EXERCICE 1

Q1 a) Soit A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

A est de type 0 si et seulement si ${}^tA = A^0 = I_m$; c'est à dire si et seulement si $A = I_m$.

A est de type 1 si et seulement si ${}^tA = A^1 = A$; c'est à dire si et seulement si A est symétrique.

$\boxed{I_m \text{ est la seule matrice de } \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ de type 0. Les matrices de type 1 sont les matrices symétriques}}$.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. A est de type -1 si et seulement si ${}^tA = A^{-1}$; c'est à dire si et seulement si ${}^tAA = I_m$. Les matrices de types -1 sont donc les matrices orthogonales.

En se souvenant que la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est une matrice orthogonale il n'est pas difficile d'exhiber des matrices de type -1.

Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est de type -1 (et même de type 1 ! !) sans être diagonale !

Q2 Soit x un nombre réel.

a) Montrons par récurrence que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$: $\big[N(x)\big]^k = N(k\,x)$.

L'égalité est claire pour $k = 1$.

Supposons que $\big[N(x)\big]^k = N(k\,x)$ pour un élément k de $\mathbb{N}^*$. Montrons alors que $\big[N(x)\big]^{k+1} = N((k+1)\,x)$.

$\big[N(x)\big]^{k+1} = \big[N(x)\big]^k \times N(x) = N(k\,x) \times N(x)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc : $\big[N(x)\big]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx) & -\sin(kx) \\ 0 & \sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

Ainsi : $\big[N(x)\big]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx)\cos x - \sin(kx)\sin x & -\cos(kx)\sin x - \sin(kx)\cos x \\ 0 & \sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x & -\sin(kx)\sin x + \cos(kx)\cos x \end{pmatrix}$

Ce qui donne : $\big[N(x)\big]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx+x) & -\sin(kx+x) \\ 0 & \sin(kx+x) & \cos(kx+x) \end{pmatrix} = N((k+1)x)$. Et ainsi s'achève la récurrence.

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big[N(x)\big]^k = N(kx)}$.

b) $N(x)$ est de type n si et seulement si : ${}^tN(x) = \big[N(x)\big]^n$. Rappelons alors que : $\big[N(x)\big]^n = N(nx)$.

Notons que : ${}^tN(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-x) & -\sin(-x) \\ 0 & \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} = N(-x)$.

Alors : $N(x)$ de type $n \iff N(-x) = N(nx) \iff \cos(-x) = \cos(nx)$ et $\sin(-x) = \sin(nx)$.

Ainsi : $N(x)$ de type $n \iff -x \equiv nx\ [2\pi] \iff (n+1)x \equiv 0\ [2\pi] \iff x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{n+1}\right]$

$\boxed{\text{L'ensemble des réels } x \text{ tel que } N(x) \text{ soit de type } n \text{ est : } \left\{ \dfrac{2k\pi}{n+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$

Q3 a) ${}^tA = A^n$ donne également $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^n) = ({}^tA)^n$.

Alors $A^{(n^2)} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = A$. $\boxed{A^{(n^2)} = A}$.

b) $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2+n} = A^{(n^2)}A^n = AA^n = A^{n+1} = B$. $\boxed{B^n = B}$.

Observons que $B = A^nA = {}^tAA$. Dès lors ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = B$ et $\boxed{B \text{ est symétrique}}$.

c) Posons $P = X^n - X$. P est un polynôme annulateur de B et ainsi toute valeur propre de B est un zéro de P.

B est une matrice réelle symétrique donc ses valeurs propres sont réelles.

Les zéros réels de $P = X^n - X$ sont 0 et 1 si n est impair, et 0, 1 et -1 si n est pair.

On peut alors affirmer que $\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles de } B \text{ sont} : -1,\ 0 \text{ et } 1}$.

d) Supposons que V soit un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1. V n'est pas nul et $BV = -V$.

${}^tVBV = {}^tV(-V) = -{}^tVV = -\|V\|^2$. De plus : ${}^tVBV = {}^tV^tAAV = {}^t(AV)AV = \|AV\|^2$.

