$\boxed{\text{Exercice}}$ **Polynôme de Jacobi.**

• *Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-2*

PARTIE I ETUDE D'UN ENDOMORPHISME

On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = (X^2-1)\,P'' + (2X+1)\,P'$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ n est un élément de $\mathbb{N}$ et φ_n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi_n(P) = \varphi(P)$.

a) Ecrire la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de φ_n. Montrer que φ_n est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) Montrer très proprement, par double inclusion, que l'ensemble des valeurs propres de φ est : $\{k(k+1)\,;\ k \in \mathbb{N}\}$.

Préciser la dimension des sous-espaces propres de φ.

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_k et un seul qui soit vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k\,(k+1)$. Montrer que P_k est de degré k.

c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 (**aujourd'hui $\mathbf{P_3}$ est facultatif**).

d) Préciser le coefficient de X^{k-1} dans P_k pour k élément de $[\![1, +\infty[\![$.

Montrer que si k est élément de $[\![2, +\infty[\![$, le coefficient de X^{k-2} dans P_k est : $\dfrac{1-k}{4}$.

e) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE II UN PRODUIT SCALAIRE CLASSIQUE

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que pour tout élément h de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ existe.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On pose : $\forall (f,g) \in E^2,\ < f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. Nous noterons $\|.\|$ la norme associée.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $< \varphi(P), Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^{\frac{3}{2}}\,(1+t)^{\frac{1}{2}}\,P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t$ (on pourra commencer à intégrer par parties $\displaystyle\int_a^b \Big((t^2-1)\,P''(t) + 2\,t\,P'(t)\Big)\,Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ en remarquant que la première parenthèse est une dérivée ; être patient...).

b) En déduire alors que $< \varphi(P), Q >=< P, \varphi(Q) >$.

c) Montrer alors que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q4 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$ $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(2\,\theta)\big)^n \,\mathrm{d}\theta$.

a) Montrer que pour tout élément h de E : $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} h\big(\cos(2\,\theta)\big)\,(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$.

b) n est un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer I_n en fonction de J_n et de J_{n+1}.

c) Calculer J_0 et J_1. Exprimer J_n en fonction de J_{n-2} pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$.

Calculer J_{2p} et J_{2p+1} pour tout p dans $\mathbb{N}$.

d) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{[2^p\,p!]^2}\,\pi$ et $I_{2p+1} = -\dfrac{(2p+2)!}{[2^{p+1}\,(p+1)!]^2}\,\pi$.

PARTIE III ETUDE DE LA SUITE $(\mathbf{P_n})_{n\in\mathbb{N}}$

Q1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) En remarquant que $< P_n, 1 >= 0$, montrer que P_n admet au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$.

b) Soient $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_p$ les zéros de P_n d'ordre de multiplicité impair situés dans $]-1,1[$ ($x_1,\ x_2,\ ...,\ x_p$ sont deux à deux distincts).

En remarquant que $\big[(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p)\,P_n\big]$ garde un signe constant sur $]-1,1[$ montrer que l'on ne peut pas avoir $p<n$.

En déduire que $p=n$ et que $P_n = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$.

Q2 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ < Q, P_{n+2} - X\,P_{n+1} >= 0$ (remarquer que $< A, BC >=< AB, C >$...).

b) Préciser le terme de plus haut degré de $P_{n+2} - X\,P_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ (utiliser I Q3 d)).

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $P_{n+2} - X\,P_{n+1}$ est combinaison linéaire de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ puis de la famille (P_n) !

Montrer que $P_{n+2} - X\,P_{n+1} = -\dfrac{1}{4}\,P_n$.

Q3 a) calculer $P_{2p}(0)$ et $P_{2p+1}(0)$ pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

b) Montrer, en gérant une suite définie par une relation linéaire de récurrence d'ordre 2, que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(1) = \dfrac{2n+1}{2^n}$.

Q4 n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que :

a) $< P_n, P_n >=< P_n, X^n >$;

b) $< P_n, X^{n+1} >= -\dfrac{1}{2} < P_n, P_n >$;

c) $< P_n, X^{n+2} >= \dfrac{n+2}{4} < P_n, P_n >$.

Q5 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n =< P_n, P_n >$.

a) Utiliser II Q4 pour calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - \dfrac{n+3}{4}\,u_{n+1} = -\dfrac{n+2}{16}\,u_n$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|P_n\| = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n}$.

PARTIE IV APPROXIMATION D'UN ÉLÉMENT DE E PAR UNE SUITE DE POLYNÔMES

Soit f un élément de E.

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique élément S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $||f - S_n||$ soit minimal.

Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f, P_k >}{||P_k||^2} P_k$. Exprimer $||f - S_n||^2$ en fonction de $||f||^2$ et $||S_n||^2$. Calculer $||S_n||^2$.

Q2 Montrer que la série de terme général $\dfrac{(< f, P_k >)^2}{||P_k||^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(< f, P_k >)^2}{||P_k||^2} \leqslant ||f||^2$.

> Soit g une fonction numérique continue sur un segment $[a, b]$. Le théorème de Weirstrass indique que pour tout réel strictement positif ε', il existe un élément $P_{\varepsilon'}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\operatorname*{Max}_{t \in [a,b]} |g(t) - P_{\varepsilon'}(t)| < \varepsilon'$.

Q3 On se propose de montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} ||f - S_n|| = 0$. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $||f - Q|| < \varepsilon$.

b) En déduire qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $||f - S_n|| < \varepsilon$. Conclure.

c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(< f, P_k >)^2}{||P_k||^2} = ||f||^2$.

PARTIE I ETUDE D'UN ENDOMORPHISME

(Q1) • $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $(X^2-1)P'' + (2X+1)P' \in \mathbb{R}[X]$! φ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$

• Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda P+Q) = (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + (2X+1)(\lambda P+Q)' = (X^2-1)(\lambda P''+Q'') + (2X+1)(\lambda P'+Q')$.

$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\left[(X^2-1)P'' + (2X+1)P'\right] + (X^2-1)Q'' + (2X+1)Q' = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg(X^2-1)P'' \leq n$ et $\deg(2X+1)P' \leq n$ donc

$\deg \varphi(P) \leq n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.</u>

(Q2) <u>a)</u> $\varphi_n(1) = 0$, $\varphi_n(X) = 2X+1$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\varphi_n(X^k) = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + (2X+1)kX^{k-1}$

<u>$\varphi_n(1) = 0$, $\varphi_n(X) = 2X+1$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\varphi_n(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$</u>

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\times 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1\times 2 & 2 & -3\times 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 2\times 3 & 3 & -4\times 3 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

est la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$

<u>b)</u> $\mathrm{Sp}\,\varphi_n = \mathrm{Sp}\,M_n = \{0, 1\times 2, 2\times 3, \dots, n(n+1)\}$ car M_n est triangulaire supérieure.

Ainsi <u>$\mathrm{Sp}\,\varphi_n = \{k(k+1) \,;\, k \in [\![0, n]\!]\}$</u>.

Posons $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = k(k+1)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k+2) - k(k+1) = 2k+2 > 0$.

Ainsi $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Ainsi φ_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\varphi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$: 1) φ_n est diagonalisable.

2) les sous-espaces propres de φ_n sont des droites vectorielles.

(Q3) a) → Soit λ une valeur propre de φ et soit P un vecteur propre associé.

Posons $r = \deg P$ ($P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$). $\varphi(P) = \lambda P$ et $P \in \mathbb{R}_r[X]$.

Ainsi $P \neq 0_{\mathbb{R}_r[X]}$ et $\varphi_r(P) = \lambda P$; $\lambda \in Sp\, \varphi_r = \{ k(k+1) ; k \in [\![0, r]\!] \}$.

Alors $\exists\, l \in [\![0, r]\!]$, $\lambda = l(l+1)$.

Ceci montre que $Sp\, \varphi \subset \{ k(k+1) ; k \in \mathbb{N} \}$

→ Réciproquement soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $k(k+1)$ est une valeur propre de φ.

$k(k+1) \in Sp\, \varphi_k$ (cf ?) donc $\exists\, P \in \mathbb{R}_k[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}_k[X]}$ et $\varphi_k(P) = k(k+1)P$.

Alors $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $\varphi(P) = k(k+1)P$. Ainsi $k(k+1) \in Sp\, \varphi$.

Finalement $Sp\, \varphi = \{ k(k+1) ; k \in \mathbb{N} \}$.

Montrons que les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

Soit $\lambda \in Sp\, \varphi$. Supposons $\dim SEP(\varphi, \lambda) \geq 2$.

Alors il existe au moins deux éléments P et Q de $SEP(\varphi, \lambda)$ tels que (P, Q) soit libre. Soit s un majorant de $\deg P$ et $\deg Q$.

$P \in \mathbb{R}_s[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_s[X]$. Alors $\varphi_s(P) = \lambda P$ et $\varphi_s(Q) = \lambda Q$. Ainsi $\lambda \in Sp\, \varphi_s$ et (P, Q) est une famille libre de $SEP(\varphi_s, \lambda)$.

