EXERCICE 67

JFC

Exercice **Développement en série de Fourier.** ESCP 98

E est l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π−périodique. Pour tout couple (f, g) d'éléments de E on pose :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourrait sans doute se rappeler que : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big]$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. On notera $||.||$ la norme associée.

Q3. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$ on considère $c_n : x \to \cos(nx)$.

a) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$, c_n appartient à E.

b) p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$. Calculer $< c_p, c_q >$ (TROIS cas).

c) Montrer que $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ est une famille libre de E pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q4. λ est un réel tel que $0 < |\lambda| < 1$ et $f : x \to \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$.

Montrer que f appartient à E (ne pas oublier de montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Q5. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n =< c_n, f >$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2} + a_n) = 0$.

b) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 (on se contentera d'utiliser le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$).

c) Déduire des deux résultats précédents l'existence d'un réel α tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha\lambda^n$.

d) Calculer $(1+\lambda^2)a_0 - 2\lambda a_1$, et en déduire la valeur de α.

Q6. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< c_k, f >}{||c_k||^2}\, c_k$.

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $S_n(x)$ est convergente et calculer sa limite (on calculera $S_n(x)$ en remarquant que $\cos(kx)$ est la partie réelle de $(e^{ix})^k$ et on passera à la limite).

Q1 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel E' des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- E est contenu dans E'
- $f_0 : x \mapsto 0$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique donc $f_0 \in E$ et ainsi E n'est pas vide.
- Soit $(f,g) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda f+g$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f+g)(x+2\pi) = \lambda f(x+2\pi) + g(x+2\pi) \underset{(f,g)\in E^2}{=} \lambda f(x)+g(x) = (\lambda f+g)(x)$; $\lambda f+g$ est donc 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\lambda f+g \in E$. Ceci achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel de E'.

Alors $\underline{E \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}}$.

Q2 Soit $(f,g,h) \in E^3$ et λ un réel.

- $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ existe car f et g sont en particulier continues sur $[0,2\pi]$ donc fg l'est également.

$\underline{\langle f,g\rangle \text{ est un réel !}}$ (0)

- $\langle \lambda f+g, h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda f+g)(t)\,h(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda f(t)h(t)+g(t)h(t))\,dt = \lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)h(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)h(t)\,dt$

$\underline{\langle \lambda f+g, h\rangle = \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle}$. (1)

- $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)f(t)\,dt = \langle g,f\rangle$. $\underline{\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle}$. (2)

- $\forall t \in [0,2\pi]$, $f^2(t) \geqslant 0$ donc $\langle f,f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \geqslant 0$; $\underline{\langle f,f\rangle \geqslant 0}$ (3)

- Supposons $\langle f,f\rangle = 0$. Alors $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt = 0$. f^2 est continue et positive sur $[0,2\pi]$ et $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt = 0$; alors f^2 est nulle sur $[0,2\pi]$; f également.

$\forall t \in [0,2\pi]$, $f(t) = 0$.

V1 Comme f est 2π-périodique, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

V2 Soit $u \in \mathbb{R}$. Posons $n = E\left(\frac{u}{2\pi}\right)$. $n \leq \frac{u}{2\pi} < n+1$; $n \times 2\pi \leq u < n \times 2\pi + 2\pi$;

$0 \leq u - n\times 2\pi < 2\pi$; $u - n\times 2\pi \in [0, 2\pi[\subset [0, 2\pi]$.

Ainsi $f(u - n \times 2\pi) = 0$ $(\forall t \in [0, 2\pi], f(t) = 0)$.

Alors $f(u) = f(u - n\times 2\pi + n \times 2\pi) \underset{\uparrow}{=} f(u - n\times 2\pi) = 0$
f est périodique de période 2π

Finalement : $\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = 0$. f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0_E$. (4)

(0), (1), (2), (3) et (4) montrent que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q3) C_n est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $C_n(x + 2\pi) = \cos(n(x + 2\pi)) = \cos(nx + n\times 2\pi) = \cos(nx)$; C_n est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\underline{C_n \in E}$.

b) $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. $\langle C_p, C_q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos((p+q)t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos((p-q)t)\,dt\right]$

1er cas : $p \neq q$; alors $p+q \neq 0$ et $p-q \neq 0$.

$$\langle C_p, C_q\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q}\right]_0^{2\pi}\right] = 0$$

2e cas : $p = q \neq 0$; alors $p+q \neq 0$ et $p-q = 0$

$$\langle C_p, C_q\rangle = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt}_{=1}\right] = \frac{1}{2}.$$

3ème cas : $p = q = 0$: $\langle C_p, C_q\rangle = \langle C_0, C_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1^2\,dt = 1$.