Ainsi : $-\|V\|^2 = \|AV\|^2$. Alors nécessairement $\|V\|^2 = 0$ et $V = 0$!

Par conséquent : $\boxed{-1 \text{ n'est pas valeur propre de } B}$.

e) Notons f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ dont la matrice dans la base canonique est B. f_B est alors un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^m$ (n'oublions pas que la base canonique est orthonormale... pour le produit scalaire canonique). Montrons que f_B est une projection orthogonale.

Si 0 est la seule valeur propre de f_B, f_B est nécessairement l'application linéaire nulle car f_B est diagonalisable ; f_B est bien une projection orthogonale.

De même 1 est la seule valeur propre de f_B, f_B est nécessairement $Id_{\mathbb{R}^m}$ car f_B est diagonalisable ; f_B est toujours une projection orthogonale.

Supposons alors que 0 et 1 soient les deux valeurs propres de f_B.

Les deux sous-espaces propres associés $\operatorname{Ker} f_B$ et $\operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m})$ sont supplémentaires (f_B est diagonalisable) et orthogonaux (f_B est symétrique). Notons p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m})$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f_B$.

Soit U un élément de $\mathbb{R}^m$. $U = U_1 + U_2$ avec $(U_1, U_2) \in \operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m}) \times \operatorname{Ker} f_B$.

$f_B(U) = f_B(U_1) + f_B(U_2) = U_1 + 0 = U_1 = p(U)$. Ainsi $f_B = p$.

Dans tous les cas f_B est une projection orthogonale... donc f_B est un projecteur orthogonal.

$\boxed{B \text{ est une matrice de projecteur orthogonal}}$.

Q4 a) Soit U un élément de E_B. $BU = 0$ donc ${}^tAAU = 0$. En particulier $\|AU\|^2 = {}^t(AU)AU = {}^tU^tAAU = 0$. Ceci donne alors $AU = 0$. Donc U est élément de E_A.

$\boxed{E_B \text{ est contenu dans } E_A}$.

Réciproquement soit U un élément de E_A ; $BU = {}^tAAU = {}^tA0 = 0$ et U appartient à E_B.

E_A est alors contenu dans E_B, ce qui achève de montrer que : $\boxed{E_B = E_A}$.

b) Soit V un élément de F_B. Il existe un élément U de $\mathbb{R}^m$ tel que : $f_B(U) = V$. Alors $V = f_A^{n+1}(U) = f_A(f_A^n(U))$ et ainsi V appartient à F_A.

On a donc $F_B \subset F_A$. De plus le théorème du rang et l'égalité $E_B = E_A$ donnent : $\dim F_B = \dim \mathbb{R}^m - \dim E_B = \dim \mathbb{R}^m - \dim E_A = \dim F_A$.

$F_B \subset F_A$ et $\dim F_B = \dim F_A$ permettent de dire que : $\boxed{F_B = F_A}$ (nous sommes en dimension finie...).

Nous avons vu plus haut que E_B et F_B sont deux supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^m$.

Ainsi : $\boxed{E_A \text{ et } F_A \text{ sont deux supplémentaires orthogonaux de } \mathbb{R}^m}$.

Q5 Soit U un élément de F_A. Comme $F_A = F_B = \operatorname{Im} f_B = \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^m})$, $f_B(U) = U$ et donc $BU = U$.

Alors $\|AU\|^2 = {}^t(AU)AU = {}^tU{}^tAAU = {}^tUBU = {}^tUU = \|U\|^2$. Ainsi $\|AU\| = \|U\|$.

$\boxed{\forall U \in F_A,\ \|AU\| = \|U\|}$.

Q6 Supposons A inversible et toujours de type n. Alors $B = A^{n+1}$ est également inversible. f_B est alors un automorphisme de $\mathbb{R}^m$. Donc $\operatorname{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m}) = \operatorname{Im} f_B = \mathbb{R}^m$ et : $f_B = Id_{\mathbb{R}^m}$.

Alors $B = I_m$. ${}^tAA = I_m$. Ainsi ${}^tA = A^{-1}$ et $\boxed{A \text{ est de type -1}}$.