Donc $\dim SEP(\varphi_s, \lambda) \geq 2$ ce qui contredit ce qui a été vu dans Q2

Les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $SEP(\varphi, k(k+1))$ est une droite vectorielle. Soit Q un élément non nul de cette droite et α le coefficient du terme de plus haut degré de Q. $P_k = \frac{1}{\alpha} Q$ est un polynôme unitaire de $SEP(\varphi, k(k+1))$.

Soit $\hat{P}_k$ un second polynôme unitaire de $SEP(\varphi, k(k+1))$.

$\hat{P}_k \in Vect(Q) = Vect(P_k)$. $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $\hat{P}_k = \gamma P_k$. Comme $\hat{P}_k$ et P_k sont unitaires : $\gamma = 1$.

Ainsi $\hat{P}_k = P_k$.

Alors $SEP(\varphi, k(k+1))$ contient un polynôme unitaire et un seul : P_k.

<u>Il existe donc un polynôme unitaire P_k et un seul qui soit vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+1)$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.</u>

Soit r le degré de P_k. Le coefficient de X^r dans P_k est 1.

$\varphi(P_k) = k(k+1)P_k$; $(X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k' = k(k+1)P_k$.

Le coefficient de X^r dans $(X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$ est $r(r-1) + 2r$.

Le coefficient de X^r dans $k(k+1)P_k$ est $k(k+1)$.

Alors $k(k+1) = r(r-1) + 2r = r(r+1)$; $k^2 + k - r^2 - r = 0$; $(k-r)(k+r+1) = 0$; $k - r = 0$.

Alors $r = k$.

<u>Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\deg P_k = k$.</u>

c) $\deg P_0 = 0$ et P_0 est unitaire donc $\underline{P_0 = 1}$.

$\deg P_1 = 1$ et P_1 est unitaire ; $\exists a \in \mathbb{R}$, $P_1 = X + a$.

$\varphi(P_1) = (1)(1+1)P_1$; $\varphi(P_1) = 2P_1$.

$(X^2-1)(0) + (2X+1)(1) = 2(X+a)$; $2X + 1 = 2X + 2a$; $a = \frac{1}{2}$. $\underline{P_1 = X + \frac{1}{2}}$.

$\deg P_2 = 2$ et P_2 est unitaire ; $\exists (b,c) \in \mathbb{R}^2$, $P_2 = X^2 + bX + c$.

$(X^2-1)P_2'' + (2X+1)P_2' = \varphi(P_2) = 2\times(2+1)P_2 = 6P_2$.

$(X^2-1)(2) + (2X+1)(2X+b) = 6X^2 + 6bX + 6c$; $6X^2 + 2(b+1)X - 2 + b = 6X^2 + 6bX + 6c$.

Ainsi $2b + 2 = 6b$ et $-2 + b = 6c$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{4}$. $\underline{P_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}}$.

$\deg P_3 = 3$ et P_3 est unitaire. $\exists (d,e,f) \in \mathbb{R}^3$, $P_3 = X^3 + dX^2 + eX + f$.

$(X^2-1)P_3'' + (2X+1)P_3' = \varphi(P_3) = 3\times 4\, P_3 = 12 P_3$.

$(X^2-1)(6X+2d) + (2X+1)(3X^2+2dX+e) = 12X^3 + 12d\,X^2 + 12eX + 12f$.

$6X^3 - 6X + 2dX^2 - 2d + 6X^3 + 4dX^2 + 2eX + 3X^2 + 2dX + e = 12X^3 + 12dX^2 + 12eX + 12f$

$\begin{cases} 2d + 4d + 3 = 12d \\ -6 + 2e + 2d = 12e \\ -2d + e = 12f \end{cases}$. $\begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ e = -\frac{1}{2} \\ f = -\frac{1}{8} \end{cases}$. $\boxed{P_3 = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}}$.

d) Soit $k \in [\![1,+\infty[\![$. $k(k+1)P_k = \varphi(P_k) = (X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$.

Notons α_k le coefficient de X^{k-1} dans P_k.

Le coefficient de X^{k-1} dans $(X^2-1)P_k''$ (resp. $(2X+1)P_k'$) est $\alpha_k(k-1)(k-2)$

(resp. $2(k-1)\alpha_k + k$).

Ainsi $\alpha_k(k-1)(k-2) + 2(k-1)\alpha_k + k = k(k+1)\alpha_k$

Donc $\alpha_k\left(k^2+k-(k-1)(k-2)-2(k-1)\right) = k$; $\alpha_k(k^2+k-k^2+3k-2-2k+2) = k$

$2k\alpha_k = k$; $\alpha_k = \frac{1}{2}$.

Si $k \in \mathbb{N}^*$, le coefficient de X^{k-1} dans P_k est $\frac{1}{2}$.

Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $k(k+1)P_k = (X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$.

Notons β_k le coefficient de X^{k-2} dans P_k.

Le coefficient de X^{k-2} dans $(X^2-1)P_k''$ est : $(k-2)(k-3)\beta_k - k(k-1)$.

Le coefficient de X^{k-2} dans $(2X+1)P_k'$ est : $2(k-2)\beta_k + (k-1)\alpha_k$.

$\alpha_k = \frac{1}{2}$.

Alors $k(k+1)\beta_k = (k-2)(k-3)\beta_k - k(k-1) + 2(k-2)\beta_k + (k-1)\times\frac{1}{2}$

$\beta_k(k^2+k-k^2+5k-6-2k+4) = -k^2+k+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$.

$\beta_k(4k-2) = -k^2+\frac{3}{2}k-\frac{1}{2} = (k-1)\left(-k+\frac{1}{2}\right)$; $4\beta_k = -(k-1)$; $\beta_k = \frac{1-k}{4}$.

Si $k \in [\![2,+\infty[\![$, le coefficient de X^{k-2} dans P_k est $\dfrac{1-k}{4}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont $n+1$ vecteurs propres de φ_n associés à $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes ; $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est alors une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1$.

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(Q1) Soit $h \in E$. h est continue sur le segment $[-1,1]$, $|h|$ aussi. Ainsi $|h|$ possède un maximum sur $[-1,1]$. Posons $M = \max_{t\in[-1,1]} |h(t)|$.

$t \mapsto h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$; $\int_0^1 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ existe.

- $\forall t \in]-1,0]$, $0 \leq \left|h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right| \leq M\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \underset{\substack{\uparrow \\ -t\leq 1}}{\leq} M\sqrt{2}\,\frac{1}{(1+t)^{1/2}}$
- $\int_{-1}^0 \frac{dt}{(1+t)^{1/2}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_{-1}^0 \left|h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right| dt$ converge. Ainsi $\int_{-1}^0 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ est absolument convergente. Finalement $\int_{-1}^1 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ converge.

Pour tout $h \in E$, $\int_{-1}^1 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ converge.

(Q2) * Soit $(f,g) \in E^2$. $fg \in E$ donc $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ existe d'après Q1.

* Soit $(f,g,h) \in E^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\langle \lambda f+g,h\rangle = \int_{-1}^1 (\lambda f+g)(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{-1}^1 \left[\lambda f(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + g(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right] dt$

$\langle \lambda f+g,h\rangle \underset{\uparrow}{=} \lambda\int_{-1}^1 f(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt + \int_{-1}^1 g(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

Toutes les intégrales convergent.

$\langle \lambda f+g,h\rangle = \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$.

* Soit $(f,g) \in E^2$. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{-1}^1 g(t)f(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \langle g,f\rangle$.

$\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.

* Soit $f \in E$. $\forall t \in]-1,1]$, $(f(t))^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \geq 0$ donc $\langle f,f\rangle = \int_{-1}^1 (f(t))^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt \geq 0$.

$\langle f,f\rangle \geq 0$.

* Soit $f \in E$. Supposons $\langle f, f \rangle = 0$.

- $t \mapsto (f(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue et positive sur $]-1,1]$.
- $\int_{-1}^{1} (f(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = 0$.
- $-1 \neq 1$.

Ainsi $t \mapsto (f(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est nulle sur $]-1,1]$ donc f^2 est nulle sur $]-1,1[$.

Alors f est nulle sur $]-1,1[$. Rappelons que f est continue sur $[-1,1]$.

Ainsi $f(1) = \lim_{t \to 1^-} f(t) = 0$ et $f(-1) = \lim_{t \to -1^+} f(t) = 0$.

Finalement $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = 0$. Si $\langle f, f \rangle = 0$: $f = 0_E$.

Les cinq points précédents montrent que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Q3 a) Soit $(a,b) \in]-1,1[^2$. Posons $\forall t \in]-1,1[$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$ et $v(t) = \varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. u et v sont de classe C^1 sur $]-1,1[$ et

$\forall t \in]-1,1[$, $u'(t) = (t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)$ et $v'(t) = \varphi'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \varphi(t)\dfrac{\frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} =$

$\varphi'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \dfrac{\varphi(t)}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}$.