Finalement : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\langle C_p, C_q\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{1}{2} & \text{si } p = q \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = q = 0 \end{cases}$.

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\rightarrow$ $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ est une famille orthogonale de E.

$\rightarrow$ $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $C_k \neq 0_E$.

Ainsi $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ est une famille libre de E.

Q4 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1 = (\lambda - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$.

Supposons qu'il existe un réel x tel que : $\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1 = 0$.

Alors $(\lambda - \cos x)^2 + \sin^2 x = 0$ et : $\lambda - \cos x = \sin x = 0$.

Donc $\lambda = \cos x$ et $\sin x = 0$; $\lambda^2 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1$; $\lambda^2 = 1$!!

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1 > 0$.

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos(x+2\pi) + 1} = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1} = f(x)$. f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Finalement $f \in E$.

Q5 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2} + a_n) = \langle (1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2} + C_n), f \rangle$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $[(1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2}+C_n)](t) = (1+\lambda^2)\cos((n+1)t) - \lambda(\cos((n+2)t) + \cos(nt))$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $[(1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2}+C_n)](t) = (1+\lambda^2)\cos((n+1)t) - 2\lambda \cos\left(\dfrac{(n+2)t+nt}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+2)t-nt}{2}\right)$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $[(1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2}+C_n)](t) = (1+\lambda^2 - 2\lambda\cos t)\cos((n+1)t) = \dfrac{1}{f(t)} C_{n+1}(t) = \left(\dfrac{1}{f} C_{n+1}\right)(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $[(1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2}+C_n)](t)\, f(t) = C_{n+1}(t)$

donc $(1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2}+a_n) = \langle (1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2}+C_n), f \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \underbrace{[(1+\lambda^2)C_{n+1} - \lambda(C_{n+2}+C_n)](t) f(t)}_{C_{n+1}(t)}\, dt$

$(1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2}+a_n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} C_{n+1}(t)\,dt = \langle C_{n+1}, C_0 \rangle \underset{n+1 \neq 0\,!}{=} 0$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2}+a_n) = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto \lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et "non nulle" donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 2\pi]$.

$$a_n = \langle C_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(nt)}_{u'} \underbrace{f(t)}_{v}\,dt = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n} f(t)\right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ car } \sin(n \times 2\pi) = \sin(n \times 0) = 0} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} f'(t)\,dt .$$

Donc $|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} f'(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} |\sin(nt)||f'(t)|\,dt \leq \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,dt$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,dt\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

c) $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique : $z \in \mathbb{C}$ et $-\lambda z^2 + (1+\lambda^2) z - \lambda = 0$, a les deux solutions distinctes : λ et $\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha\lambda^n + \beta\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$. Supposons $\beta \neq 0$.

$|\lambda| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - \alpha\lambda^n) = 0 - \alpha \times 0 = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^n = 0$ ce qui exige $\frac{1}{|\lambda|} < 1$ donc $|\lambda| > 1$! Finalement $\beta = 0$.

Ainsi $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha\lambda^n$.

d) $(1+\lambda^2) a_0 - 2\lambda a_1 = \langle (1+\lambda^2) C_0 - 2\lambda C_1, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1+\lambda^2) - 2\lambda\cos t}{\lambda^2 - 2\lambda\cos t + 1}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = 1$.

$(1+\lambda^2) a_0 - 2\lambda a_1 = 1$.

Alors $1 = (1+\lambda^2)\alpha\lambda^0 - 2\lambda\alpha\lambda^1 = (1+\lambda^2 - 2\lambda^2)\alpha$; $\alpha = \frac{1}{1-\lambda^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{1-\lambda^2}\lambda^n$.

