

D.S. 7

Sujet 3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### NUAGES DE POINTS ET APPROXIMATION D'UN NUAGE

Dans tout le problème  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et on pose  $E_p = \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . L'espace  $E_p$  est muni de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur  $x$  de  $E_p$  est notée  $\|x\|$  ; le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E_p$  est noté  $\langle x, y \rangle$ .

Si  $u$  est un vecteur non nul appartenant à  $E_p$ ,  $D_u$  désigne la droite vectorielle engendrée par  $u$  et si  $x$  est un vecteur de  $E_p$ ,  $P_{D_u}(x)$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur la droite  $D_u$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E_p$ , le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E_p$  est noté  $F^\perp$ .

Pour toute matrice  $A$  appartenant à  $\mathbb{M}_{m,\ell}(\mathbb{R})$  on note  $\Phi_A$  l'application linéaire de  $\mathbb{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{M}_{m,1}(\mathbb{R})$  définie par :  $\forall X \in \mathbb{M}_{\ell,1}(\mathbb{R}), \Phi_A(X) = AX$ .

Pour tout  $r$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$  et toute famille  $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$  de vecteurs de  $E_p$ ,  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$  est le sous-espace vectoriel de  $E_p$  engendré par les vecteurs  $u_1, \dots, u_r$ .

Si  $g$  est une fonction définie sur un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E_p$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on désigne par  $\text{Max}_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} g(x)$

ou  $\text{Max} \{g(x); x \in F \text{ et } \|x\| = 1\}$  le maximum, lorsqu'il existe, de la fonction  $g$  sur l'ensemble des vecteurs  $x$  de  $F$  dont la norme est égale à 1.

#### Partie I. Étude d'un exemple

Dans cette partie et uniquement dans celle-ci, on suppose que  $p = 2$ . On note  $(u_1, u_2)$  la base canonique de  $E_2$ .

1) On considère les vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$  appartenant à  $E_2$  et dont les coordonnées dans la base  $(u_1, u_2)$  sont respectivement  $(1, 2), (-3, -1), (2, -1)$ .

On considère un réel  $m$  et on note, pour tout  $i$  appartenant à  $\{1, 2, 3\}$ ,  $v'_i$  le projeté orthogonal de  $v_i$  sur la droite vectorielle engendrée par  $u_1 + mu_2$ .

a) Calculer en fonction de  $m$  la quantité :  $\|v'_1\|^2 + \|v'_2\|^2 + \|v'_3\|^2$ .  **$(6m^2 - 6m + 14) / (m^2 + 1)$**

b) Déterminer la valeur  $m_0$  de  $m$  pour laquelle cette quantité atteint son maximum ; ce maximum est noté  $\lambda_1$ . **1/3 et 1/5**

2) Soit  $X$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Vérifier que  $\lambda_1$  est une valeur propre de  $\Phi_{X^t X}$  ;  $u_1 + m_0 u_2$  étant un vecteur propre associé à  $\lambda_1$ .

b) Déterminer l'autre valeur propre de  $\Phi_{X^t X}$  et la comparer à  $\lambda_1$ .

appel...  $\varepsilon_j \varepsilon_k = \varepsilon_j \varepsilon_k$

$\Delta$  Attention ici  $X = \text{matrice colonne}$

matrice colonne.

## Partie II. Les axes principaux d'inertie d'un nuage

Les notations introduites dans cette partie seront utilisées dans toute la suite du problème.

On définit la matrice  $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  appartenant à  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  appelée nuage ; ses colonnes  $c_1, \dots, c_n$  sont appelées points du nuage ;  $X$  est donc un nuage de  $n$  points dans un espace de dimension  $p$ .

On définit la matrice  $V = X^t X$ .

On appelle  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E_p$  engendré par les vecteurs colonnes  $c_1, \dots, c_n$  et on suppose que  $\dim F = r$  et  $p > r \geq 1$ .

Pour tout vecteur  $v$  non nul de  $E_p$ , on pose  $I(v) = \sum_{j=1}^n \|P_{D_v}(c_j)\|^2$  ; cette quantité s'appelle l'inertie du nuage  $X$  sur la droite  $D_v$ .