Alors $$\int_a^b ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \left[(t^2-1)P'(t)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right]_a^b -$$

$$\int_a^b (t^2-1)P'(t)\varphi'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt + \int_a^b \frac{(t^2-1)P'(t)\varphi(t)}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}\, dt.$$

$$\int_a^b ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = -(1-b)^{3/2}(1+b)^{1/2}P'(b)\varphi(b) + (1-a)^{3/2}(1+a)^{1/2}P'(a)\varphi(a)$$

$$+ \int_a^b (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)\varphi'(t)\, dt - \int_a^b P'(t)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt.$$

En faisant tendre successivement a vers -1 et b vers 1 il vient :

$$\int_{-1}^1 ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = -0 + 0 + \int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)\varphi'(t)\, dt -$$

$$\int_{-1}^1 P'(t)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$$

Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)P''(t)+2tP'(t)+P'(t)\right) Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt.$

ce qui s'écrit encore : $\displaystyle\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt.$

b) En échangeant les rôles de P et Q dans ce qui précède on a aussi :

$\displaystyle\langle \varphi(Q), P\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)P'(t)\,dt$

~~Clairement~~ $\langle \varphi(Q), P\rangle = \langle \varphi(P), Q\rangle$. Ainsi $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$.

c) Soit $(k,k')\in\mathbb{N}^2$ tel que $k\neq k'$.

$\langle \varphi(P_k), P_{k'}\rangle = \langle P_k, \varphi(P_{k'})\rangle$

$\langle k(k+1)P_k, P_{k'}\rangle = \langle P_k, k'(k'+1)P_{k'}\rangle$; $k(k+1)\langle P_k, P_{k'}\rangle = k'(k'+1)\langle P_k, P_{k'}\rangle$.

Or $k(k+1)\neq k'(k'+1)$ car $k\neq k'$ ainsi $\langle P_k, P_{k'}\rangle = 0$.

$\forall (k,k')\in\mathbb{N}^2,\ k\neq k' \Rightarrow \langle P_k, P_{k'}\rangle = 0.$

$(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale. (*) Voir P_n orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ page 10.

Q4 a) Soit $h\in E$. Soit $(a,b)\in\,]-1,1[^2$.

$$\int_a^b h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{\frac12\operatorname{Arccos} a}^{\frac12\operatorname{Arccos} b} h(\cos(2\theta))\sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}}\,(-2\sin(2\theta))\,d\theta.$$

$\begin{cases} t=\cos(2\theta) \\ dt=-2\sin(2\theta)\,d\theta \\ \theta=\frac12\operatorname{Arccos} t \end{cases}$

$$\int_a^b h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_{\frac12\operatorname{Arccos} b}^{\frac12\operatorname{Arccos} a} h(\cos 2\theta)\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\,(\sin\theta\cos\theta)\,d\theta = 4\int_{\frac12\operatorname{Arccos} b}^{\frac12\operatorname{Arccos} a} h(\cos 2\theta)\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right|\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_a^b h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_{\frac12\operatorname{Arccos} b}^{\frac12\operatorname{Arccos} a} h(\cos 2\theta)\sin^2\theta\,d\theta.$$

$\frac12\operatorname{Arccos} b\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\frac12\operatorname{Arccos} a\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{A \to -1} \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} A = \frac{1}{2}\pi$ et $\lim\limits_{B \to 1} \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} B = \frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_{0}^{\pi/2} f(\cos(2\theta))(\sin\theta)^2\,d\theta$ et ceci pour tout $f \in E$.

b) $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle I_n = \int_{-1}^{1} t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_{0}^{\pi/2} (\cos 2\theta)^n \sin^2\theta\,d\theta$ ... car $t \mapsto t^n$ est continue sur $[-1,1]$!

$\displaystyle I_n = 2\int_{0}^{\pi/2} (\cos 2\theta)^n\,(1-\cos 2\theta)\,d\theta = 2(J_n - J_{n+1})$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = 2(J_n - J_{n+1})$.

c) $\displaystyle J_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$. $\displaystyle J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(2\theta)\,d\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 0$.

$J_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_1 = 0$.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(2\theta))^{n-1} \cos(2\theta)\,d\theta$. Intégrons par parties...

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $u(\theta) = (\cos(2\theta))^{n-1}$ et $v(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $u'(\theta) = (n-1)(-2\sin 2\theta)(\cos(2\theta))^{n-2}$ et $v'(\theta) = \cos(2\theta)$.

$$J_n = \underbrace{\left[(\cos(2\theta))^{n-1}\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} (n-1)(-2\sin(2\theta))(\cos(2\theta))^{n-2}\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta.$$

$$J_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta)(\cos(2\theta))^{n-2}\,d\theta = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(2\theta))(\cos(2\theta))^{n-2}\,d\theta.$$

$J_n = (n-1)(J_{n-2} - J_n)$; $\quad nJ_n = (n-1)J_{n-2}$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\quad nJ_n = (n-1)J_{n-2}$ ou $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. " $J_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} J_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times J_1 = 0$ ".

" $J_{2p} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} J_0$ ".

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $J_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} J_0$ et $J_{2p+1} = 0$.

- C'est clair pour $p = 0$ ($\frac{(2 \times 0)!}{[2^0 0!]^2} = 1$ et $J_1 = 0$!).
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

$J_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} J_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2} \times \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} J_0 = \frac{(2(p+1))!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} J_0$ et

$J_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} J_{2p+1} = 0$. Ceci achève la récurrence. Rappelons que $J_0 = \frac{\pi}{2}$. Alors :

$\forall p \in \mathbb{N}$, $J_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \frac{\pi}{2}$ et $J_{2p+1} = 0$.

<u>d)</u> Soit $p \in \mathbb{N}$. $I_{2p} = 2(J_{2p} - J_{2p+1}) = 2 J_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \pi$.

$I_{2p+1} = 2(J_{2p+1} - J_{2p+2}) = -2 J_{2p+2} = -2 \frac{(2p+2)!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} \frac{\pi}{2}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \pi$ et $I_{2p+1} = -\frac{(2p+2)!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} \pi$.

(*) fin de Q3 c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et P_n est orthogonal à tous les éléments de cette base donc P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.</u>

PARTIE III ETUDE DE LA SUITE $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1 a) $\langle P_n, 1\rangle = 0$; $\int_{-1}^{1} P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 0$.

Supposons que P_n n'a pas de zéro d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$. Alors P_n garde un signe constant sur $]-1,1[$ et même sur $[-1,1]$.

Alors $t \mapsto P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$, garde un signe constant sur $]-1,1]$, $\int_{-1}^{1} P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 0$ et $1 \neq -1$.

Ainsi $\forall t \in]-1,1]$, $P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0$. $\forall t \in]-1,1[$, $P_n(t) = 0$.

Alors P_n admet une infinité de zéros. $P_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$!!

Finalement $\underline{P_n \text{ admet au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair dans }]-1,1[}$.

b) $(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p)P_n$ n'a que des zéros d'ordre de multiplicité <u>pair</u> dans $]-1,1[$ donc garde un signe constant sur $]-1,1[$ et même sur $[-1,1]$.

Alors $t \mapsto (t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_p)P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$ et garde un signe constant sur $]-1,1]$. Alors $\int_{-1}^{1}(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_p)P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt \neq 0$

donc $\langle (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p), P_n\rangle \neq 0$.

Si $p < n$: $(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p), P_n\rangle$ vaut 0 car $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

Ainsi $p \geq n$. Or $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc P_n admet au plus n zéros.

Ainsi $p \leq n$.

Alors $p = n$. Or $\deg P_n = n$ donc $\exists \sigma \in \mathbb{R}^*$, $P_n = \sigma(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$.

Comme P_n est unitaire : $\sigma = 1$. Ainsi $\underline{P_n = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)}$.

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\langle Q, P_{n+2} - X P_{n+1} \rangle = \langle Q, P_{n+2} \rangle - \langle Q, X P_{n+1} \rangle$.

$Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]^{\perp}$ donc $\langle Q, P_{n+2} \rangle = 0$.

$XQ \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$ donc $\langle XQ, P_{n+1} \rangle = 0$.

Or $\langle XQ, P_{n+1} \rangle = \int_{-1}^{1} tQ(t) P_{n+1}(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \int_{-1}^{1} Q(t) t P_{n+1}(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \langle Q, X P_{n+1} \rangle$

Finalement $\langle Q, P_{n+2} \rangle = 0$ et $\langle Q, X P_{n+1} \rangle = 0$.

Alors $\underline{\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle Q, P_{n+2} - X P_{n+1} \rangle = 0}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\deg(P_{n+2} - X P_{n+1}) \leq n+2$. Or P_{n+2} et $X P_{n+1}$ sont unitaires et

$\deg P_{n+2} = \deg(X P_{n+1}) = n+2$ donc $\deg(P_{n+2} - X P_{n+1}) \leq n+1$.

$n+2 \geq 1$ et $n+1 \geq 1$ donc le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+2} est $\frac{1}{2}$ et le coefficient de X^n dans P_{n+1} est $1/2$.

Ainsi le coefficient de X^{n+1} dans $P_{n+2} - X P_{n+1}$ est 0.

Supposons $n \geq 1$. Alors $n+2 \geq 2$ et $n+1 \geq 2$.

Le coefficient de X^n dans P_{n+2} est $\frac{1-(n+2)}{4}$ et le coefficient de X^{n-1} dans P_{n+1} est $\frac{1-(n+1)}{4}$.

