DÉNOMBREMENT

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique du dénombrement, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

ENSEMBLES FINIS. CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI.

▶ Equipotence

Déf. 1 Un ensemble E est **équipotent** à un ensemble F s'il existe une bijection de E sur F.

Prop. 1
1. Un ensemble E est équipotent à lui-même (réflexivité).
2. Si un ensemble E est équipotent à F, F est équipotent à E (symétrie).
3. Si un ensemble E est équipotent à F et si F est équipotent à G alors E est équipotent à G (transitivité).

Le second point nous permet de dire quand E (resp. F) est équipotent à F (resp. E) que les deux ensembles E et F sont équipotents.

Prop. 2 Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $[\![1, p]\!]$ et $[\![1, q]\!]$ sont équipotents si et seulement si $p = q$.

Déf. 2 On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Prop. 3 $[\![a, +\infty[\![$ $(a \in \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

▶ Définition.

Déf. 3 Un **ensemble** E est **fini** s'il est vide ou si il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$, nécessairement unique, tel que E soit équipotent à $[\![1, p]\!]$.

Dans le premier cas le **cardinal** de E est 0 et dans le second cas c'est l'entier p.

Dans les deux cas nous noterons $\operatorname{Card} E$ le cardinal de l'ensemble fini E.

Th. 1 Soient E et F deux ensembles équipotents. Si l'un est fini, l'autre aussi et ils ont alors même cardinal.

Réciproquement deux ensembles (finis) ayant même cardinal sont équipotents.

P Ce résultat est l'un des fondements du dénombrement. Pour **dénombrer** un ensemble on le met souvent en bijection avec un ensemble fini dont on connaît le cardinal.

▶ Propriétés usuelles.

Th. 2 Soit A une partie d'un ensemble fini E.

1. A est un ensemble fini et $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E$.
2. Si $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$ alors $A = E$.
3. $\overline{A}$ est fini et $\operatorname{Card}\overline{A} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$

Th. 3 Soient E et F deux ensembles finis.

1. $E \cup F$ et $E \cap F$ sont deux ensembles finis.
2. Si E et F sont disjoints : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}\, E + \text{Card}\, F$.
3. Plus généralement : $\boxed{\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}\, E + \text{Card}\, F - \text{Card}(E \cap F)}$

Th. 4 Soient E_1, E_2, ..., E_n n ensembles finis.

1. $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ et $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ sont des ensembles finis.
2. Si E_1, E_2, ..., E_n sont deux à deux disjoints : $\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \text{Card}\, E_1 + \text{Card}\, E_2 + \cdots + \text{Card}\, E_n$.

Th. 5 E est un ensemble fini et A_1, A_2, ..., A_r sont r parties de E, deux à deux disjointes et de réunion E.

$$\text{Card}\, E = \sum_{k=1}^{r} \text{Card}\, A_k.$$

P Ce résultat est très utile en dénombrement. Pour dénombrer un ensemble on en constitue une partition et on dénombre les éléments de cette partition.

Th. 6 n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

1. Si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{Card}\, E_1 \times \text{Card}\, E_2 \times \cdots \times \text{Card}\, E_n}$$

2. Si E est un ensemble fini alors E^n aussi et :

$$\boxed{\text{Card}(E^n) = (\text{Card}\, E)^n}$$

LES CARDINAUX DU PROGRAMME

► p-listes.

Déf. 4 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E est un ensemble non vide.

On appelle **p-liste d'éléments de** E (ou p-liste de E) tout p-uplet d'éléments de E c'est à dire tout élément de E^p.

Th. 7 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n.

L'ensemble des p-listes de E est fini et de cardinal $\boxed{n^p}$.

Cor. X est un ensemble fini non vide de cardinal p et E un ensemble fini non vide de cardinal n.

L'ensemble $\mathcal{A}(X, E)$ des applications de X dans E est fini et de cardinal n^p.

On note encore E^X cet ensemble Donc : $\boxed{\text{Card}\, E^X = \text{Card}\, \mathcal{A}(X, E) = (\text{Card}\, E)^{\text{Card}\, X}}$.

Déf. 5 Le nombre **d'occurences** d'un élément α dans une p-liste d'éléments d'un ensemble E, est le nombre de fois où figure α dans cette p-liste.

▶ p-liste sans répétition.

Déf. 6 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle **p-liste sans répétition d'éléments de E** (ou de E) tout p-uplet d'éléments de E constitué d'éléments deux à deux distincts.

On dit encore que faire un **arrangement** de p éléments d'un ensemble E c'est constituer une p-liste sans répétition d'éléments de E.

Th. 8 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini non vide de cardinal n.

L'ensemble des p-listes sans répétition de E est fini.

Si $p > n$ cet ensemble est vide.

Si $p \leqslant n$ le cardinal de cet ensemble est : $\boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

★ De toute évidence si $p = 0$, $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ vaut 1 par convention.

Cor. X est un ensemble fini non vide de cardinal p et E un ensemble fini non vide de cardinal n.

L'ensemble $\mathcal{I}(X,E)$ des applications injectives de X dans E est un ensemble fini.

$$\operatorname{Card}\mathcal{I}(X,E) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

▶ Permutations.

Déf. 7 Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection de E sur E.

Th. 9 Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $\mathcal{B}(E,F)$ l'ensemble des bijections de E sur F.

Si E et F n'ont pas même cardinal $\mathcal{B}(E,F)$ est vide.

Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F = n$ alors $\mathcal{B}(E,F)$ est fini de cardinal $n!$.

Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de permutations de E est $n!$.

▶ Parties d'un ensemble fini.

Th. 10 Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini de cardinal 2^n.
2. Soient p un élément de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E ayant p éléments.

   Si $p > n$, $\mathcal{P}_p(E)$ est vide.