Pour tout couple de vecteurs  $(v, w)$  appartenant à  $E_p^2$ , on pose :  $J(v, w) = \sum_{j=1}^n \langle v, c_j \rangle \langle w, c_j \rangle$ .

1) a) Montrer que la matrice  $V$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $V$  et on suppose que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$ .

Justifier l'existence d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $E_p$  telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, p\}, V e_i = \lambda_i e_i$ .

b) • Montrer que le noyau de  $\Phi_V$  est égal à celui de  $\Phi_{tX}$ .

• En déduire que le rang de  $V$  est égal à  $r$ .

• Montrer que :  $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$ .

• Que peut-on dire de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ?

• Montrer que  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $F$ .

2) a) Montrer, pour tout vecteur  $v$  de norme 1 appartenant à  $E_p$ , l'égalité :  $I(v) = {}^t_v V v$ .

b) Déterminer, pour tout  $i$  appartenant à  $\{1, \dots, p\}$ ,  $I(e_i)$  à l'aide des nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

c) On définit les sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_r$  de  $E_p$  par :

$$F_1 = F, F_2 = F_1 \cap (D_{e_1}^\perp), \dots, F_r = F_{r-1} \cap (D_{e_{r-1}}^\perp)$$

• Montrer que :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, F_i = \text{Vect}(e_i, \dots, e_r)$ .

• Montrer que :  $I(e_1) = \text{Max}\{I(v); v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\} = \text{Max}\{I(v); v \in F_1 \text{ et } \|v\| = 1\}$ .

• Montrer que :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, I(e_i) = \text{Max}\{I(v); v \in F_i \text{ et } \|v\| = 1\}$ .

3) Soit  $w$  un vecteur unitaire de  $E_p$  tel que  $I(w) = \text{Max}\{I(v); v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\}$ . Montrer que  $w$  appartient à  $F$ .

4) On suppose dans cette question que  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  sont  $r$  vecteurs de norme 1 appartenant à  $E_p$  et que  $G_1, \dots, G_r$  sont  $r$  sous-espaces vectoriels de  $E_p$  tels que :

$$(\mathcal{G}) \begin{cases} G_1 = F \\ \varepsilon_1 \in G_1 \text{ et } I(\varepsilon_1) = \text{Max}\{I(v); v \in G_1 \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \varepsilon_2 \in G_2 = G_1 \cap (D_{\varepsilon_1}^\perp), \text{ et } I(\varepsilon_2) = \text{Max}\{I(v); v \in G_2 \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \vdots \\ \varepsilon_{r-1} \in G_{r-1} = G_{r-2} \cap (D_{\varepsilon_{r-2}}^\perp), \text{ et } I(\varepsilon_{r-1}) = \text{Max}\{I(v); v \in G_{r-1} \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \varepsilon_r \in G_r = G_{r-1} \cap (D_{\varepsilon_{r-1}}^\perp), \text{ et } I(\varepsilon_r) = \text{Max}\{I(v); v \in G_r \text{ et } \|v\| = 1\} \end{cases}$$

\* erreur de  
texte. c'est  
 $\varepsilon_{r-2}$ .

Les droites vectorielles  $D_{\varepsilon_1}, \dots, D_{\varepsilon_r}$  sont appelées axes principaux d'inertie du nuage.

a) Vérifier que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  est une base orthonormale de  $F$  et que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $E_p$ .

b) Montrer que pour tout couple de vecteurs  $(v, w)$  appartenant à  $E_p^2$ ,  $J(v, w) = {}^t_v V w = \langle v, \Phi_V(w) \rangle$ .

c) On se donne deux vecteurs  $v_1$  et  $v_2$ , unitaires, orthogonaux et appartenant à  $F$ .

Pour tout réel  $t$ , on pose  $\varphi(t) = I(\cos t v_1 + \sin t v_2)$ .

• Exprimer  $\varphi(t)$  à l'aide de  $I(v_1), I(v_2), J(v_1, v_2)$  et  $t$ .

• Montrer que  $\varphi$  est majorée sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle admet un maximum.

• On suppose que le maximum de  $\varphi$  est atteint en 0. Montrer que  $J(v_1, v_2) = 0$ .

d) • Montrer que pour tout  $(i, j)$  appartenant à  $\{1, \dots, r\}^2$ ,  $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  dès que  $i \neq j$ .