Alors le coefficient de X^n dans $P_{n+2} - X P_{n+1}$ est $\frac{1-(n+2)}{4} - \frac{1-(n+1)}{4} = \frac{-1}{4}$.

Le terme de plus haut degré de $P_{n+2} - X P_{n+1}$ est $-\frac{1}{4} X^n$.

Si $n = 0$ $P_{n+2} - X P_{n+1} = P_2 - X P_1 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} - X(X + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; le résultat vaut encore.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme de plus haut degré de $P_{n+2} - X P_{n+1}$ est $-\frac{1}{4} X^n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_{n+2} - XP_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ d'après b)

$\exists (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P_{n+2} - XP_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i P_i$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $P_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc P_k est orthogonal à $P_{n+2} - XP_{n+1}$.

Ainsi $0 = \langle P_k, \sum_{i=0}^{n} \sigma_i P_i \rangle = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i \langle P_k, P_i \rangle = \sigma_k \langle P_k, P_k \rangle = \sigma_k \|P_k\|^2$.

Or $\|P_k\|^2 \neq 0$ car $P_k \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\sigma_k = 0$; ceci pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Alors $P_{n+2} - XP_{n+1} = \sigma_n P_n$.

Or le coefficient de X^n dans $P_{n+2} - XP_{n+1}$ (resp. P_n) est $-\frac{1}{4}$ (resp. 1).

Alors $-\frac{1}{4} = \sigma_n$; $P_{n+2} - XP_{n+1} = -\frac{1}{4} P_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} - XP_{n+1} = -\frac{1}{4} P_n$.

Q3 a) $\forall p \in \mathbb{N}$, $P_{2p+2}(0) - 0\, P_{2p+1}(0) = -\frac{1}{4} P_{2p}(0)$ ou $P_{2p+2}(0) = -\frac{1}{4} P_{2p}(0)$

$(P_{2p}(0))_{p \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme 1.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $P_{2p}(0) = \left(-\frac{1}{4}\right)^p$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $P_{2p+3}(0) - 0\, P_{2p+2}(0) = -\frac{1}{4} P_{2p+1}(0)$ ou $P_{2p+3}(0) = -\frac{1}{4} P_{2p+1}(0)$.

$(P_{2p+1}(0))$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $P_1(0) = \frac{1}{2}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $P_{2p+1}(0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^p$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(1) - P_{n+1}(1) = -\frac{1}{4} P_n(1)$. $(P_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 d'équation caractéristique

$z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$. Cette équation admet une solution et une seule $\frac{1}{2}$.

Ainsi $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta n \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or $P_0(1) = 1$ et $P_1(1) = \frac{3}{2}$

Donc $\alpha = 1$ et $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2}$. $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = \frac{2n+1}{2^n}$.

Q4 a) Supposons que n appartient à $\mathbb{N}^*$. P_n est unitaire et de degré n donc il existe un élément Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n = X^n + Q$.

Or $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc $0 = \langle P_n, Q \rangle = \langle P_n, P_n - X^n \rangle = \langle P_n, P_n \rangle - \langle P_n, X^n \rangle$

Alors $\langle P_n, P_n \rangle = \langle P_n, X^n \rangle$.

Ceci vaut encore pour $n=0$ car $P_0 = 1 = X^0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \langle P_n, P_n \rangle = \langle P_n, X^n \rangle$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $X^{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$.

$\exists (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}, \quad X^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$.

$\langle X^{n+1}, P_n \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i \langle P_i, P_n \rangle = \sigma_n \langle P_n, P_n \rangle$. $\quad \underline{\langle X^{n+1}, P_n \rangle = \sigma_n \langle P_n, P_n \rangle}$.

Le coefficient de X^n dans $\sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$ est : $\frac{1}{2} \sigma_{n+1} + \sigma_n$.

Le coefficient de X^{n+1} dans $\sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$ est : σ_{n+1}.

Comme $X^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$: $\sigma_{n+1} = 1$ et $\frac{1}{2} \sigma_{n+1} + \sigma_n = 0$; $\sigma_n = -\frac{1}{2}$.

Alors $\langle X^{n+1}, P_n \rangle = -\frac{1}{2} \langle P_n, P_n \rangle$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $X^{n+2} \in \mathbb{R}_{n+2}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n+2})$

$\exists (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+3}, \quad X^{n+2} = \sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$.

$\langle X^{n+2}, P_n \rangle = \sum_{i=0}^{n+2} \delta_i \langle P_i, P_n \rangle = \delta_n \langle P_n, P_n \rangle$. $\quad \underline{\langle X^{n+2}, P_n \rangle = \delta_n \langle P_n, P_n \rangle}$.

Le coefficient de X^{n+2} dans $\sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$ est : δ_{n+2}.

Le coefficient de X^{n+1} dans $\sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$ est : $\frac{1}{2} \delta_{n+2} + \delta_{n+1}$.

Le coefficient de X^n dans $\sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$ est : $\frac{1-(n+2)}{4} \delta_{n+2} + \frac{1}{2} \delta_{n+1} + \delta_n$.

Comme $X^{n+2} = \sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$: $\delta_{n+2} = 1$, $\frac{1}{2} \delta_{n+2} + \delta_{n+1} = 0$, $\frac{1-(n+2)}{4} \delta_{n+2} + \frac{1}{2} \delta_{n+1} + \delta_n = 0$.

Alors $\delta_{n+1} = -\frac{1}{2}$ et $\delta_n = -\frac{-n-1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{n+2}{4}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle P_n, X^{n+2} \rangle = \frac{n+2}{4} \langle P_n, P_n \rangle.$

Q5 a) $u_0 = \langle P_0, P_0 \rangle = \int_{-1}^{1} t^0 t^0 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = I_0 = \pi.$ $\quad \underline{u_0 = \pi.}$

$u_1 = \langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_1, X \rangle = \langle X + \frac{1}{2}, X \rangle = \langle X, X \rangle + \frac{1}{2} \langle 1, X \rangle = I_2 + \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad \underline{u_1 = \frac{\pi}{4}.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad P_{n+2} - X P_{n+1} = -\frac{1}{4} P_n.$

Alors $\langle P_{n+2}, X^{n+2} \rangle - \langle X P_{n+1}, X^{n+2} \rangle = -\frac{1}{4} \langle P_n, X^{n+2} \rangle.$

Observons que $\langle X P_{n+1}, X^{n+2} \rangle = \langle P_{n+1}, X^{n+3} \rangle \underset{\uparrow}{=} \frac{n+3}{4} \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle = \frac{n+3}{4} u_{n+1}$

Notons aussi que $\langle P_{n+2}, X^{n+2} \rangle \overset{\text{Q4 c)}}{=} \langle P_{n+2}, P_{n+2} \rangle = u_{n+2}.$

Notons encore que $\langle P_n, X^{n+2} \rangle = \frac{n+2}{4} \langle P_n, P_n \rangle = \frac{n+2}{4} u_n$

Alors : $\quad u_{n+2} - \frac{n+3}{4} u_{n+1} = -\frac{n+2}{16} u_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c) Montrons par récurrence (d'ordre 2) que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|P_n\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$ ou

que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|P_n\|^2 = u_n = \frac{\pi}{4^n}.$

- C'est vrai pour $n=0$ et 1 d'après Q5 a)
- Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+2$.

$u_{n+2} = \frac{n+3}{4} u_{n+1} - \frac{n+2}{16} u_n = \frac{n+3}{4} \frac{\pi}{4^{n+1}} - \frac{n+2}{16} \frac{\pi}{4^n} = \frac{\pi}{4^{n+2}} [n+3-n-2] = \frac{\pi}{4^{n+2}}.$

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \|P_n\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$

PARTIE IV

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour utiliser le théorème de meilleure approximation considérons le sous-espace vectoriel $\hat{E}$ engendré par $f, P_0, \dots, P_n$.

$\hat{E}$ muni de la restriction de $\langle \cdot , \cdot \rangle$ à $\hat{E}$ est un espace vectoriel euclidien.

$\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\hat{E}$ et $f \in \hat{E}$.

Alors 1) $\min\limits_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \| f - P \|$ existe.

2) $\exists !\, S_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\| f - S_n \| = \min\limits_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \| f - P \|$.

3) S_n est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $\left(\frac{1}{\|P_0\|} P_0, \frac{1}{\|P_1\|} P_1, \dots, \frac{1}{\|P_n\|} P_n \right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ est $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle f, \frac{1}{\|P_k\|} P_k \rangle \frac{1}{\|P_k\|} P_k$

Donc $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\langle f, P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k$.

$\| (f - S_n) + S_n \|^2 = \| f - S_n \|^2 + \| S_n \|^2$ car $f - S_n$ et S_n sont orthogonaux.

Ainsi $\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \| S_n \|^2$.

$$\| S_n \|^2 = \langle S_n, S_n \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, P_i \rangle}{\|P_i\|^2} P_i , \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle f, P_j \rangle}{\|P_j\|^2} P_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle f, P_i \rangle \langle f, P_j \rangle \langle P_i, P_j \rangle}{\|P_i\|^2 \|P_j\|^2}$$

Or $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale donc $\| S_n \|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\langle f, P_i \rangle^2}{\|P_i\|^2}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: • Il existe un unique élément S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\| f - S_n \|$ soit minimal,

- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\langle f, P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k$
- $\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \| S_n \|^2$
- $\| S_n \|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\langle f, P_k \rangle)^2}{\|P_k\|^2}$.