Q6) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle C_k, f\rangle}{\|C_k\|^2} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\|C_k\|^2} \cos(kx) = \frac{a_0}{\|C_0\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\|C_k\|^2} \cos(kx).$$

$$S_n(x) = \frac{1}{1-\lambda^2} \times \frac{1}{1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{1-\lambda^2} \times \frac{1}{1/2} \cos kx = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \lambda^k \cos(kx)\right].$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^k \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda^k e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda e^{ix})^k\right) \underset{\substack{\uparrow \\ |\lambda e^{ix}|<1 \text{ donc } \lambda e^{ix} \neq 1}}{=} \mathrm{Re}\left(\lambda e^{ix} \frac{1-(\lambda e^{ix})^n}{1-\lambda e^{ix}}\right)$$

Comme $|\lambda e^{ix}| < 1$: $\lim_{n\to+\infty} (\lambda e^{ix})^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda e^{ix} \frac{1-(\lambda e^{ix})^n}{1-\lambda e^{ix}}\right) = \frac{\lambda e^{ix}}{1-\lambda e^{ix}}$

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda^k \cos(kx)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\lambda e^{ix}}{1-\lambda e^{ix}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda e^{ix}}{1-\lambda e^{ix}} + \frac{\lambda e^{-ix}}{1-\lambda e^{-ix}}\right)$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[1 + 2 \times \frac{1}{2} \frac{\lambda e^{ix} - \lambda^2 + \lambda e^{-ix} - \lambda^2}{|1-\lambda e^{ix}|^2}\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[1 + \frac{2\lambda\cos x - 2\lambda^2}{(1-\lambda\cos x)^2 + (\lambda \sin x)^2}\right] = \frac{1}{1-\lambda^2} \frac{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1 + 2\lambda\cos x - 2\lambda^2}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-\lambda^2} \times \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1} = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1} = f(x).$$

$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x).}}$ Ou $\underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle C_k, f\rangle}{\|C_k\|^2} \cos(kx)}}$

Les spécialistes des séries de Fourier diront...

EXERCICE 68 J.F.C.

Exercice **Formes linéaires d'un espace vectoriel euclidien.**

Q1. E est un espace vectoriel euclidien et f est une application de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que f est une forme linéaire sur E si et seulement si : $\exists ! u \in E,\ \forall v \in E,\ f(v) = <u, v>$.

Q2. $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $<.,.>$ défini par : $\forall (P,Q) \in E^2,\ <P,Q> = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.

On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P(0)$.

a) Montrer que f est une forme linéaire sur E.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément A de E tel que $\forall P \in E,\ f(P) = <A, P>$.

On pourra considérer les ploynômes $P_n = \sqrt{n}\,(1-X)^n$... et CS.

Q1 C.S. Supposons qu'il existe un unique u appartenant à E tel que $\forall v \in E,\ f(v) = \langle u,v\rangle$

- f est une application de E dans $\mathbb{R}$ car $\forall v \in E,\ \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (v,w) \in E^2,\ f(\lambda v + w) = \langle u, \lambda v + w\rangle = \lambda \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle = \lambda f(v) + f(w)$.

  f est linéaire.

Donc f est une forme linéaire sur E.

C.N. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique u dans E tel que $\forall v \in E,\ f(v) = \langle u,v\rangle$ → sachant que f est une forme linéaire sur E

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

- Supposons que u soit un élément de E tel que $\forall v \in E,\ f(v) = \langle u,v\rangle$.

  Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]\ \langle u,e_i\rangle = f(e_i)$. Ainsi $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u,e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i$.

  $u = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i$. D'où l'unicité de u.

- Posons $u = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i$. Posons $\forall v \in E,\ g_u(v) = \langle u,v\rangle$. D'après ce qui précède g_u est une forme linéaire sur E. Montrons que $f = g_u$. f et g_u étant deux formes linéaires sur E, leur égalité sera acquise si elles coïncident sur la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

  $\forall k \in [\![1,n]\!],\ g_u(e_k) = \langle u, e_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \langle e_i, e_k\rangle = f(e_k)$

  $\langle e_i, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

  ceci achève de montrer que $f = g_u$.

Ainsi u est un élément de E tel que $\forall v \in E,\ f(v) = \langle u,v\rangle$.