Q7 Supposons que A soit de type n et $n+1$.

${}^tAA = A^nA = A^{n+1} = {}^tA$. Or ${}^tAA$ est une matrice symétrique (voir plus haut), donc ${}^tA$ est une matrice symétrique et A également. De plus $AA = {}^tAA = {}^tA = A$. A est alors la matrice d'une projection. Comme $E_A = \operatorname{Ker} f_A$ et $F_A = \operatorname{Im} f_A$ sont orthogonaux, $\boxed{A \text{ est la matrice d'un projecteur orthogonal}}$.

EXERCICE 2

Q1 a) $\varphi : u \to \dfrac{1}{e^u + a}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, a est (strictement) positif donc : $\forall u \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant \varphi(u) = \dfrac{1}{e^u + a} \leqslant \dfrac{1}{e^u} = e^{-u}$.

La positivité de φ et la convergence de $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du$ donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,du$

Finalement : $\boxed{J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\,du \text{ converge}}$.

b) $aJ = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{e^u + a}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{ae^{-u}}{1 + ae^{-u}}\,du = \lim_{x \to +\infty} \Big[-\ln|1 + ae^{-u}| \Big]_0^x$.

$aJ = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Big(\ln(1+a) - \ln(1 + ae^{-x}) \Big) = \ln(1+a)$.

Ainsi $\boxed{J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\,du = \frac{\ln(1+a)}{a}}$.

Q2 $P(Z \leqslant t/N = j) = P\big(\operatorname{Max}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N) \leqslant t/N = j\big) = \dfrac{P\big(\{\operatorname{Max}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N) \leqslant t\} \cap \{N = j\}\big)}{P(N = j)}$.

$P(Z \leqslant t/N = j) = \dfrac{P\big(\{\operatorname{Max}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_j) \leqslant t\} \cap \{N = j\}\big)}{P(N = j)} = \dfrac{P\big(\{Y_1 \leqslant t\} \cap \{Y_2 \leqslant t\} \cap \cdots \cap \{Y_j \leqslant t\} \cap \{N = j\}\big)}{p(N = j)}$.

Il vient alors par indépendance : $P(Z \leqslant t/N = j) = \dfrac{P(Y_1 \leqslant t)\, P(Y_2 \leqslant t) \cdots P(Y_j \leqslant t)\, P(N = j)}{P(N = j)}$.

Ainsi : $P(Z \leqslant t/N = j) = P(Y_1 \leqslant t)\, P(Y_2 \leqslant t) \cdots P(Y_j \leqslant t) = (1 - e^{-bt})^j$.

$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ P(Z \leqslant t/N = j) = (1 - e^{-bt})^j}$.

Q3 a) Notons F_Z la fonction de répartition de Z et remarquons que cette variable aléatoire prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $\forall t \in]-\infty, 0[,\ F_Z(t) = 0$. Soit t un élément de $\mathbb{R}^+$.

$\big(\{N = j\}\big)_{j \geqslant 1}$ est un système complet d'événements ; la formule des probabiltés totales donne alors :

$$F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(Z \leqslant t/N = j)\, P(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - e^{-bt})^j\, P(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - e^{-bt})^j\, s(1 - s)^{j-1}.$$

$$F_Z(t) = s(1 - e^{-bt}) \sum_{j=1}^{+\infty} \big[(1 - s)(1 - e^{-bt})\big]^{j-1} = s(1 - e^{-bt}) \sum_{k=0}^{+\infty} \big[(1 - s)(1 - e^{-bt})\big]^{k}.$$

Observons, s'il en est besoin, que $|(1-s)(1-e^{-bt})| = (1-s)(1-e^{-bt}) < 1$ car s est élément de $]0,1[$ et bt est positif ou nul.

Un résultat basique du cours sur les séries géométriques donne : $F_Z(t) = \dfrac{s(1-e^{-bt})}{1-(1-s)(1-e^{-bt})} = \dfrac{s(1-e^{-bt})}{s+(1-s)e^{-bt}}$.