Q2 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(\langle f, P_k\rangle)^2}{\|P_k\|^2} \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\langle f, P_k\rangle)^2}{\|P_k\|^2} = \|S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$.

La série de terme général $\dfrac{(\langle f, P_k\rangle)^2}{\|P_k\|^2}$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $\|f\|^2$.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{(\langle f, P_k\rangle)^2}{\|P_k\|^2}$ converge.

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\langle f, P_k\rangle)^2}{\|P_k\|^2} \leqslant \|f\|^2$.

Q3 a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $f - P$ est continue sur $[-1, 1]$ donc $m = \max\limits_{t \in [-1,1]} |f(t) - P(t)|$ existe.

$\|f-P\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(t) - P(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} m^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$ car cette dernière intégrale converge. Alors $\|f - P\|^2 \leqslant m^2 I_0 = m^2 \pi$; $\|f - P\| \leqslant m\sqrt{\pi}$.

Le théorème de Weierstrass montre qu'il existe un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$\max\limits_{t \in [-1,1]} |f(t) - Q(t)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ car f est continue sur $[-1, 1]$.

Ce qui précède donne alors $\|f - Q\| \leqslant \left(\max\limits_{t\in[-1,1]} |f(t) - Q(t)|\right)\sqrt{\pi} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \varepsilon$.

Donc $\|f - Q\| < \varepsilon$. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $\|f - Q\| < \varepsilon$.

b) $\exists p \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ (prendre $p = \deg Q$ si $Q \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et p quelconque si $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$). Soit $n \in [\![p, +\infty[\![$. $\mathbb{R}_p[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\|f - Q\| \geqslant \min\limits_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\| = \|f - S_n\|$. Donc $\|f - S_n\| \leqslant \|f - Q\| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\|f - S_n\| < \varepsilon$.

Nous avons donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \|f - S_n\| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - S_n\| = 0$.

c) $\|f\|^2 - \|S_n\|^2 = \|f - S_n\|^2$, ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} (\|f\|^2 - \|S_n\|^2) = 0$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$. Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|S_n\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\langle f, P_k \rangle)^2}{\|P_k\|^2}$.

Par conséquent : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(\langle f, P_k \rangle)^2}{\|P_k\|^2} = \|f\|^2$.

EXERCICE 6

Exercice **PC** **D'une utilisation classique d'une famille de polynômes orthogonaux.**

Dans tout le problème n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et x_1, x_2, ..., x_n sont n éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$.

p est une fonction numérique continue et strictement positive sur $]a,b[$ telle que $\displaystyle\int_a^b t^k p(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

On est prié de remarquer que toutes les intégrales qui interviennent dans ce texte sont des intégrales généralisées.

PARTIE I

Q0 Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$.

Q1 $U = (X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$.

Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, U_i est le quotient de U par $X - x_i$ et $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)}\, U_i$.

a) Evaluer $L_i(x_j)$ pour i et j dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base sont $(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$.

b) Montrer qu'il existe un unique élément $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\quad \int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\, P(x_k)$$

(on pourra procéder par analyse-synthèse en se servant de la base $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$).

Désormais, pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k(t)\; p(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2 Dans cette question $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont réels}}$ et f est une fonction numérique continue sur $[a,b]$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b) On pose $P_f = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\; L_k$. Montrer que P_f est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P_f(x_k) = f(x_k)$.

Ainsi pourrons-nous approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_a^b P_f(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$. La question suivante consiste à trouver un majorant de l'erreur résultant de cette approximation.

Q3 Ici a et b sont encore deux réels et f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

On pose $M_n = \operatorname*{Sup}\limits_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)| = \operatorname*{Max}\limits_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)|$ et pour tout élément t de $[a,b]$, $g(t) = f(t) - P_f(t) - A\,U(t)$ où A est un réel.

a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et que pour tout t dans $[a,b]$

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - A\; n!$$

b) $\boxed{\text{On fixe } x}$ dans $[a,b] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Trouver A pour que $g(x) = 0$ (faire simple). On suppose désormais que A a cette valeur. Ainsi x_1, x_2, ..., x_n et x sont $n+1$ zéros distincts de g.

c) Montrer par récurrence que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $g^{(k)}$ possède au moins $n-k+1$ zéro(s) dans $]a,b[$ (utiliser Rolle).

d) Montrer alors que : $\exists \alpha_x \in]a,b[,\ f(x)-P_f(x)=\dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!}\,U(x)$.

Montrer que ceci vaut encore si x appartient à $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

e) Montrer enfin que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^n a_k f(x_k)\right|\leqslant \dfrac{M_n}{n!}\displaystyle\int_a^b |U(t)|p(t)\,\mathrm{d}t$.

PARTIE II

On rappelle qu'un polynôme non nul est unitaire ou normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

On garde les notations de la partie précédente. En particulier $U=(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)$ et $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est toujours l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^n a_k\,P(x_k).$$

Le but de cette partie est de voir de quelle manière on peut choisir les points x_1, x_2, ..., x_n pour que la formule précédente soit encore vraie pour les éléments de $\mathbb{R}_{n-1+q}[X]$ avec q le plus grand possible et de voir ensuite les effets de l'amélioration de la formule sur l'approximation étudiée dans I Q3. On pourra observer que les outils développés dans le cours d'algèbre bilinéaire font ici le maximum.

Q1 Si (P,Q) est un couple d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose :

$$<P,Q>=\int_a^b P(t)\,Q(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

Q2 Ici q est dans $\mathbb{N}^*$ et on suppose que :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1+q}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^n a_k\,P(x_k).$$

a) Montrer alors que : $\forall k\in[\![0,q-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^i\,U(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t=0$. En déduire que U un polynôme normalisé (ou unitaire) de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

b) On suppose que $q>n$. Utiliser ce qui précède pour montrer que U (ou $<U,U>$) est nul et en déduire une contradiction !

Ainsi on ne peut espérer plus que $q=n$! Autrement dit au mieux on ne pourra étendre la formule de IQ1.b qu'aux éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Montrons que le mieux est possible.

Q3 a) Soit r un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'orthogonal de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}_r[X]}$ est une droite vectorielle que nous noterons D_r.

En déduire qu'il existe un polynôme normalisé (ou unitaire) P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ et un seul orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$. Montrer que le degré de P_r est r.

b) On pose $P_0=1$. Montrer que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, $(P_0,P_1,\dots,P_m)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Utiliser Q2a) pour montrer que $\boxed{\text{si}}$: $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$ $\boxed{\text{alors}}$ x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n.

b) Réciproquement on suppose que x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n (notons que pour l'instant rien n'indique que P_n admet n zéros distincts entre a et b...).
Soient P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, Q et R le quotient et le reste dans la division de P par P_n.

Comparer $P(x_k)$ et $R(x_k)$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\;p(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\;p(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que : $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$. Conclure.

PARTIE III

Dans cette partie on se propose d'établir une formule de récurrence permettant d'obtenir les P_r, de montrer que P_n admet n racines réelles distinctes appartenant à l'intervalle $]a,b[$ et de revenir sur l'approximation étudiée dans IQ3.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ On rappelle que $(P_r)_{r\geqslant 0}$ est une suite d'éléments unitaires de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux orthogonaux et que P_r est de degré r pour tout élément r de $\mathbb{N}$. Ici m appartient à $\mathbb{N}^*$ (ou $[\![2,+\infty[\![$ si vous y tenez).

a) Montrer que XP_m est combinaison linéaire de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_m, P_{m+1})$.
Montrer en fait qu'il existe trois réels α_m, β_m et γ_m tels que :

$$XP_m = \alpha_m\;P_{m-1} + \beta_m\;P_m + \gamma_m\;P_{m+1}$$

(prendre i dans $[\![0, m-2]\!]$ montrer que $< XP_m, P_i >=< P_m, XP_i >= 0$ et utiliser ce qui précède).

b) Montrer que : $\gamma_m = 1$, $\beta_m = \dfrac{< XP_m, P_m >}{||P_m||^2}$ et $\alpha_m = \dfrac{||P_m||^2}{||P_{m-1}||^2}$.

En déduire que :
$P_{m+1} = \left(X - \dfrac{< XP_m, P_m >}{||P_m||^2}\right)\;P_m - \dfrac{||P_m||^2}{||P_{m-1}||^2}\;P_{m-1}$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ s est le nombre de racines d'ordre de multiplicité impair de P_n appartenant à $]a,b[$.

Si $s = 0$ on pose $P = 1$. Dans le cas contraire on pose $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X - y_i)$ où y_1, y_2, ..., y_s sont les racines d'ordre de multiplicité impair de P_n appartenant à $]a,b[$ $(y_1 < y_2 < \cdots < y_s)$.

Justifier rapidement que PP_n garde un signe constant sur $]a,b[$ et que ce polynôme n'est pas nul.

En déduire que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,P_n(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas nul et donc que $s = n$. Conclure.