   Si $p \leqslant n$, $\mathcal{P}_p(E)$ est fini de cardinal $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Remarque Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$.

Nous noterons $\dbinom{n}{p}$ ou $\binom{n}{p}$ (ou C_n^p) l'entier $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Remarque **P** Pour calculer $\dbinom{n}{p}$ on est prié d'utiliser $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!}$ à la place de $\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ qui est le plus souvent une aberration numérique.

Remarque Faire une **combinaison sans répétition** de p éléments d'un ensemble E c'est constituer une partie de E ayant p éléments. Si E est fini de cardinal n et si $p \leqslant n$ il y a $\binom{n}{p}$ manières de constituer une combinaison sans répétition de p éléments pris parmi les n éléments de E.

Th. 11 n et p sont deux entiers.

1. $\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$ ou $\boxed{\mathrm{C}_n^0 = \mathrm{C}_n^n = 1}$.
2. $\boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$ ou $\boxed{\mathrm{C}_n^1 = \mathrm{C}_n^{n-1} = n}$ si $n \geqslant 1$.
3. $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$ ou $\boxed{\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}}$ si $p \leqslant n$.
4. $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}$ ou $\boxed{\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p}$ si $1 \leqslant p < n$.

Th. 12 Soient a et b deux réels (resp. complexes) et n un entier.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k} \quad \text{ou} \quad \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, a^{n-k} b^k}$$

Prop. 4 n et k sont deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$ ou $\boxed{k\,\mathrm{C}_n^k = n\,\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}}$

Prop. 5 **SD** k est un élément de $\mathbb{N}$. $\boxed{\binom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}}$ ou $\boxed{\mathrm{C}_n^k \sim \dfrac{n^k}{k!}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

COMPLÉMENTS

▸ Quelques sommes classiques.

Prop. 6 n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

SD $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0}$ $\boxed{\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}}$

Prop. 7 **SD** n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $n \geqslant p$.

$$\boxed{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

Prop. 8 **SD** **Vandermonde**.

n, p et q sont des éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $n \leqslant p+q$. $\boxed{\sum_{k=\mathrm{Max}(0,n-q)}^{\mathrm{Min}(p,n)} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}}$

▸ Formule du crible ou de Poincaré.

Th. 13 Soient E_1, E_2, ..., E_n n ensembles finis. $\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k})}$$

Remarque Il convient de bien comprendre cette formule. Notons que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k})$ est la somme des cardinaux des intersections k à k des éléments de la suite $(E_1, E_2, \dots, E_n)$.

Cette somme contient $\binom{n}{k}$ termes (faire une k-intersection c'est choisir k ensembles parmi les n... il y a encore $\binom{n}{k}$ suites $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ strictement croissante d'éléments de $[\![1, n]\!]$).

Prop. 9 Plus généralement soit I un ensemble fini non vide et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles finis. Notons pour tout k élément de $[\![1, \text{Card}\, I]\!]$, $\mathcal{P}_k(I)$ l'ensemble des parties de I ayant k éléments.

$\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$ est un ensemble fini et :

$$\text{Card}\Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big) = \sum_{k=1}^{\text{Card}\, I} (\,-\,1)^{k+1} \left[\sum_{J \in \mathcal{P}_k(I)} \text{Card}\Big(\bigcap_{j \in J} E_j\Big)\right]$$

▶ Application d'un ensemble fini.

Th. 14 Soient E et F deux ensembles finis non vides et f une application de E dans F.

1. $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Card}\, E$ et $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Card}\, F$; donc $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Min}\big(\text{Card}\, E, \text{Card}\, F\big)$
2. $\text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, E$ si et seulement f est injective.
3. $\text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, F$ si et seulement si f est surjective.
4. f est bijective si et seulement si $\text{Card}\, E = \text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, F$.

Th. 15 Soient E et F deux ensembles finis non vides de même cardinal et f une application de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective.

ii) f est surjective.

iii) f est bijective.

▶ Les applications strictement croissantes (resp. croissantes).

Th. 16 **SD** p et n sont deux éléments non nuls de $\mathbb{N}$.

1. L'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est fini.

Il est vide si $p > n$ et de cardinal $\binom{n}{p} = \text{C}_n^p$ si $p \leqslant n$.

2. L'ensemble des applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est fini et de cardinal $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \text{C}_{n+p-1}^p$.

Th. 17 SD p et n sont deux éléments non nuls de $\mathbb{N}$.

1. L'ensemble des suites strictement croissantes $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de p éléments d'un ensemble fini de n éléments est fini.

Il est vide si $p > n$ et de cardinal $\binom{n}{p} = \mathrm{C}_n^p$ si $p \leqslant n$.

2. L'ensemble des suites croissantes $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de p éléments d'un ensemble fini de n éléments est fini de cardinal $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \mathrm{C}_{n+p-1}^p$.

▶ **Formule d'inversion de Pascal**.

Prop. 10 SD $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, b_k$.

▶ **Les surjections**.

Prop. 11 SD X est un ensemble fini non vide de cardinal p et E un ensemble fini non vide de cardinal n.

L'ensemble des surjections de X dans E est fini et son cardinal est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$.

Pour $p < n$ cette somme est nulle...

▶ **Les combinaisons avec répétitions**.

Prop. 12 n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et E est un ensemble fini de cardinal n.

Grossièrement faire une combinaison avec répétition de p éléments de E, c'est choisir p éléments de E sans ordre et en s'autorisant à des répétitions.

L'ensemble des combinaisons avec répétitions de p éléments de E est un ensemble fini de cardinal $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \mathrm{C}_{n+p-1}^p$.

Prop. 13 SD n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ est encore le cardinal de l'ensemble fini $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p\}$.