Finalement : $\boxed{\forall t \in]-\infty, 0[,\ F_Z(t) = 0 \text{ et } \forall t \in [0, +\infty[,\ F_Z(t) = \dfrac{s(1-e^{-bt})}{s+(1-s)e^{-bt}}}$.

b)

<u>*Remarque*</u> *On peut encore écrire :* $\forall t \in]-\infty, 0,]$, $F_Z(t) = 0$ *et* $\forall t \in [0, +\infty[$, $F_Z(t) = \dfrac{s(1-e^{-bt})}{s+(1-s)e^{-bt}}$.

Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty, 0]$ *et* **sur** $[0, +\infty[$. *Alors F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$.*

La remarque précédente montre que la variable aléatoire Z est une variable aléatoire à densité.

De plus elle permet de dériver F_Z en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Cette dérivation donne : $\forall t \in]-\infty, 0[$, $F'_Z(t) = 0$ et

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ F'_Z(t) = \frac{sbe^{-bt}(s+(1-s)e^{-bt}) - s(1-e^{-bt})(1-s)(-b)e^{-bt}}{\big(s+(1-s)e^{-bt}\big)^2} = \frac{sbe^{-bt}}{\big(s+(1-s)e^{-bt}\big)^2}.$$

> L'application f_Z définie par : $\forall t \in]-\infty, 0[$, $f_Z(t) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_Z(t) = \dfrac{sbe^{-bt}}{\big(s+(1-s)e^{-bt}\big)^2}$, est alors une densité de Z.

Q4 Notons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Remarquons que : $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_Z(t) = \dfrac{sbe^{bt}}{\big(se^{bt}+1-s\big)^2}$ (multiplication du numérateur et du dénominateur par $(e^{bt})^2$)

et que $t \to -\dfrac{1}{se^{bt}+1-s}$ est une primitive de $t \to \dfrac{sbe^{bt}}{\big(se^{bt}+1-s\big)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. Une intégration par parties simple nous donne :

$$\int_0^x t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{-t}{se^{bt}+1-s}\Big]_0^x - \int_0^x \frac{-1}{se^{bt}+1-s}\,\mathrm{d}t = \frac{-x}{se^{bx}+1-s} + \int_0^x \frac{1}{se^{bt}+1-s}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{se^{bx}+1-s} = 0$ (croissance comparée), donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{se^{bt}+1-s}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Mieux en cas d'existence ces deux intégrales sont égales.

Le changement de variable $u = bt$ donne : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{se^{bt}+1-s}\,\mathrm{d}t = \int_0^{bx} \frac{1}{b(se^u+1-s)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{bs}\int_0^{bx} \frac{1}{e^u+\frac{1-s}{s}}\,\mathrm{d}u.$

La question 1 donne alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{bx} \frac{1}{e^u+\frac{1-s}{s}}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln\left(1+\frac{1-s}{s}\right)}{\frac{1-s}{s}} = \frac{-s\ln s}{1-s}$ car $\dfrac{1-s}{s}$ est strictement positif.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut : $\dfrac{-s\ln s}{bs\,(1-s)} = -\dfrac{\ln s}{b\,(1-s)}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\dfrac{\ln s}{b\,(1-s)}$.

$\boxed{Z \text{ admet une espérance qui vaut : } -\dfrac{\ln s}{b(1-s)}}$.

Q5 a) Commençons par remarquer que : $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$.

g est de toute évidence continue sur $]0,+\infty[$. De plus $\dfrac{t}{e^t-1} \sim \dfrac{t}{t} = 1$ en 0, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{e^t-1} = 1 = g(0)$; g est également continue en 0.

$\boxed{g \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$.

<u>Remarque</u> *A titre d'exercice on pourra montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ ($g'(0) = -1/2$).*

Donnons deux idées pour montrer que g est bornée sur $[0,+\infty[$.

$x \to e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x+1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$.

Alors : $\forall t \in]0,+\infty[,\ e^t - 1 \geqslant t > 0$; $\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 < g(t) = \dfrac{t}{e^t-1} \leqslant 1$.

Mieux : $\boxed{\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 < g(t) \leqslant 1 \text{ et } g \text{ est bornée sur } [0,+\infty[}$.