Dans la suite x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Dans cette question a et b sont réels et f est une fonction numérique dérivable sur $[a,b]$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\;Q_f(x_k) = f(x_k) \quad \text{et} \quad Q'_f(x_k) = f'(x_k)$$

(on pourra sans doute établir un isomorphisme entre $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2n}$)

b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b Q_f(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$.

c) Montrer que $Q_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\Big(f'(x_i) - 2f(x_i) L_i'(x_i) \Big) (X - x_i)\ L_i^2 \right]$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Dans cette question a et b sont réels et f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a, b]$.

On pose $M_{2n} = \operatorname*{Sup}_{t \in [a,b]} |f^{(2n)}(t)| = \operatorname*{Max}_{t \in [a,b]} |f^{(2n)}(t)|$ et pour tout élément t de $[a, b]$, $h(t) = f(t) - Q_f(t) - A\, P_n^2(t)$ où A est un réel.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a, b]$ et préciser $h^{(2n)}$.

b) On fixe x dans $[a, b] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Après avoir choisi A de manière à ce que $h(x) = 0$, montrer que h' possède au moins $2n$ zéros dans $]a, b[$. Montrer que $h^{(2n)}$ admet au moins un zéro dans $]a, b[$.

Montrer que : $\forall x \in [a, b],\ \exists \beta_x \in]a, b[,\ f(x) - Q_f(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!}\ P_n^2(x)$.

c) Montrer enfin que $\left| \displaystyle\int_a^b f(x) p(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \right| \leqslant \dfrac{M_{2n}\, \|P_n\|^2}{(2n)!}$.

PARTIE I

(Q0) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists q \in \mathbb{N}$, $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$, $P = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k X^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^k p(t)\,dt$ converge donc $\int_a^b \sum_{k=0}^{q} \alpha_k t^k p(t)\,dt$ converge ainsi $\int_a^b P(t)p(t)\,dt$ est convergente. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)\,dt$ existe.

(Q1) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ sont des zéros de $\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - x_k) = U_i$

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $L_i(x_j) = \dfrac{1}{U_i(x_i)} U_i(x_j) = 0$.

De plus $L_i(x_i) = \dfrac{1}{U_i(x_i)} U_i(x_i) = 1$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$.

Montrons que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i\right)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{L_i(x_j)}_{=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases}} = \alpha_j$; $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_j = 0$.

$(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est libre.

Notons encore que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - x_k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n éléments et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ donc $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$.

$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$

Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ sont : $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$.

b) Analyse / Unicité. - Supposons que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\int_a^b L_i(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k L_i(x_k) = a_i$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \int_a^b L_i(t)p(t)\,dt$. Ceci montre l'unicité de $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Synthèse / Existence. - Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \int_a^b L_i(t)p(t)\,dt$. Montrons que :

$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$. $\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k(t) p(t)\,dt$

$\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \int_a^b L_k(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$. Ceci achève de montrer l'existence.

$\exists!\,(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_a^b P(t)p(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

le respect

Q2 a) f est continue sur $[a,b]$. $\exists M\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\in[a,b],\ |f(t)|\le M$.

$\forall t\in]a,b[,\ |f(t)p(t)|\le M|p(t)|=Mp(t)=M\,t^0p(t)$

$\int_a^b Mt^0p(t)\,dt$ converge et $|fp|$ est positive donc $\int_a^b |f(t)p(t)|\,dt$ converge.

$\int_a^b f(t)p(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

b) $P_f=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k$ appartient à $\mathrm{Vect}(L_1,L_2,\dots,L_n)=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ P_f(x_i)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k(x_i)=f(x_i)$.

Ainsi P_f est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui coïncide avec f en $x_1,x_2,\dots,x_n$. Montrons que c'est le seul. Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P_f(x_k)=f(x_k)$.

$P_f-P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ (P_f-P)(x_k)=f(x_k)-f(x_k)=0$.

P_f-P appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et admet au moins n racines donc $P_f-P=0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$. $P=P_f$.

$P_f=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P_f(x_k)=f(x_k)$.

Q3 a) f, P_f et U sont de classe C^n sur $[a,b]$ donc $g=f-P_f-AU$ aussi $(A\in\mathbb{R})$.

$P_f\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P_f^{(n)}=0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

$U=\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$. $\deg U=n$ et le coefficient de X^n dans U est 1, ainsi $U^{(n)}$ est le polynôme constant $n!$

g est de classe C^n sur $[a,b]$ et $g^{(n)}=f^{(n)}-A\,n!$

b) $g(x)=0 \iff f(x)-P_f(x)-AU(x)=0 \underset{U(x)\neq 0}{\iff} A=\dfrac{f(x)-P_f(x)}{U(x)}$

$g(x)$ est nul si et seulement si : $A=\dfrac{f(x)-P_f(x)}{U(x)}$.

c) * $\{x_1,x_2,\dots,x_n,x\}$ est de cardinal $n+1$. $\{x_1,x_2,\dots,x_n,x\}=\{y_1,y_2,\dots,y_{n+1}\}$ avec $a\le y_1<y_2<\dots<y_{n+1}\le b$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. g est continue et dérivable sur $[y_i,y_{i+1}]$. De plus $g(y_i)=g(y_{i+1})(=0)$.

Rolle montre que $\exists z_i\in]y_i,y_{i+1}[,\ g'(z_i)=0$.

Ainsi $z_1,z_2,\dots,z_n$ sont n zéros de g' appartenant à $]a,b[$. La propriété est vraie pour $k=1$.

* Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Soient $z_1, z_2, \dots, z_{n-k+1}$ $n-k+1$ zéros de $g^{(k)}$ tels que : $a < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-k+1} < b$.

Soit $i \in [\![1, n-k]\!]$. $g^{(k)}$ est dérivable sur $[z_i, z_{i+1}]$ et $g^{(k)}(z_i) = g^{(k)}(z_{i+1}) (=0)$.

Rolle montre que $\exists t_i \in]z_i, z_{i+1}[$, $g^{(k+1)}(t_i) = 0$

$t_1, t_2, \dots, t_{n-k}$ sont donc $n-k = n-(k+1)+1$ zéros de $g^{(k+1)}$; appartenant à $]a,b[$.

Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $g^{(k)}$ possède au moins $n-k+1$ zéro(s) dans $]a,b[$.

d) D'après ce qui précède $g^{(n)}$ possède au moins un zéro α_x dans $]a,b[$.

Donc $g^{(n)}(\alpha_x) = 0$; $f^{(n)}(\alpha_x) = A\, n!$ or $A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$.

Ainsi $f(x) - P_f(x) = A\, U(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

$\exists \alpha_x \in]a,b[$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

Si $x = x_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x) - P_f(x) = 0$ et $U(x) = 0$.

Ainsi si $x = x_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} U(x)$ pour tout $\alpha \in]a,b[$!

Finalement : $\forall x \in [a,b]$, $\exists \alpha_x \in]a,b[$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

e) Notons que : $\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)dt - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) = \int_a^b f(t)p(t)dt - \int_a^b P_f(t)p(t)dt = \int_a^b (f(t) - P_f(t))p(t)dt$

Soit $x \in [a,b]$. $\exists \alpha_x \in]a,b[$, $|f(x) - P_f(x)| <= \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

$|f(x) - P_f(x)| = \dfrac{1}{n!} |f^{(n)}(\alpha_x)||U(x)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |f^{(n)}(\alpha_x)$. $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - P_f(x)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |U(x)|$

$\forall x \in]a,b[$, $|f(x)p(x) - P_f(x)p(x)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |U(x)||p(x)| = \dfrac{M_n}{n!} |U(x)|\, p(x)$.

Or $\displaystyle\int_a^b \frac{M_n}{n!} |U(x)|\, p(x)$ dx converge car U est continue sur $[a,b]$.

Ainsi $\displaystyle\int_a^b |f(x)p(x) - P_f(x)p(x)|$ dx converge ; $\displaystyle\int_a^b (f(x) - P_f(x))p(x)dx$ est donc absolument convergente.

Il tout permet d'écrire que : $\displaystyle\left|\int_a^b (f(x) - P_f(x))p(x)dx\right| \leq \int_a^b |(f(x) - P_f(x))p(x)|dx \leq \int_a^b \frac{M_n}{n!} |U(x)|\, p(x) dx$.

Finalement : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)p(x)dx - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)\right| \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |U(x)|\, p(x) dx$

ou : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)p(t)dt - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)\right| \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |U(t)|\, p(t) dt$.

PARTIE II

Q1 Notons tout d'abord que si P et Q ~~sont~~ deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, $PQ \in \mathbb{R}[X]$ et par conséquent $\int_a^b P(t)Q(t)p(t)\,dt$ existe (I Q 0).

Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\langle \lambda P + Q, R\rangle = \int_a^b (\lambda P+Q)(t)R(t)p(t)\,dt = \int_a^b (\lambda P(t)R(t)p(t) + Q(t)R(t)p(t))\,dt$

$$= \lambda \int_a^b P(t)R(t)p(t)\,dt + \int_a^b Q(t)R(t)p(t)\,dt = \lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle \quad (1)$$

- $\langle Q,P\rangle = \int_a^b Q(t)P(t)p(t)\,dt = \int_a^b P(t)Q(t)p(t)\,dt = \langle P,Q\rangle \quad (2)$

- $\forall t \in \mathbb{R}, (P(t))^2 \geq 0$. $\forall t \in]a,b[, (P(t))^2 p(t) \geq 0$; $\langle P,P\rangle = \int_a^b (P(t))^2 p(t)\,dt \geq 0 \quad (3)$.

