 Soit un vecteur v fixé de E. Il existe d'après le 2 d) un unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$.

On considère alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par : $u_0 = v$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = d^{-1}(v) - \big(d^{-1} \circ f\big)(u_k)$.

a) Vérifier que $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel k : $u_{k+1} - u = -\big(d^{-1} \circ f\big)(u_k - u)$.

c) En déduire que pour tout entier naturel k : $||u_{k+1} - u|| \leqslant \dfrac{n}{m}\, ||u_k - u||$. Montrer enfin que $\lim\limits_{k \to +\infty} ||u_k - u|| = 0$.

ESC 2003 - Exercice 2

Q1 a) ω n'est pas nul et $f(\omega)=f(\sum_{k=1}^{n} e_k)=\sum_{k=1}^{n} f(e_k)=\sum_{k=1}^{n}\omega=n\omega$.

Ainsi ω est un vecteur propre de f associé à la valeur propre n.

b) $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n))=\mathrm{Vect}(\omega)$.

(ω) est donc une base de $\mathrm{Im} f$. $\|\omega\|=\|e_1+\dots+e_n\|=\sqrt{n}$.

Alors $\frac{1}{\sqrt{n}}(e_1+e_2+\dots+e_n)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Im} f$.

c) $\dim \mathrm{Im} f=1$ donc $\dim \mathrm{Ker} f=\dim E-\dim \mathrm{Im} f=n-1$. $\dim \mathrm{Ker} f=n-1$.

$\forall i\in [\![2,n]\!]$, $f(e_i-e_1)=f(e_i)-f(e_1)=\omega-\omega=0_E$;

Ainsi $(e_2-e_1,e_3-e_1,\dots,e_n-e_1)$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Ker} f$ de cardinal $n-1$.

Pour montrer que cette famille est une base de $\mathrm{Ker} f$ il ne reste donc plus qu'à montrer qu'elle est libre.

Soit $(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\alpha_2(e_2-e_1)+\alpha_3(e_3-e_1)+\dots+\alpha_n(e_n-e_1)=0_E$.

$-(\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n=0$. Ainsi $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=0$ car $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est libre.

$\forall(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha_2(e_2-e_1)+\alpha_3(e_3-e_1)+\dots+\alpha_n(e_n-e_1)=0_E \Rightarrow \alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=0$.

$B'=(e_2-e_1,e_3-e_1,\dots,e_n-e_1)$ est une famille libre de cardinal $n-1$ d'éléments de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker} f$ est de dimension $n-1$.

Ainsi $B'=(e_2-e_1,e_3-e_1,\dots,e_n-e_1)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.

Soit $u=\sum_{k=1}^{n} x_ke_k$ un élément de E.

$u\in(\mathrm{Ker} f)^{\perp}\Leftrightarrow \forall k\in[\![2,n]\!]$, $\langle e_k-e_1,u\rangle=0$ ($(e_2-e_1,e_3-e_1,\dots,e_n-e_1)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$)

$u\in(\mathrm{Ker} f)^{\perp}\Leftrightarrow\forall k\in[\![2,n]\!]$, $x_k-x_1=0\Leftrightarrow\forall k\in[\![2,n]\!]$, $x_k=x_1\Leftrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n$.

$u \in (\mathrm{Ker} f)^{\perp} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(e_1+e_2+\dots+e_n) \Leftrightarrow u \in \mathrm{Im} f$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Im} f = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}}$.

(c) Posons $e'_1 = \frac{1}{\|w\|} w$. (e'_1) est une base orthonormale de $\mathrm{Im} f$.

Soit $(e'_2, e'_3, \dots, e'_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker} f$ (dim $\mathrm{Ker} f = n-1 \geq 1$!)

Comme $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires et orthogonaux, $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de E.

$f(e'_1) = n e'_1$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $f(e'_i) = 0_E$.

Ainsi $\underline{(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \text{ est une base orthonormale de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f}$.

Soit u un élément de E de coordonnées $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dans la base orthonormale $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

$\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x'^2_k}$. $f(u) = \sum_{k=1}^{n} x'_k f(e'_k) = x'_1 \times n e'_1$; $\|f(u)\| = \sqrt{n^2 x'^2_1}$

$\|f(u)\| = n\sqrt{x'^2_1} \leq n\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x'^2_k} = n\|u\|$.