Retrouvons ce résultat en remarquant que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{t}{e^t-1} = 0$.

Alors il existe un réel A strictement positif tel que : $\forall t \in]A,+\infty[, |g(t)| \leqslant 2000$!

g est donc bornée sur l'intervalle $]A,+\infty[$. De plus g est continue sur le <u>**segment**</u> $[0,A]$ donc g est également bornée sur $[0,A]$. Ainsi g est bornée sur $[0,+\infty[$.

<u>Remarque</u> *On peut encore traiter cette question en montrant que g est décroissante $[0,+\infty[$.*

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et t un réel positif.

Si $t = 0$, $g(t)\ e^{-(n+1)t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t} = 1 \times 1 + 0 = 1 = g(t)$. Dès lors supposons t strictement positif, ce qui donne en particulier : $e^{-t} \neq 1$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t} = \sum_{k=0}^{n} t\ \left(e^{-t}\right)^{k+1} = t\ e^{-t}\ \dfrac{1-\left(e^{-t}\right)^{n+1}}{1-e^{-t}} = g(t)\ (1 - e^{-(n+1)t}) = g(t) - g(t)\ e^{-(n+1)t}$.

Donc : $g(t)\ e^{-(n+1)t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t} = g(t)$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ g(t) = g(t)\ e^{-(n+1)t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}}$.

Q6 Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ h_{k+1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (k+1)e^{-(k+1)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

h_{k+1} est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T_{k+1} qui suit une loi exponentielle de paramètre $k+1$.

Le cours nous indique que T_{k+1} possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{k+1}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t h_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{k+1}$. Donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t(k+1)e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut également $\dfrac{1}{k+1}$.

Alors $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \dfrac{1}{(k+1)^2}}$.

$\boxed{\textbf{Q7}}$ g est continue et <u>positive</u> sur $[0,+\infty[$, $g(t) \sim t\,e^{-t}$ en $+\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (d'après la question précédente).

Cela suffit très largement pour dire que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ g(t) = g(t)\ e^{-(n+1)t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t\ e^{-(k+1)t}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$.

Ceci permet alors de dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et d'écrire que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} t\,e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$.

Dès lors montrons que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = 0$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant g(t) \leqslant 1$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant g(t)\,e^{-(n+1)t} \leqslant e^{-(n+1)t}$.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 car h_{n+1} est une densité de probabilité. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} (n+1)e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut également 1. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{n+1}$

Nous pouvons donc écrire que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t}$.

$\boxed{\textbf{Q8}}$ Notons que $s \to \dfrac{-\ln s}{1-s}$ est continue sur $]0,1[$ et même prolongeable par continuité en 1.

Soit α et β deux éléments de $]0,1[$.

Le changement de variable $t = -\ln s$ ou $s = e^{-t}$ donne :

$$\int_\alpha^\beta \frac{-\ln s}{1-s}\,\mathrm{d}s = \int_{-\ln\alpha}^{-\ln\beta}\frac{t}{1-e^{-t}}\,(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln\beta}^{-\ln\alpha}\frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln\beta}^{-\ln\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarquons alors que $\displaystyle\lim_{\alpha\to0}(-\ln\alpha) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\beta\to1}(-\ln\beta) = 0$, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln s}{1-s}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{6b}$.

$\boxed{\text{La valeur moyenne de } E(Z) \text{ sur }]0,1[\text{ est } \dfrac{\pi^2}{6b}}$.

PROBLÈME

Q0 Le théorème de transfert donne : $E(g(Y)) = \sum_{i=1}^{t} g(y_i)\, P(Y = y_i)$.

Comme $\big(\{X = x_j\}\big)_{j\in[\![1,u]\!]}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne, pour tout élément i de $[\![1,t]\!]$:

$$P(Y = y_i) = \sum_{j=1}^{u} P(Y = y_i / X = x_j) P(X = x_j).$$

Ainsi $E(g(Y)) = \sum_{i=1}^{t}\left[g(y_i)\Big(\sum_{j=1}^{u} P(Y = y_i/X = x_j)P(X = x_j)\Big)\right] = \sum_{j=1}^{u}\left[\Big(\sum_{i=1}^{t} g(y_i)P(Y = y_i/X = x_j)\Big)P(X = x_j)\right]$.