Supposons $\langle P,P\rangle = 0$. Soit $(u,v) \in]a,b[$ tel que $u<v$.

$0 \leq \int_u^v P^2(t)p(t)\,dt \leq \int_a^b P^2(t)p(t)\,dt = 0$ car $\forall t \in]a,b[, P^2(t)p(t) \geq 0$.

Ainsi $P^2 p$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[u,v]$. $P^2 p$ est nulle sur $[u,v]$.

$\forall x \in [u,v], P^2(x)p(x) = 0$; $\forall x \in [u,v], P(x) = 0$ (p est strictement positive sur $]a,b[$).

P admet donc une infinité de 0 ; $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad (4)$

Cl. : (1), (2), (3) et (4) montrent que $\underline{\langle \cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

Q2 a) Soit $i \in [\![0,q-1]\!]$. $X^i U \in \mathbb{R}_{n-1+q}[X]$ ($\deg U = n$).

donc $\int_a^b t^i U(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^i U(x_k) = 0$.

car $\forall k \in [\![1,n]\!], U(x_k) = 0$ car $U = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$.

$\underline{\underline{\forall i \in [\![0,q-1]\!], \int_a^b t^i U(t)p(t)\,dt = 0.}}$

donc $\forall i \in [\![0,q-1]\!]$, $\langle X^i, U\rangle = 0$ et par conséquent : $\forall P \in \mathbb{R}_{q-1}[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^{q-1}), \langle P, U\rangle = 0$

$\underline{U \text{ est donc orthogonal à } \mathbb{R}_{q-1}[X]}$. De plus $U = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ donc U est unitaire de degré n.

Finalement $\underline{U \text{ est un polynôme unitaire de } \mathbb{R}_n[X] \text{ orthogonal à } \mathbb{R}_{q-1}[X]}$

b) On suppose $q > n$. $q-1 \geqslant n$ donc $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{q-1}[X]$.

Ainsi $U \in \mathbb{R}_{q-1}[X] \cap (\mathbb{R}_{q-1}[X])^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$; alors $U = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce noter avec vu que $\deg U = n$!

Ainsi si $q \in \mathbb{N}^*$ et si $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1+q}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(u_k)$ alors $q \leqslant n$

Q3 a) $r \in \mathbb{N}^*$. $\dim \mathbb{R}_r[X] = r+1$ et $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = r$ donc <u>l'orthogonal de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_r[X]$ est une droite vectorielle</u> que nous noterons D_r

Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ et un seul orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ revient à montrer que D_r possède un polynôme unitaire et un seul.

Soit S un élément non nul de D_r, p son degré et α_p le coefficient de X^p dans S. $D_r = \mathrm{Vect}(S)$. Soit P un élément de D_r ; $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda S$.

P unitaire $\Leftrightarrow \lambda \alpha_p = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\alpha_p}$.

Ainsi $\frac{1}{\alpha_p} S$ est l'unique polynôme unitaire de D_r.

<u>Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme unitaire P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$.</u>

Supposons que $\deg P_r < r$; alors $P_r \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ et P_r est orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ donc P_r est nul ; ceci n'est pas possible car P_r est unitaire.

Ainsi <u>$\deg P_r = r$.</u>

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $\deg P_k = k$. $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une famille de $\mathbb{R}_m[X]$ constituée de polynômes de degrés échelonnés ; ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une famille libre de $m+1$ éléments de $\mathbb{R}_m[X]$ qui est de dimension $m+1$.

Finalement $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Montrons qu'elle est orthogonale.

Soit $(i,j) \in [\![0,m]\!]$ tel que $i \neq j$.

Si $i < j$: $i \leqslant j-1$ donc P_j est orthogonal à P_i car $P_i \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Si $i > j$: $j \leqslant i-1$ donc P_i ———— P_j — $P_j \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$.

Finalement <u>$(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$.</u>

Q4 a) Supposons que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Q 2c) appliquée avec $q = n$ montre que U est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; par conséquent $U = P_n$. Ainsi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n.

Si $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$ alors $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n.

b) $P = QP_n + R$ avec $\deg R < \deg P_n = n$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(x_k) = Q(x_k)P_n(x_k) + R(x_k) \underset{P_n(x_k)=0}{=} R(x_k)$. $\underline{\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(x_k) = R(x_k)}$.

$QP_n = P - R$; $\deg P \leq 2n-1$ et $\deg R < n$ donc $\deg(QP_n) \leq 2n-1$.

$\deg(QP_n) = \deg Q + \deg P_n = \deg Q + n \leq 2n-1$; $\deg Q \leq n-1$. $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \int_a^b Q(t)P_n(t)p(t)\,dt + \int_a^b R(t)p(t)\,dt = \underbrace{\langle Q, P_n\rangle}_{=0 \text{ car } P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \int_a^b R(t)p(t)\,dt$.

$\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \int_a^b R(t)p(t)\,dt$.

Puis $\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \int_a^b R(t)p(t)\,dt \underset{R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k R(x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Ainsi si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Par conséquent :

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k) \iff x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n.

PARTIE III

Q1 a) $\deg XP_m = m+1$ et $(P_0, P_1, \dots, P_{m+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

Ainsi XP_m est combinaison linéaire de $(P_0, P_1, \dots, P_{m+1})$

* $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2},\ XP_m = \sum_{k=0}^{m+1} \lambda_k P_k$. $\underline{\text{Soit } i \in [\![0, m-2]\!]}$.

$\langle XP_m, P_i\rangle = \int_a^b tP_m(t)P_i(t)p(t)\,dt = \int_a^b P_m(t)\,tP_i(t)p(t)\,dt = \langle P_m, XP_i\rangle$.

* il serait préférable d'écrire $(\lambda_0^{(m)}, \lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(m)})$ ... mais ne complique pas.

Or $\deg XP_i = i+1$; comme $i \in [\![0, n-2]\!]$, $XP_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

donc $\langle XP_n, P_i \rangle = \langle P_n, XP_i \rangle = 0$.

Ainsi $0 = \langle XP_n, P_i \rangle = \langle \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k, P_i \rangle \underset{\uparrow}{=} \lambda_i \langle P_i, P_i \rangle = \lambda_i \|P_i\|^2$

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale

$\lambda_i \|P_i\|^2 = 0$ donc $\lambda_i = 0$ car $P_i \neq 0$.

Ainsi $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $\lambda_i = 0$. $XP_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1}$.

Donc $\exists (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XP_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}$.

XP_n, P_{n-1}, P_n et P_{n+1} sont des polynômes unitaires de degrés respectifs $n+1$, $n-1$, n et $n+1$.

Par identification il vient alors : $\gamma_n = 1$.

$$\langle XP_n, P_n \rangle = \langle \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}, P_n \rangle = \alpha_n \underbrace{\langle P_{n-1}, P_n \rangle}_{=0} + \beta_n \langle P_n, P_n \rangle + \gamma_n \underbrace{\langle P_{n+1}, P_n \rangle}_{=0}.$$

Donc $\langle XP_n, P_n \rangle = \beta_n \|P_n\|^2$.

$$\beta_n = \frac{\langle XP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2}.$$

$$\langle XP_n, P_{n-1} \rangle = \langle \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \alpha_n \|P_{n-1}\|^2 + 0 + 0.$$

Donc $$\alpha_n = \frac{\langle XP_n, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{\langle P_n, XP_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}.$$

Or $XP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k$ car $XP_{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ici encore $\gamma_n = 1$ car XP_{n-1} est unitaire de degré n et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est unitaire de degré k.

Donc $\langle XP_{n-1}, P_n \rangle = \langle P_n, P_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \underbrace{\langle P_k, P_n \rangle}_{=0} = \|P_n\|^2$. $\alpha_n = \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.

$$XP_n = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1} + \frac{\langle XP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} P_n + P_{n+1}.$$

$$P_{n+1} = \left(X - \frac{\langle XP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} \right) P_n - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1}.$$

(Q2) Rappelons qu'un élément P non nul de $\mathbb{R}[X]$ change de signe en $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si α est une racine de P d'ordre impair.

Par construction PP_n n'a pas de racine d'ordre impair dans l'intervalle $]a,b[$.

Par conséquent <u>PP_n garde un signe constant sur $]a,b[$.</u>

P et P_n n'étant pas nuls : <u>PP_n n'est pas nul.</u>

$PP_n p$ est une fonction continue sur $]a,b[$ et qui y garde un signe constant ; de plus cette fonction n'est pas la fonction nulle. Toute cela montre que : $\int_a^b P(t)P_n(t)p(t)dt \neq 0$

Donc $\langle P, P_n \rangle \neq 0$.