Ainsi $\underline{\forall u \in E, \ \|f(u)\| \leq n\|u\|}$.

Q2 (a) $\mathrm{Im}\, d = \mathrm{Vect}(d(e_1), d(e_2), \dots, d(e_n)) = \mathrm{Vect}(a_1 e_1, a_2 e_2, \dots, a_n e_n) \overset{\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i \geq m > 0}{=} \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

$\mathrm{Im}\, d = E$ et $\dim E = n < +\infty$.

Ceci suffit alors pour dire que $\underline{d \text{ est un automorphisme de } E}$.

(b) Soit $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ un élément de E.

$\|d(u)\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} x_k d(e_k)\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 a_k^2 \geq m^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = m^2\|u\|^2$.

Ainsi $\underline{\forall u \in E, \ m\|u\| \leq \|d(u)\|}$.

$\forall u \in E,\ m\|u\| \leq \|d(u)\|$

Donc $\forall v \in E,\ m\|d^{-1}(v)\| \leq \|d(d^{-1}(v))\| = \|v\|$.

$\forall v \in E,\ \|d^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{m}\|v\|$.

(c) Soit u un élément non nul de E.

$\|f(u)\| \leq n\|u\| \underset{\uparrow}{<} m\|u\| \leq d(u)$. $\forall u \in E - \{0_E\},\ \|f(u)\| < \|d(u)\|$.

$\|u\|>0$ et $n<m$

(d) Soit u un élément de $\operatorname{Ker} g$. $g(u) = 0_E$; $f(u) + d(u) = 0_E$; $f(u) = -d(u)$

Alors $\|f(u)\| = \|-d(u)\| = \|d(u)\|$; ainsi $u = 0_E$ ($u \neq 0_E \Rightarrow \|f(u)\| < \|d(u)\|$).

Par conséquent $\operatorname{Ker} g = \{0_E\}$. Comme $g \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E < +\infty$:

g est un automorphisme de E.

Q3 (a) $g(u) = v$; $f(u) + d(u) = v$; $d^{-1}(f(u)) + u = d^{-1}(v)$; $u = d^{-1}(v) - d^{-1}(f(u))$.

$u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.

(b) $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u = d^{-1}(v) - (d^{-1}\circ f)(u_k) - d^{-1}(v) + (d^{-1}\circ f)(u) = -[(d^{-1}\circ f)(u_k) - (d^{-1}\circ f)(u)]$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u = -(d^{-1}\circ f)(u_k - u)$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. $\|u_{k+1} - u\| = \|-d^{-1}(f(u_k - u))\| = \|d^{-1}(f(u_k - u))\| \leq \frac{1}{m}\|f(u_k - u)\| \leq \frac{n}{m}\|u_k - u\|$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u_{k+1} - u\| \leq \frac{n}{m}\|u_k - u\|$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \|u_k - u\| \leq \left(\frac{n}{m}\right)^k \|u_0 - u\|$.

Comme $\left|\frac{n}{m}\right|^k < 1$: $\lim\limits_{k \to +\infty}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^k \|u_0 - u\|\right) = 0$.

Il vient alors par encadrement $\lim\limits_{k \to +\infty} \|u_k - u\| = 0$.

EXERCICE 64

Exercice E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. F est un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale de E sur F.

Q1. Si x est élément de E et si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$, on pose : $\sigma(x) = x_1 - x_2$.

a) Exprimer σ en fonction de p et Id_E.

b) Montrer que σ est un automorphisme involutif de E.

c) Montrer que : $\forall x \in E,\ ||\sigma(x)|| = ||x||$.

Q2. q est une seconde projection orthogonale de E sur un sous-espace G de E. On pose $\sigma' = 2q - Id_E$. Montrer que :

$$\forall u \in E,\ ||p(u) - q(u)|| \leqslant ||u||.$$

Q3. a et b sont deux vecteurs non nuls de E tels que : $||a - b|| = ||a|| + ||b||$.
Montrer que : $- < a, b >= ||a||\,||b||$. En déduire en s'inspirant de la démonstration de Cauchy-Schwarz qu'il existe un réel strictement positif λ tel que : $b = -\lambda a$.