D'où l'existence de u.

$\exists ! u \in E,\ \forall v \in E,\ f(v) = \langle u,v\rangle$.

<u>Remarque</u>.. On aurait pu obtenir ce résultat en montrant que l'application qui à $u \in E$ associe "$[v \mapsto \langle u,v\rangle]$" est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ (... en remarquant que $\dim E = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$).

(Q2) a) . $\forall P \in E, f(P) = P(0) \in \mathbb{R}$.

. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2, f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda f(P) + f(Q)$.

Ainsi f est une forme linéaire sur E.

b) Supposons qu'il existe A dans E tel que $\forall P \in E, f(P) = \langle A, P \rangle$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} = P_n(0) = f(P_n) = \langle A, P_n \rangle \leq |\langle A, P_n \rangle| \underset{\text{cauchy-Schwarz}}{\leq} \|A\| \, \|P_n\|$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\|^2 = \int_0^1 (P_n(t))^2 dt = n \int_0^1 (1-t)^{2n} dt = \frac{n}{2n+1} \left[-(1-t)^{2n+1} \right] = \frac{n}{2n+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\| = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq \|A\| \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{\|A\|}{\sqrt{2n+1}}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $1 \leq 0$!!

Donc il n'existe pas d'élément A de E tel que $\forall P \in E, f(P) = \langle A, P \rangle$.

Remarque : Ainsi le résultat obtenu dans Q1 ne vaut pas en dimension quelconque.

Exercice ESCP 2004 2.8 **Symétrie orthogonale. Endomorphisme orthogonal.**

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $a \in E$ de norme 1. $n \in [\![2, +\infty[\![$.

On désigne par f_a l'application de E dans lui-même définie par : $\forall x \in E, f_a(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$.

Q1. Montrer que f_a est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

Q2. Montrer que f_a est diagonalisable.

Q3. Montrer que f_a est un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

Q4. Montrer que si g est un endomorphisme orthogonal de E, alors $g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$.

Q5. Soit b un vecteur unitaire de E.

a) Montrer que $f_a = f_b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$.

Q1 • Soit $x \in E$. $-2\langle x, a\rangle \in \mathbb{R}$ donc $-2\langle x, a\rangle a \in E$. Alors $x - 2\langle x, a\rangle a \in E$. $f_a(x) \in E$.

<u>f_a est bien une application de E dans E.</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in E^2$.

$f_a(\lambda x + y) = \lambda x + y - 2\langle \lambda x + y, a\rangle a = \lambda x + y - 2(\lambda\langle x, a\rangle + \langle y, a\rangle)a$

$f_a(\lambda x + y) = \lambda x + y - 2\lambda\langle x, a\rangle a - 2\langle y, a\rangle a = \lambda(x - 2\langle x, a\rangle a) + y - 2\langle y, a\rangle a$

$f_a(\lambda x + y) = \lambda f_a(x) + f_a(y)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, f_a(\lambda x + y) = \lambda f_a(x) + f_a(y)$. <u>$f_a$ est linéaire.</u>

Ainsi <u>f_a est un endomorphisme de E.</u>

• Soit $x \in \operatorname{Ker} f_a$. $f_a(x) = 0_E$. Alors $x - 2\langle x, a\rangle a = 0_E$. $x = 2\langle x, a\rangle a$.

donc $\langle x, a\rangle = \langle 2\langle x, a\rangle a, a\rangle = 2\langle x, a\rangle \underbrace{\langle a, a\rangle}_{\langle a, a\rangle = \|a\|^2 = 1} = 2\langle x, a\rangle$.

Alors $\langle x, a\rangle = 0$. Par conséquent $x = 2\langle x, a\rangle a = 0_E$

$\operatorname{Ker} f_a = \{0_E\}$. <u>$f_a$ est injective</u>

Or f_a est un endomorphisme de E et E est de dimension finie.

Par conséquent f_a est bijective.

Finalement <u>f_a est un automorphisme de E.</u>

Soit $x \in E$. Posons $y = f_a^{-1}(x)$.

$x = f_a(y) = y - 2\langle y,a\rangle a$. $y = x + 2\langle y,a\rangle a$.