Ce qui donne encore : $E(g(Y)) = \sum_{j=1}^{u} [E_j\, P(X = x_j)]$.

Par conséquent $\boxed{E(g(Y)) = \sum_{j=1}^{u} E_j\, P(X = x_j)}$

Q1 a) T_k prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

b) Soit j un élément de $[\![0, n]\!]$. Si l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé, pour obtenir la génération $k+2$ on tire avec remise n disquettes dans la génération $k+1$ qui contient une proportion de disquettes infectées égale à $\dfrac{mj}{mn} = \dfrac{j}{n}$ et T_{k+1} compte alors le nombre de disquettes infectées obtenues.

Ainsi la loi conditionnelle de la variable T_{k+1} sachant que l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{j}{n}$.

Q2 a) Utilisons le préliminaire avec la fonction $g : x \to x$ et le couple (T_k, T_{k+1}).

Il vient alors : $E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n} E_j\, P(T_k = j)$ avec, pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, $E_j = \sum_{i=0}^{n} i\, P(T_{k+1} = i/T_k = j)$.

Soit j un élément de $[\![0, n]\!]$ et soit U_j une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{j}{n}$. $E(U_j) = n\,\dfrac{j}{n} = j$.

$T_{k+1}/\{T_k = j\} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{j}{n})$ et donc $E_j = \sum_{i=0}^{n} i\, P(T_{k+1} = i/T_k = j) = \sum_{i=0}^{n} i\, P(U_j = i) = E(U_j) = j$.

Alors : $E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n} E_j\, P(T_k = j) = \sum_{j=0}^{n} j\, P(T_k = j) = E(T_k)$.

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(T_{k+1}) = E(T_k)}$.

b) La suite $\big(E(T_k)\big)_{k\geqslant 0}$ est constante et $E(T_0) = np$ car T_0 suit la loi binômiale de paramètres n et p.

Par conséquent : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(T_k) = np}$.

Q3 a) Utilisons alors le préliminaire avec la fonction $g : x \to x(n - x)$ et le couple (T_k, T_{k+1}). Nous obtenons :

$E(Z_{k+1}) = E\Big(g(T_{k+1})\Big) = \sum_{j=0}^{n} E_j\, P(T_k = j)$ avec, pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, $E_j = \sum_{i=0}^{n} g(i)P(T_{k+1} = i/T_k = j)$.

Rappelons que, pour tout j élément de $[\![0,n]\!]$, la loi de T_{k+1} sachant que $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{j}{n}\cdot$

Soit j un élément de $[\![0,n]\!]$. Reprenons la variable aléatoire U_j sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suit la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{j}{n}\cdot$

On a encore : $\forall j\in[\![0,n]\!],\ E_j=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(i)P(T_{k+1}=i/T_k=j)=\sum_{i=0}^{n} g(i)P(U_j=i)=E\big(g(U_j)\big)=E\big(U_j(n-U_j)\big).$

Or : $E\big(U_j(n-U_j)\big)=nE(U_j)-E(U_j^2)=nE(U_j)-V(U_j)-\big(E(U_j)\big)^2$, $E(U_j)=j$ et $V(U_j)=n\,\dfrac{j}{n}\,\big(1-\dfrac{j}{n}\big)=j-\dfrac{j^2}{n}\cdot$

Donc : $E_j=nj-j+\dfrac{j^2}{n}-j^2=(n-1)j-j^2(1-\dfrac{1}{n})=\dfrac{n-1}{n}\,j(n-j).$

Finalement : $\forall j\in[\![0,n]\!],\ E_j=\dfrac{n-1}{n}\,j(n-j).$

Revenons alors à $E(Z_{k+1})$. $E(Z_{k+1})=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}E_jP(T_k=j)=\frac{n-1}{n}\sum_{j=0}^{n}\Big[j(n-j)P(T_k=j)\Big]=\frac{n-1}{n}E(g(T_k))$

$E(Z_{k+1})=\dfrac{n-1}{n}E(Z_k)$

Ainsi $\boxed{\text{La suite de terme général } E(Z_k) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{n-1}{n}}$.

b) Notons que $E(Z_0)=E(g(T_0))=E(T_0(n-T_0))=nE(T_0)-E(T_0^2)=nE(T_0)-V(T_0)-(E(T_0))^2$.