Q4. On suppose qu'il exite un élément non nul u de E tel que : $||p(u) - q(u)|| = ||u||$.
Montrer que : $||\sigma(u) - \sigma'(u)|| = ||\sigma(u)|| + ||\sigma'(u)||$. En déduire que : $\sigma(u) = -\sigma'(u)$.
Prouver alors que : $F \cap G^{\perp} \neq \{0_E\}$ ou $F^{\perp} \cap G \neq \{0_E\}$.

Q.5.. Notez que si $\forall u \in E - \{0_E\}$, $||p(u) - q(u)|| < ||u||$ alors $\dim F = \dim G$.

(Q1) a) Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$, $x = x_1 + x_2$. $x_1 = p(x)$ donc $x_2 = x - p(x)$

Ainsi $\sigma(x) = x_1 - x_2 = p(x) - (x - p(x)) = 2p(x) - x$.

$\forall x \in E$, $\sigma(x) = 2p(x) - x$. $\underline{\sigma = 2p - Id_E}$

b) σ est un endomorphisme de E comme combinaison linéaire d'endomorphismes de E.

$\sigma^2 = (2p - Id_E)^2 \underset{\uparrow}{=} 4p^2 - 4p + Id_E = 4p - 4p + Id_E = Id_E$. $\underline{\sigma \circ \sigma = Id_E}$.

p et Id_E commutent

Ainsi σ est bijectif et $\sigma^{-1} = \sigma$.

Finalement $\underline{\sigma \text{ est un automorphisme involutif de } E}$.

<u>Remarque</u>.. <u>σ est la symétrie orthogonale par rapport à F.</u>

c) Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$, $x = x_1 + x_2$.

$||\sigma(x)||^2 = ||x_1 - x_2||^2 = ||(x_1) + (-x_2)||^2 \underset{\uparrow}{=} ||x_1||^2 + ||-x_2||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2 \underset{\uparrow}{=} ||x_1 + x_2||^2 = ||x||^2$.

x_1 et $-x_2$ sont orthogonaux $\qquad$ x_1 et x_2 sont orthogonaux

$\underline{\forall x \in E,\ ||\sigma(x)|| = ||x||}$. Ainsi σ est une isométrie vectorielle.

(Q2) $\forall u \in E$, $||p(u) - q(u)|| = ||\frac{1}{2}(\sigma(u) + u) - \frac{1}{2}(\sigma'(u) + u)|| = \frac{1}{2}||\sigma(u) - \sigma'(u)|| \leq \frac{1}{2}(||\sigma(u)|| + ||\sigma'(u)||)$

$\forall u \in E$, $||p(u) - q(u)|| \leq \frac{1}{2}[||u|| + ||u||] = ||u||$.

$\underline{\forall u \in E,\ ||p(u) - q(u)|| \leq ||u||}$.

(Q3) Supposons $(a,b)\in E^2$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ et $\|a-b\|=\|a\|+\|b\|$

$\|a-b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\|b\|$; $\|a\|^2-2\langle a,b\rangle+\|b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\|b\|$.

Ainsi $-\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|$.

Posons $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)=\|\alpha a+b\|^2$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)=\|\alpha a\|^2+2\langle\alpha a,b\rangle+\|b\|^2=\alpha^2\|a\|^2+2\langle a,b\rangle\alpha+\|b\|^2$

φ est un polynôme du second degré $(\|a\|^2\neq 0)$.

$\Delta'=(\langle a,b\rangle)^2-4\|a\|^2\|b\|^2=0$.

Ainsi $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha_0)=0$. $\|\lambda a+b\|^2=0$. $\lambda a+b=0$, $b=-\lambda a$.

De plus $0<\|a\|\|b\|=-\langle a,b\rangle=-\langle a,-\lambda a\rangle=\lambda\|a\|^2$; $\lambda\|a\|^2>0$.