Alors $\langle y,a\rangle = \langle x,a\rangle + \langle 2\langle y,a\rangle a, a\rangle = \langle x,a\rangle + 2\langle y,a\rangle \underbrace{\langle a,a\rangle}_{=1}$.

$\langle y,a\rangle = \langle x,a\rangle + 2\langle y,a\rangle$. $\langle y,a\rangle = -\langle x,a\rangle$.

Alors $y = x + 2\langle y,a\rangle a = x - 2\langle x,a\rangle a$.

$\forall x \in E,\ f_a^{-1}(x) = x - 2\langle x,a\rangle a$ ou $f_a^{-1} = f_a$.

(Q2) f_a est un endomorphisme et $f_a \circ f_a = f_a \circ f_a^{-1} = Id_E$.

f_a est donc une symétrie vectorielle.

Alors $Sp\, f_a \subset \{-1, 1\}$ et $E = Ker(f_a - Id_E) \oplus Ker(f_a + Id_E)$.

f_a est la symétrie vectorielle par rapport à $Ker(f_a - Id_E)$ parallèlement à $Ker(f_a + Id_E)$.

Soit $x \in E$. $x \in Ker(f_a - Id_E) \Leftrightarrow f_a(x) = x \Leftrightarrow -2\langle x,a\rangle a = 0 \overset{a \neq 0_E}{\Leftrightarrow} \langle x,a\rangle = 0$

$x \in Ker(f_a - Id_E) \Leftrightarrow \langle x,a\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (Vect(a))^\perp$

$Ker(f_a - Id_E) = (Vect(a))^\perp \neq \{0_E\}$. ($\dim Vect(a) = 1$ et $\dim E = n \geq 2$).

Alors $1 \in Sp\, f_a$ et $SEP(f_a, 1) = (Vect(a))^\perp$

Alors $\dim Ker(f_a + Id_E) = \dim E - \dim Ker(f_a - Id_E) = \dim E - \dim (Vect(a))^\perp$

$\dim Ker(f_a + Id_E) = \dim Vect(a) = 1$.

Ainsi $Ker(f_a + Id_E) \neq \{0_E\}$. Alors $-1 \in Sp\, f_a$.

Finalement $Sp\, f_a = \{-1, 1\}$ et donc $E = Ker(f_a - Id_E) \oplus Ker(f_a + Id_E) = SEP(f_a,1) \oplus SEP(f_a,-1)$

f_a est diagonalisable. Notons que $f_a(a) = a - 2\langle a,a\rangle a = a - 2a = -a$.

Alors $a \in Ker(f_a + Id_E)$, $a \neq 0_E$ et $\dim Ker(f_a + Id_E) = 1$. Donc $Ker(f_a + Id_E) = Vect(a)$.

Ainsi $SEP(f_a, -1) = Vect(a)$. f_a est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $(Vect(a))^\perp$.

(Q3) Soit $(x,y)\in E^2$.

$\langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x - 2\langle x,a\rangle a\,,\, y - 2\langle y,a\rangle a\rangle$

$\langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x,y\rangle - 2\langle y,a\rangle\langle x,a\rangle - 2\langle x,a\rangle\langle a,y\rangle + 2\langle x,a\rangle 2\langle y,a\rangle \underbrace{\langle a,a\rangle}_{=1}$

$\langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x,y\rangle - 2\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle - 2\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle + 4\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle$

$\langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ et ceci pour tout (x,y) dans E^2.

<u>f_a est un endomorphisme orthogonal.</u>

(Q4) Soit $x\in E$.

$(g\circ f_a\circ g^{-1})(x) = g(f_a(g^{-1}(x))) = g(g^{-1}(x) - 2\langle g^{-1}(x),a\rangle a)$

$(g\circ f_a\circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) - 2\langle g^{-1}(x),a\rangle g(a) = x - 2\langle g^{-1}(x),a\rangle g(a)$.

g est orthogonal donc $\langle g^{-1}(x),a\rangle = \langle g(g^{-1}(x)), g(a)\rangle = \langle x, g(a)\rangle$.

Ainsi $(g\circ f_a\circ g^{-1})(x) = x - 2\langle x, g(a)\rangle g(a) = f_{g(a)}(x)$.