• Déterminer la forme de la matrice de  $\Phi_V$  dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ .

• En déduire que pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\varepsilon_i$  est un vecteur propre de  $V$  associé à  $\lambda_i$ .

\* [ 5) Dans le langage des statisticiens les colonnes  $c_j$  de  $X$  représentent des individus d'une population statistique où  $p$  variables statistiques  $x_i, (1 \leq i \leq p)$  ont respectivement pris les valeurs  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, (1 \leq i \leq p)$ ,

\* [ facultatif

valeurs fixées de telle sorte que leur moyennes sont nulles, c'est à dire :  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, 1 \leq i \leq p$ .

Calculer la covariance  $\text{cov}(x_k, x_\ell)$  des variables  $x_k$  et  $x_\ell$  lorsque  $k$  et  $\ell$  appartiennent à  $\{1, \dots, p\}$  puis comparer la matrice  $V$  et la matrice  $(\text{cov}(x_k, x_\ell))_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq p}}$ .

### Partie III. Une décomposition de la matrice $X$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  on note  $\Pi_i$  la matrice dans la base canonique de  $E_p$ , de la projection orthogonale de  $E_p$  sur  $D_{e_i}$ ; les vecteurs  $e_1, \dots, e_p$  ont été définis au II 1 a.

- 1) Montrer que :  $\sum_{i=1}^p \Pi_i = I_p$ , (où  $I_p$  est la matrice appartenant à  $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont nuls excepté les éléments diagonaux qui valent 1).
- 2) Déterminer  $\Pi_i \Pi_j$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$  tel que  $i \neq j$ .
- 3) Calculer pour tout  $i \in \{r+1, \dots, p\}$ ,  $\Pi_i X$  et en déduire que :  $X = \sum_{i=1}^r \Pi_i X$ .
- 4) Pour tout  $s \in \{1, \dots, r\}$ , on pose  $X_s = \sum_{i=1}^s \Pi_i X$ .
  - a) Montrer que :  $\text{Im } \Phi_{X_s} \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ .
  - b) Calculer  $X_s {}^t X e_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$  et déterminer le rang de  $X_s$ .

### Partie IV. Une norme euclidienne de matrices carrées

Pour tout entier naturel  $q$  non nul et toute matrice carrée  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq q}}$  appartenant à  $\mathbb{M}_q(\mathbb{R})$ , on pose

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^q a_{ii}.$$

On sait que  $\text{Tr}$  définit une application linéaire de  $\mathbb{M}_q(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  et que si  $A$  et  $B$  appartiennent respectivement à  $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  alors  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ . On sait également que si deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ .

Pour tout  $M$  et  $N$  appartenant à  $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  on pose :  $\Theta(M, N) = \text{Tr}(M {}^t N)$ .

- 1) Montrer que  $(M, N) \mapsto \Theta(M, N)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .

Pour toute matrice  $M$  appartenant à  $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ , on note  $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}(M {}^t M)}$ , appelé ici norme euclidienne de  $M$ .

- 2) Calculer pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ ,  $\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X)$ . On distinguera les cas  $i = j$  et  $i \neq j$ , et on exprimera les résultats en fonction des nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .
- 3) Calculer  $\|X - X_s\|^2$ , en fonction de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , pour tout  $s$  appartenant à  $\{1, \dots, r\}$ .

### Partie V. La meilleure approximation du nuage

On rappelle que si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E_p$ , alors :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

On considère un entier naturel  $s$  appartenant à  $\{1, \dots, r-1\}$  et une matrice  $N$  appartenant à  $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  telle que  $\text{rang}(N) \leq s$ .

- 1) Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormale  $(a_1, \dots, a_p)$  de  $E_p$  formée de vecteurs propres de  $(X - N) {}^t (X - N)$ . On note  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  les valeurs propres de  $(X - N) {}^t (X - N)$  associées respectivement aux vecteurs  $a_1, \dots, a_p$  et on suppose que  $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_p$ .
- 2) Soit  $i$  un entier appartenant à  $\{1, \dots, r-s\}$  et un sous-espace  $G$  de  $E_p$  de dimension supérieure ou égale à  $i$ .
  - a) Montrer que :  $\dim(G \cap \text{Vect}(a_i, \dots, a_p)) \geq 1$ .
  - b) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire  $u$  appartenant à  $G$  tel que  $\|{}^t (X - N) u\|^2 \leq \gamma_i$ .
  - c) On considère l'espace vectoriel  $H = (\text{Ker } \Phi_{tN}) \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{s+i})$ .
    - Montrer que :  $\dim H \geq i$ .
    - En déduire :  $\lambda_{s+i} \leq \gamma_i$ .
- 3) a) Montrer que :  $\|X - N\|^2 = \sum_{i=1}^p \gamma_i$ .