Comme $\|a\|^2>0$: $\lambda>0$. $\underline{\underline{\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ b=-\lambda a.}}$

(Q4) Soit u un élément non nul de E tel que $\|p(u)-q(u)\|=\|u\|$

$\|\sigma(u)\|+\|\sigma'(u)\|=\|u\|+\|u\|=2\|u\|=\|2p(u)-2q(u)\|=\|(2p(u)-u)-(2q(u)-u)\|$

$\|\sigma(u)\|+\|\sigma'(u)\|=\|\sigma(u)-\sigma'(u)\|$. $\underline{\underline{\|\sigma(u)-\sigma'(u)\|=\|\sigma(u)\|+\|\sigma'(u)\|.}}$

$u\neq 0_E$ donc $\sigma(u)\neq 0_E$ et $\sigma'(u)\neq 0_E$ car σ et σ' sont injectifs.

La question 3 montre qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\sigma'(u)=-\lambda\sigma(u)$.

$\|u\|=\|\sigma'(u)\|=\|-\lambda\sigma(u)\|=|-\lambda|\|\sigma(u)\|\underset{\lambda\geq 0}{=}\lambda\|u\|$. Ainsi $\lambda=1$ car $\|u\|\neq 0$.

$\underline{\text{Donc } \sigma'(u)=-\sigma(u).}$

$\exists!(u_1,u_2)\in F\times F^\perp$, $u=u_1+u_2$. $u+\sigma(u)=u_1+u_2+u_1-u_2=2u_1\in F$

$u-\sigma(u)=u_1+u_2-u_1+u_2=2u_2\in F^\perp$

De même $u+\sigma'(u)\in G$ et $u-\sigma'(u)\in G^\perp$.

Supposons $u+\sigma(u)\neq 0$. $u+\sigma(u)=u-\sigma'(u)\in F\cap G^\perp$; $F\cap G^\perp\neq\{0_E\}$.

Supposons $u+\sigma(u)=0$; $\sigma(u)=-u$; $u_1-u_2=-u_1-u_2$; $2u_1=0$; $u_1=0$. $u=u_2\in F^\perp$.

Alors $\sigma'(u)=-\sigma(u)=u$. $\exists(v_1,v_2)\in G\times G^\perp$, $u=v_1+v_2$; $\sigma'(u)=u$ donne

$v_1-v_2=v_1+v_2$; $v_2=0_E$. $u=v_1\in G$. $u\in F^\perp\cap G$; $F^\perp\cap G\neq\{0_E\}$

(Q5) Supposons que : $\forall u\in E-\{0_E\}$, $\|p(u)-q(u)\|<\|u\|$. Alors $F^\perp\cap G=\{0_E\}$ et $F\cap G^\perp=\{0_E\}$.

$n\geq\dim(F^\perp+G)\underset{F^\perp\cap G=\{0_E\}}{=}\dim F^\perp+\dim G=n-\dim F+\dim G$; donc $\dim F\geq\dim G$

De même $F\cap G^\perp=\{0_E\}$ donne : $\dim G\geq\dim F$. Ainsi $\underline{\dim F=\dim G.}$

Exercice

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien $(E, <.,.>)$. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Q1 Vérifier que $A^2 = I_3$. Qu'en déduire pour f ?

Q2 a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base **orthonormée**.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle dont on donnera une base **orthonormée**.

b) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

c) En déduire que le peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q3 On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $f_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$.

a) En travaillant dans la base $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme ℓ de E tel que :

$$\forall u \in E, \ \lim_{n \to +\infty} \|f_n(u) - \ell(u)\| = 0.$$

b) Préciser la nature et les éléments de ℓ et en donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Q1 $A^2 = \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \end{pmatrix} = \frac12\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$. $\underline{A^2 = I_3}$.

Ainsi f est un endomorphisme de E tel que $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

<u>f est donc une symétrie vectorielle.</u>

Q2 a) Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément de E. On multiplie tout par $\sqrt2$.

$u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \iff f(u) = u \iff \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-\sqrt2)x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt2)y = 0 \\ \sqrt2 z - \sqrt2 z = 0 \end{cases}$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} (1-\sqrt2)x + y = 0 \quad (\text{ou } y = -(1-\sqrt2)x) \\ 0 = x - (1+\sqrt2)y = x + (1+\sqrt2)(1-\sqrt2)x = 0 \end{cases} \iff (1-\sqrt2)x + y = 0.$

<u>$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est l'hyperplan d'équation $(1-\sqrt2)x + y = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.</u>

$e_3 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $e_1 + (\sqrt2 - 1)e_2$ sont deux éléments de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

On voit facilement que la famille $(e_1 + (\sqrt2-1)e_2, e_3)$ est libre.