$\forall x\in E$, $(g\circ f_a\circ g^{-1})(x) = f_{g(a)}(x)$. <u>$g\circ f_a\circ g^{-1} = f_{g(a)}$.</u>

(Q5) a) • Si $a=b$: $f_a = f_b$

• Supposons $a=-b$.

$\forall x\in E$, $f_a(x) = x - 2\langle x,a\rangle a = x - 2\langle x,-b\rangle(-b) = x - 2\langle x,b\rangle b = f_b(x)$.

Alors $f_a = f_b$

• Réciproquement supposons $f_a = f_b$.

(V1) Alors $\mathrm{Vect}(a) = \mathrm{Ker}(f_a + Id_E) = \mathrm{Ker}(f_b + Id_E) = \mathrm{Vect}(b)$.

donc $b\in \mathrm{Vect}(a)$. $\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $b = \lambda a$.

$1 = \|b\| = \|\lambda a\| = |\lambda|\,\|a\| = |\lambda|$. $|\lambda| = 1$, $\lambda = 1$ ou -1. $b = a$ ou $b = -a$.

(V2) $\forall x\in E$, $x - 2\langle x,a\rangle a = f_a(x) = f_b(x) = x - 2\langle x,b\rangle b$.

$\forall x\in E$, $\langle x,a\rangle a = \langle x,b\rangle b$. En particulier $\begin{cases}\langle a,a\rangle a = \langle a,b\rangle b\\ \langle b,a\rangle a = \langle b,b\rangle b\end{cases}$

Alors $a = \langle a, b \rangle b$ et $b = \langle a, b \rangle a$.

$a = (\langle a, b\rangle)^2 a$ et $a \neq 0_E$. Donc $(\langle a, b\rangle)^2 = 1$. $\langle a, b \rangle = 1$ ou -1.

Ainsi $a = b$ ou $-b$.

$f_a = f_b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

b) Soit c un vecteur unitaire.

$$f_a \circ f_c = f_c \circ f_c \Leftrightarrow f_c \circ f_a \circ f_c^{-1} = f_c \underset{Q4}{\overset{f_c \text{ est orthogonal}}{\Leftrightarrow}} f_{f_c(a)} = f_a.$$

$$\|f_c(a)\|^2 = \langle f_c(a), f_c(a) \rangle \underset{f_c \text{ est orthogonal}}{=} \langle a, a \rangle = \|a\|^2 = 1. \text{ Alors } \|f_c(a)\| = 1.$$

$$f_{f_c(a)} = f_a \underset{Q5a) \text{ et } f_c(a) \text{ unitaire}}{\Leftrightarrow} f_c(a) = a \text{ ou } -a \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2\langle a, c \rangle c = a \\ \text{ou} \\ a - 2\langle a, c \rangle c = -a \end{cases}$$

$$\text{Alors } f_a \circ f_c = f_c \circ f_a \Leftrightarrow \begin{cases} -2\langle a, c \rangle c = 0 \\ \text{ou} \\ 2a = 2\langle a, c\rangle c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle a, c \rangle = 0 \\ \text{ou} \\ a = \langle a, c \rangle c \end{cases}$$

$$f_a \circ f_c = f_c \circ f_a \Leftrightarrow \begin{cases} c \in (\mathrm{Vect}(a))^\perp \\ \text{ou} \\ a = \langle a, c \rangle c \end{cases}$$

Si $a = \langle a, c \rangle c$: $1 = \|a\| = |\langle a, c \rangle| \|c\| = |\langle a, c \rangle|$. Alors $|\langle a, c \rangle| = 1$. $a = c$ ou $-c$.

Réciproquement si $a = c$ ou $-c$ on a clairement $a = \langle a, c \rangle c$.

$$f_a \circ f_c = f_c \circ f_a \Leftrightarrow \begin{cases} c \in (\mathrm{Vect}(a))^\perp \\ \text{ou} \\ a = c \text{ ou } -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \in (\mathrm{Vect}(a))^\perp \\ \text{ou} \\ c = a \text{ ou } c = -a \end{cases}$$

Ainsi les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$ sont

a, $-a$ et les vecteurs unitaires de $(\mathrm{Vect}(a))^\perp$

Remarque : On notera une erreur dans la correction officielle de Q5 b.