T_0 suit la loi binômiale de paramètres n et p donc : $E(T_0)=np$ et $V(T_0)=np(1-p)$.

Alors $E(Z_0)=n^2p-np(1-p)-n^2p^2=np(n-(1-p)-np)=np(n-1)(1-p)=n(n-1)p(1-p)$.

La suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique de premier terme $n(n-1)p(1-p)$ et de raison $\dfrac{n-1}{n}\cdot$.

Alors : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ E(Z_k)=n(n-1)p(1-p)\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k}$.

c) $\left|\dfrac{n-1}{n}\right|<1$ donc : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=0$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{k\to+\infty}E(Z_k)=0}$.

Q4 a) $\{Z_k=0\}$ est réalisé si et seulement si l'un de deux événements $\{T_k=0\}$ et $\{T_k=n\}$ est réalisé.

La réalisation de l'événement $\{Z_k=0\}$ signifie “concrètement” que les n disquettes tirées dans la génération k pour constituer la génération $k+1$ sont ou toutes saines ou toutes infectées.

b) Une rapide étude de la fonction $x\to x(n-x)$ sur $[1,n-1]$ conduit naturellement aux considérations suivantes !

$\forall j\in[\![1,n-1]\!], j(n-j)-1(n-1)=(n-1)(j-1)\geqslant 0.$

Ainsi $\boxed{\text{la plus petite valeur de } j(n-j) \text{ quand } j \text{ décrit } [\![1,n-1]\!] \text{ est } n-1}$.

c) Le théorème de transfert donne : $E(Z_k)=E(T_k(n-T_k))=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}j(n-j)\,P(T_k=j)=\sum_{j=1}^{n-1}j(n-j)\,P(T_k=j).$

D'après ce qui précède : $\forall j\in[\![1,n-1]\!],\ j(n-j)P(T_k=j)\geqslant(n-1)P(T_k=j).$

Ainsi $0\leqslant\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-1)\,P(T_k=j)\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}j(n-j)\,P(T_k=j)=E(Z_k).$

Donc : $0\leqslant P(0<T_k<n)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}P(T_k=j)\leqslant\frac{1}{n-1}\,E(Z_k).$

$\lim\limits_{k\to+\infty} E(Z_k)=0$ donne alors : $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} P(0<T_k<n)=0}$.

d) $P(Z_k=0)=P\big(T_k(n-T_k)=0\big)=P\big(\{T_k=0\}\cup\{T_k=n\})\big)=1-P(0<T_k<n)$.

La question précédente donne alors : $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} P(Z_k=0)=1}$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\{Z_k=0\}\subset\{Z_{k+1}=0\}$.

La suite de terme général $\{Z_k=0\}$ étant croissante, le théorème de la limite monotone nous donne alors :

$\lim\limits_{k\to+\infty} P(\{Z_k=0\})=P\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}\{Z_k=0\}\Big)$ donc $P\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}\{Z_k=0\}\Big)=1$.

$\boxed{\text{Il est quasi-certain que l'on obtiendra un lot constitué ou de } n \text{ disquettes saines ou de } n \text{ disquettes contaminées}}$.

e) Rappelons que : $P(0<T_k<n)\leqslant \dfrac{1}{n-1}\,E(Z_k)=\dfrac{1}{n-1}\,n(n-1)p(1-p)\,\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k=np(1-p)\,\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k$.

$P(Z_k=0)>0,99$ si et seulement si : $P(0<T_k<n)=1-P(Z_k=0)<0,01$.

Or $p(1-p)=-p^2+p=\dfrac14-\left(p-\dfrac12\right)^2\leqslant\dfrac14\cdot$ Ainsi : $P(0<T_k<n)\leqslant\dfrac{n}{4}\,\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k$.