Comme $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = 2$: <u>$(e_1 + (\sqrt2-1)e_2, e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.</u>

$\langle e_1+(\sqrt{2}-1)e_2, e_3\rangle = 0$ donc les vecteurs $e_1+(\sqrt{2}-1)e_2$ et e_3 sont orthogonaux.

Ainsi $(e_1+(\sqrt{2}-1)e_2, e_3)$ est une base orthogonale de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.

$\|e_1+(\sqrt{2}-1)e_2\| = \sqrt{1^2+(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ et $\|e_3\|=1$. Alors :

$\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(e_1+(\sqrt{2}-1)e_2), e_3\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.

Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3$ un élément de E.

$$u\in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E) \iff f(u)=-u \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x+y=-\sqrt{2}x\\x-y=-\sqrt{2}y\\\sqrt{2}z=-\sqrt{2}z\end{cases}$$

$$u\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)\iff \begin{cases}(1+\sqrt{2})x+y=0\\x+(\sqrt{2}-1)y=0\\2\sqrt{2}z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-(1+\sqrt{2})x\\0=x-(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})x=0\\z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-(1+\sqrt{2})x\\z=0\end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1-(\sqrt{2}+1)e_2$.

$\|e_1-(\sqrt{2}+1)e_2\| = \sqrt{1^2+(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Alors $\mathcal{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(e_1-(\sqrt{2}+1)e_2)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$.

b) $\left\langle \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(e_1+(\sqrt{2}-1)e_2), \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(e_1-(\sqrt{2}+1)e_2)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left(1-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right)=0.$

$\left\langle e_3, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(e_1-(\sqrt{2}+1)e_2)\right\rangle = 0.$

Les éléments de $\mathcal{B}_1$ sont orthogonaux à l'élément de $\mathcal{B}_2$. Ceci suffit pour dire que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Remarque : f étant une symétrie, $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires comme ils sont de plus orthogonaux l'un est l'orthogonal de l'autre. f est donc une symétrie orthogonale. Ce qui n'est pas un scoop car f est une symétrie et f est un endomorphisme symétrique car sa matrice A dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique.

c) $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$, $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$ et, $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base orthonormée.

Posons $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(e_1+(\sqrt{2}-1)e_2)$, $e'_2 = e_3$ et $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(e_1-(\sqrt{2}+1)e_2)$.

$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormée de E. De plus $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = -e'_3$ donc $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M_{\mathcal{B}'}(f^k) = (M_{\mathcal{B}'}(f))^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$.

Alors $M_{\mathcal{B}'}(f_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_{\mathcal{B}'}(f^k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$.

$M_{\mathcal{B}'}(f_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ avec $\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1}{n}\,\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \underbrace{\frac{1}{2n}[1-(-1)^n]}_{\text{vaut } 0 \text{ si } n \text{ est pair et } \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est impair}}$

Soit $u = xe'_1 + ye'_2 + ze'_3$ un élément de E.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha_n z' \end{pmatrix}$. Ainsi $f_n(u) = xe'_1 + ye'_2 + \alpha_n z e'_3$.

Alors $\|f_n(u) - (xe'_1 + ye'_2)\| = \|\alpha_n z e'_3\| = |\alpha_n||z|\|e'_3\| = |\alpha_n||z|$.

or $\|f_n(u) - (xe'_1 + ye'_2)\| = |\alpha_n||z| = \frac{1}{2n}|1-(-1)^n||z| \leq \frac{1}{2n}[1+|(-1)^n|]|z| = \frac{1}{n}|z|$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}|z|\right) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\|f_n(u) - (xe'_1 + ye'_2)\| = 0$.

Soit p l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

$p(u) = xe'_1 + ye'_2$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\|f_n(u) - p(u)\| = 0$.

$\forall u \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n(u) - \ell(u) \| = 0$ où ℓ est l'endomorphisme de matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b) $\forall u = x e'_1 + y e'_2 + z e'_3 \in E$, $\ell(u) = x e'_1 + y e'_2$.