b) En déduire que :  $\|X - N\|^2 \geq \sum_{i=s+1}^r \lambda_i$ .

c) En déduire que  $X_s$  réalise la meilleure approximation de  $X$  par des matrices de rang inférieur ou égal à  $s$  au sens de la norme euclidienne définie plus haut sur  $M_{p,n}(\mathbb{R})$ .

4) Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E_p$ .

On note  $P_G$  la projection orthogonale de  $E_p$  sur  $G$ ,  $\Pi_G$  sa matrice dans la base canonique de  $E_p$  et

$$K(G) = \sum_{j=1}^n \|P_G(c_j)\|^2.$$

La quantité  $K(G)$  s'appelle l'inertie du nuage  $X$  sur le sous-espace  $G$ , et dans le cas où  $G = E_p$ ,  $K(G)$  est l'inertie totale du nuage  $X$ .

a) Montrer que :  $K(G) = \|\Pi_G X\|^2$ .

b) Montrer que :  $K(G) = \|X\|^2 - \|X - \Pi_G X\|^2$ .

c) On suppose toujours que  $s$  est un entier appartenant à  $\{1, \dots, r-1\}$  et  $\dim G \leq s$ .

• Montrer que :  $K(G) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i$ .

• Montrer que  $K(\text{Vect}(e_1, \dots, e_s))$  est le maximum des nombres  $K(G)$ , lorsque  $G$  parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E_p$  dont la dimension est inférieure ou égale à  $s$ .

d) On suppose dans cette question que  $s$  appartient à  $\{1, \dots, p\}$ , on ne suppose donc plus que  $s \leq r-1$ .

Montrer que  $K(\text{Vect}(e_1, \dots, e_s))$  est le maximum des nombres  $K(G)$ , lorsque  $G$  parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E_p$  dont la dimension est inférieure ou égale à  $s$ .

## Partie VI. Non multa, sed multum

Dans cette partie, on propose une interprétation pratique des résultats théoriques précédents à propos d'une enquête de consommations.

On a étudié les « consommations » annuelles de 8 denrées alimentaires (ce sont les 8 variables statistiques  $x_i$ , ( $1 \leq i \leq 8$ ) que l'on suppose centrées), par différentes catégories socio-professionnelles, à savoir : celles des exploitants agricoles (AGRI) représentées par la colonne  $c_1$ , des salariés agricoles (SAAG (=  $c_2$ )), des professions indépendantes (PRIN (=  $c_3$ )), les cadres supérieurs (CSUP (=  $c_4$ )), des cadres moyens (CMOY (=  $c_5$ )), des employés (EMP (=  $c_6$ )), des ouvriers (OUVR (=  $c_7$ )), des inactifs (INAC (=  $c_8$ )). Dans notre exemple un individu est donc une catégorie socio-professionnelle.

On a consigné les résultats de l'enquête dans une matrice  $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 8 \\ 1 \leq j \leq 8}}$ . Par exemple  $x_{12}$  représente la consommation moyenne de la denrée 1 par la catégorie SAAG.

Les valeurs propres de la matrice  $V = X^t X$  sont approximativement 70, 20, 5, 3, 2, 0, 0 et 0 associées respectivement à  $e_1, \dots, e_8$ .

1) Quelle part de l'inertie totale est contenue dans l'inertie du nuage de points sur le sous-espace de base  $(e_1, e_2)$  ?

On a représenté dans le dessin ci-contre les projetés orthogonaux dans le plan de base  $(e_1, e_2)$  des 8 individus  $(c_j)_{1 \leq j \leq 8}$ , c'est-à-dire des 8 colonnes représentant les consommations moyennes de chaque catégorie socio-professionnelle.

2) Que représente le nuage de points du dessin pour le nuage  $X$  de l'enquête ?