Si $\deg P < n$ alors $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\langle P, P_n \rangle = 0$! Donc $\deg P = n$. <u>$s = n$.</u>

Ainsi P_n admet exactement n racines d'ordre impair dans $]a,b[$. Comme P_n est de degré n on en déduit que : P_n admet n racines distinctes et que ces racines sont dans $]a,b[$.

<u>P_n admet n racines distinctes toutes situées dans $]a,b[$.</u>

<u>Remarque</u>.. Dans ce qui précède nous avons prouvé que :

$$\exists!(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \exists!\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\ ]a,b[^n \text{ tels que :}$$

$$\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\quad \int_a^b P(t)p(t)dt=\sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k).$$ Notons que :

* $\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k=\int_a^b L_k(t)p(t)dt$

et * $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de l'unique polynôme unitaire P_n appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(Q3) a) Posons $\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\varphi(P)=(P(x_1),P(x_2),\dots,P(x_n),P'(x_1),P'(x_2),\dots,P'(x_n))$.

- φ est une application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q)\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]^2$.

$\varphi(\lambda P+Q)=((\lambda P+Q)(x_1),\dots,(\lambda P+Q)(x_n),(\lambda P+Q)'(x_1),\dots,(\lambda P+Q)'(x_n))$.

$\varphi(\lambda P+Q)=(\lambda P(x_1)+Q(x_1),\dots,\lambda P(x_n)+Q(x_n),\ \lambda P'(x_1)+Q'(x_1),\dots,\lambda P'(x_n)+Q'(x_n))$

$\varphi(\lambda P+Q)=\lambda(P(x_1),\dots,P(x_n),P'(x_1),\dots,P'(x_n))+(Q(x_1),\dots,Q(x_n),Q'(x_1),\dots,Q'(x_n))$

$\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

Ainsi φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Montrons alors que φ est un isomorphisme. Il suffit de prouver que φ est injective car $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n < +\infty$!

Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^{2n}}$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(x_k) = P'(x_k) = 0$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, x_k est une racine de P d'ordre au moins 2.

Ainsi P admet au moins $2n$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Or $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, donc P est nul.

$\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}\}$. Ceci achève de prouver que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(x_k) = f(x_k)$ et $P'(x_k) = f'(x_k)$

$$\Updownarrow$$

$$(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)) = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n))$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(P) = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)).$$

$$\Updownarrow$$

$$P = \varphi^{-1}((f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)))$$

Par conséquent il existe un unique élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\begin{cases} Q_f(x_k) = f(x_k) \\ \text{et} \\ Q_f'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_a^b Q_f(t)\,p(t)\,dt \overset{Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k Q_f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$. $\qquad \displaystyle\int_a^b Q_f(t)\,p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$.

c) Posons $H = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i^2 + \sum_{i=1}^{n} [(f'(x_i) - 2f(x_i) L_i'(x_i))(X - x_i) L_i^2]$. Montrons que : $H = Q_f$.

→ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\deg L_i^2 = 2(n-1) = 2n-2$ et $\deg((X-x_i)L_i^2) = 2n-1$ donc $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

→ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $L_i^2(x_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \\ 0 \text{ si } k \neq i \end{cases}$ et $(x_k - x_i) L_i^2(x_k) = 0$

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $H(x_k) = f(x_k)$.

→ $H' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, 2 L_i' L_i + \sum_{i=1}^{n} \left[(f'(x_i) - 2f(x_i) L_i'(x_i))(L_i^2 + (X - x_i)\, 2 L_i' L_i) \right]$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $2 L_i'(x_k) L_i(x_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 2L_k'(x_k) \text{ si } k = i \end{cases}$ et $(L_i^2 + (X - x_i)\, 2 L_i' L_i)(x_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}$

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $H'(x_k) = f(x_k)\, 2 L_k'(x_k) + (f'(x_k) - 2f(x_k) L_k'(x_k)) = f'(x_k)$.

Finalement $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $H(x_k) = f(x_k)$, $H'(x_k) = f'(x_k)$; donc $H = Q_f$.

Ainsi $$Q_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(f'(x_i) - 2 f(x_i) L_i'(x_i) \right) (X - x_i) L_i^2 \right].$$

Q4 a) f, Q_f et P_n^2 sont de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a,b]$ donc $h = f - Q_f - A P_n^2$ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a,b]$.

$Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ donc $Q_f^{(2n)} = 0$. P_n^2 est unitaire de degré $2n$ donc $(P_n^2)^{(2n)} = (2n)!$

Ainsi $h^{(2n)} = f^{(2n)} - A(2n)!$

b) $x \in [a,b] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - Q_f(x) - A P_n^2(x) \Leftrightarrow A = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{P_n^2(x)}$. Dans la suite $A = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{P_n^2(x)}$.

et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $h(x_k) = f(x_k) - Q_f(x_k) - A P_n^2(x_k) = f(x_k) - f(x_k) - 0 = 0$.

$x, x_1, \dots, x_n$ sont $n+1$ zéros distincts de h. $\{x, x_1, \dots, x_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$ avec $a \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{n+1} \leq b$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. h est dérivable sur $[u_i, u_{i+1}]$ et $h(u_i) = h(u_{i+1}) = 0$; $\exists v_i \in]u_i, u_{i+1}[$, $h'(v_i) = 0$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sont n zéros distincts de h' n'appartenant pas à $\{a, b, x_1, x_2, \dots, x_n, x\}$

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $h'(x_k) = f'(x_k) - Q_f'(x_k) - 2A P_n'(x_k) P_n(x_k) = f'(x_k) - f'(x_k) - 0 = 0$.

Ainsi h' s'annule au moins $2n$ fois sur $]a,b[$ (en $v_1, v_2, \dots, v_n, x_1, x_2, \dots, x_n$)

Une récurrence analogue à celle de I Q3 c) montre que pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $h^{(k)}$ s'annule au moins $2n-k+1$ fois dans $]a,b[$.

Ainsi $h^{(2n)}$ s'annule au moins une fois dans $]a,b[$.

$\exists \beta_x \in]a,b[$, $h^{(2n)}(\beta_x) = 0$. $f^{(2n)}(\beta_x) = A \times (2n)!$

$$\frac{f(x) - Q_f(x)}{P_n^2(x)} = A = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} \ ; \quad f(x) - Q_f(x) = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x).$$

$\forall x \in [a,b] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\exists \beta_x \in]a,b[$, $f(x) - Q_f(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x)$

ceci est clairement vrai pour $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ car dans ce cas : $f(x) - Q_f(x) = 0$ et $P_n^2(x) = 0$.

$$\forall x \in [a,b], \exists \beta_x \in]a,b[, \quad f(x) - Q_f(x) = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x).$$

c) Soit $x \in [a,b]$. $\exists \beta_x \in]a,b[$, $f(x) - \varphi_f(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x)$

$$|f(x) - \varphi_f(x)| = \frac{|f^{(2n)}(\beta_x)|}{(2n)!} |P_n^2(x)| \leqslant \frac{M_{2n}}{(2n)!} P_n^2(x).$$

$\forall x \in]a,b[$, $|f(x)p(x) - \varphi_f(x)p(x)| \leqslant \dfrac{M_{2n}}{(2n)!} P_n^2(x)\, p(x)$.

$\displaystyle\int_a^b \frac{M_{2n} P_n^2(x)}{(2n)!} p(x)\,dx$ converge car $\dfrac{M_{2n} P_n^2}{(2n)!}$ est continue sur $[a,b]$; ainsi :

$\displaystyle\int_a^b |f(x)p(x) - \varphi_f(x)p(x)|\,dx$ converge. $\displaystyle\int_a^b (f(x)p(x) - \varphi_f(x)p(x))\,dx$ est donc absolument convergente ce qui permet d'écrire :

$$\left|\int_a^b (f(x)p(x) - \varphi_f(x)p(x))\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)p(x) - \varphi_f(x)p(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \frac{M_{2n}}{(2n)!} P_n^2(x)p(x)\,dx = \frac{M_{2n} \|P_n\|^2}{(2n)!}$$

$$\left|\int_a^b f(x)p(x)\,dx - \int_a^b \varphi_f(x)p(x)\,dx\right| \leqslant \frac{M_{2n} \|P_n\|^2}{(2n)!}$$ (les deux intégrales convergent).

$$\left|\int_a^b f(x)p(x)\,dx - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)\right| \leqslant \frac{M_{2n} \|P_n\|^2}{(2n)!}.$$

Ceci achève ce petit problème sur la méthode de Gauss.

Reste des pistes à explorer. En particulier si f est continue sur $[a,b]$ on peut s'intéresser à la convergence de la méthode. En clair si l'on pose $I_n = \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$ a-t-on $\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_a^b f(t)p(t)\,dt$? La réponse est oui, ... grâce à Weierstrass (toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes).

On pourra profiter de l'occasion pour revoir les "polynômes orthogonaux classiques".

$a=-1$ $b=1$ $p(x)=1$: Polynômes de Legendre.

$a=-1$ $b=1$ $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Polynômes de Tchebychev.

$a=0$, $b=+\infty$ $p(x)= e^{-x}$: Polynômes de Laguerre

$a=-\infty$, $b=+\infty$ $p(x) = e^{-x^2}$: Polynômes de Hermite

...

J.F.C.