Ainsi ℓ est la projection de base $\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e'_3)$

($\mathrm{Vect}(e'_1,e'_2)$ et $\mathrm{Vect}(e'_3)$ sont supplémentaires car (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de E).

Notons que de fait $\mathrm{Vect}(e'_3)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e'_1,e'_2)$ ((e'_1,e'_2,e'_3) est une base orthonormée de E).

Ainsi ℓ est la projection orthogonale ~~sur~~ sur $\mathrm{Vect}(e'_1,e'_2)$.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées donc P est une matrice orthogonale.

$M_{\mathcal{B}'}(\ell) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(\ell) P$. $\quad M_{\mathcal{B}}(\ell) = P M_{\mathcal{B}'}(\ell) P^{-1} = P M_{\mathcal{B}'}(\ell)\, {}^tP$.

$$M_{\mathcal{B}}(\ell) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} \\ \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & 0 & -\frac{\sqrt2+1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP$$

$$M_{\mathcal{B}}(\ell) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & -\frac{\sqrt2+1}{\sqrt{4+2\sqrt2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4-2\sqrt2} & \frac{\sqrt2-1}{4-2\sqrt2} & 0 \\ \frac{\sqrt2-1}{4-2\sqrt2} & \frac{(\sqrt2-1)^2}{(4-2\sqrt2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $4-2\sqrt2 = 2\sqrt2(\sqrt2-1)$;

$\frac{1}{4-2\sqrt2} = \frac{1}{2\sqrt2}(\sqrt2+1)$.

et $\frac{1}{\sqrt2-1} = \sqrt2+1$

Ainsi : $M_{\mathcal{B}}(\ell) = \frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix} \sqrt2+1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice de ℓ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique. Normal pour une projection orthogonale...

Exercice E est un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle.

Q1. $p \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille d'éléments de E obtusangle c'est à dire telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j > < 0.$$

$F = \Big(\mathrm{Vect}(x_p)\Big)^{\perp}$. Pour tout i dans $[\![1, p-1]\!]$, on note y_i la projection orthogonale de x_i sur F.

Montrer que la famille $(y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$ est encore obtusangle.

Q2. a) Montrer qu'une famille obtusangle de E est de cardinal au plus $n+1$.

b) Montrer E possède une famille obtusangle de cardinal $n+1$.

Q1 $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $\exists z_i \in F^{\perp}$, $x_i = y_i + z_i$.

$F^{\perp} = \mathrm{Vect}(x_p)$. $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$, $z_i = \alpha_i x_p$.

Alors $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $x_i = y_i + \alpha_i x_p$. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,p-1]\!]$. $\langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle + \alpha_i \underbrace{\langle x_p, y_j\rangle}_{=0} + \alpha_j \underbrace{\langle y_i, x_p\rangle}_{=0} + \alpha_i \alpha_j \langle x_p, x_p\rangle$.

$\langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle + \alpha_i \alpha_j \|x_p\|^2$.

$\langle y_i, y_j\rangle = \langle x_i, x_j\rangle - \alpha_i \alpha_j \|x_p\|^2$.

De plus $0 > \langle x_i, x_p\rangle = \langle y_i + \alpha_i x_p, x_p\rangle = \underbrace{\langle y_i, x_p\rangle}_{0} + \alpha_i \|x_p\|^2 = \alpha_i \|x_p\|^2$

donc $\alpha_i \|x_p\|^2 < 0$. Comme $\langle x_i, x_p\rangle < 0$ x_p n'est pas nul.

Alors $\alpha_i \|x_p\|^2 < 0$ et $\|x_p\|^2 > 0$ donc $\alpha_i < 0$. De même $\alpha_j < 0$.

Dans ces conditions $\langle x_i, x_j\rangle < 0$ et $-\alpha_i \alpha_j \|x_p\|^2 < 0$.

$\uparrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_i < 0 \\ \alpha_j < 0 \\ \|x_p\|^2 > 0 \end{array}\right.$

donc $\langle y_i, y_j\rangle = \langle x_i, x_j\rangle - \alpha_i \alpha_j \|x_p\|^2 < 0$.

$\forall (i,j) \in [\![1, p-1]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle y_i, y_j\rangle < 0$.

La famille $(y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$ est obtusangle.

(Q2) Montrons ce résultat par récurrence sur n.

* Supposons $\dim E = n = 1$.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille obtusangle de E.

Supposons que $p > n+1$. $p > 3$.

$x_1 \neq 0_E$ car $\langle x_1, x_2 \rangle < 0$. (x_1) est une base de E.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x_2 = \alpha x_1$ et $x_3 = \beta x_1$.

$0 > \langle x_1, x_2 \rangle = \alpha \langle x_1, x_1 \rangle = \alpha \|x_1\|^2$ donc $\alpha < 0$. De même $\beta < 0$. Alors $\alpha\beta > 0$

Alors $0 > \langle x_2, x_3 \rangle = \alpha\beta \langle x_1, x_1 \rangle = \alpha\beta \|x_1\|^2$. Donc $\alpha\beta < 0$!

Alors $p \leq n+1$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

* Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$ et $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille obtusangle de E. Montrons que $p \leq n+2$.

Si $p = 1$, c'est clair. Supposons $p \geq 2$.

Soit $F = (\mathrm{Vect}(x_p))^\perp$. $\underline{\dim F = n}$ car $x_p \neq 0_E$ $(\langle x_1, x_p \rangle < 0)$.

Soit $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$ les projections orthogonales de $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ sur F.

D'après Q1 $(y_1, y_2, \dots, y_{p-1})$ est une famille obtusangle de F qui est de dimension n. L'hypothèse de récurrence indique alors que $p-1 \leq n+1$.

Alors $p \leq (n+1)+1 = n+2$. Ceci achève la récurrence.

b) Montrons encore ce résultat par récurrence.

* Supposons $\dim E = 1$. Soit x_1 un élément non nul de E.

Posons $x_2 = -x_1$. $\langle x_1, x_2 \rangle = -\|x_1\|^2 < 0$.

Alors (x_1, x_2) est une famille obtusangle de cardinal 2 donc de cardinal $n+1$.

La propriété est vraie pour $n = 1$.

* Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$.

Soit x_{n+2} un vecteur <u>unitaire</u> de E. Posons $F = (\mathrm{Vect}(x_{n+2}))^{\perp}$.

F est un espace vectoriel euclidien.

L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe une famille obtusangle $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ de cardinal $n+1$ dans F.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $x_i = y_i + \alpha x_{n+2}$.

(1) • $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\langle x_i, x_{n+2} \rangle = \underbrace{\langle y_i, x_{n+2} \rangle}_{=0} + \alpha \underbrace{\langle x_{n+2}, x_{n+2} \rangle}_{=1} = \alpha$.

(2) • Soit $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

$$\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i + \alpha x_{n+2}, y_j + \alpha x_{n+2} \rangle = \langle y_i, y_j \rangle + \alpha \overbrace{\langle y_i, x_{n+2} \rangle}^{0} + \alpha \overbrace{\langle x_{n+2}, y_j \rangle}^{0} + \alpha^2 \underbrace{\langle x_{n+2}, x_{n+2} \rangle}_{=1}.$$

$\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle + \alpha^2$.

Alors $\langle x_i, x_j \rangle < 0 \iff \alpha^2 < -\langle y_i, y_j \rangle \iff |\alpha| < \sqrt{-\underbrace{\langle y_i, y_j \rangle}_{<0}}$.

(1) et (2) montrent que $(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ est obtusangle si et seulement si

1) $\alpha < 0$ et 2) $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $|\alpha| < \sqrt{-\langle y_i, y_j \rangle}$ pour $i \neq j$

ou 1) $\alpha < 0$ et 2) $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $-\sqrt{-\langle y_i, y_j \rangle} < \alpha < \sqrt{-\langle y_i, y_j \rangle}$ pour $i \neq j$

ou $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow -\sqrt{-\langle y_i, y_j \rangle} < \alpha < 0$. (*)

Posons $\beta = \max\{-\sqrt{-\langle y_i, y_j \rangle}\ ;\ (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2 \text{ et } i \neq j\}$.

Alors si $\alpha = \frac{\beta}{2}$, (*) est vérifiée et alors la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ est une famille obtusangle de cardinal $n+2$ de E.

Ceci achève la récurrence.