Donc pour avoir $P(Z_k=0)>0,99$ <u>il suffit</u> d'avoir : $\dfrac{n}{4}\,\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k<0,01$.

$\dfrac{n}{4}\,\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k<0,01\iff\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k<\dfrac{0,04}{n}\iff k\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)<\ln\left(\dfrac{0,04}{n}\right)\cdot$

Comme : $0<\dfrac{n-1}{n}<1$, on peut alors écrire : $\dfrac{n}{4}\,\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k<0,01\iff k>\dfrac{\ln(0,04)-\ln n}{\ln(n-1)-\ln n}\cdot$

$\boxed{P(Z_k=0)>0,99 \text{ dès que } k \text{ est strictement supérieur à la partie entière de } \dfrac{\ln(0,04)-\ln n}{\ln(n-1)-\ln n}}$.

Q5 Soit k un élément de $\mathbb{N}^{(*)}$. Supposons l'événement $\{T_k=n\}$ réalisé. On a alors obtenu n disquettes infectées lorsque l'on a tiré n disquettes dans la génération k pour constituer la génération $k+1$. Ainsi la génération $k+1$ est constituée de nm disquettes infectées. Pour constituer la génération $k+1$ on tire n disquettes parmi ces nm disquettes toutes infectées et on obtient n disquettes infectées ! L'événement $\{T_{k+1}=n\}$ est donc réalisé.

On a $\{T_k=n\}\subset\{T_{k+1}=n\}$.

$\boxed{\text{La suite } \big(\{T_k=n\}\big)_{k\geqslant1} \text{ est croissante pour l'inclusion ; la suite } \big(\{T_k=n\}\big)_{k\geqslant0} \text{ aussi...}}$.

b) $F=\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}\{T_k=n\}$. La question précédente et le théorème de la limite monotone montrent que :

$\boxed{P(F)=\lim\limits_{k\to+\infty}P(T_k=n)}$.

Q6 $\forall j\in[\![1,n-1]\!],\ \{T_k=j\}\subset\{0<T_k<n\}$ donc : $\forall j\in[\![1,n-1]\!],\ 0\leqslant P(T_k=j)\leqslant P(0<T_k<n)$.

Comme : $\lim\limits_{k\to+\infty}P(0<T_k<n)=0$, il vient par encadrement $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty}P(T_k=j)=0 \text{ pour tout élément } j \text{ de } [\![1,n-1]\!]}$.

Q7 $np=E(T_k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\,P(T_k=j)=\sum_{j=1}^{n-1} j\,P(T_k=j)+n\,P(T_k=n)$.

Alors : $P(T_k=n)=p-\dfrac1n\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} j\,P(T_k=j)$. Comme, pour tout élément j de $[\![1,n-1]\!]$: $\lim\limits_{k\to+\infty}P(T_k=j)=0$, il vient : $\lim\limits_{k\to+\infty}P(T_k=n)=p$.

Ainsi : $\boxed{P(F) = p}$

Q8 a) $G = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{T_k = 0\}$ et on montre comme dans la question 5 que la suite $(\{T_k = 0\})_{k\geqslant 0}$ est croissante.

le théorème de la limite monotone donne encore : $P(G) = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(T_k = 0)$.

$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(T_k = j) = 1$. Alors : $P(T_k = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(T_k) = 1 - P(0 < T_k < n) - P(T_k = n)$.

Alors : $P(G) = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(T_k = 0) = \lim_{k\to+\infty} \Big(1 - P(0 < T_k < n) - P(T_k = n)\Big) = 1 - 0 - p$. $\boxed{P(G) = 1 - p}$.

b) La méthode est géniale.

Q9 Reprenons rapidement les questions 1, 2 et 3. $N = nm$.

• La question 1.

Ici encore T_k prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

Soit j un élément de $[\![0, n]\!]$. Si l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé, pour obtenir la génération $k + 2$ on tire sans remise n disquettes dans la génération $k + 1$ qui contient mj disquettes infectées et T_{k+1} compte alors le nombre de disquettes infectées obtenues.

Ainsi la loi conditionnelle de la variable T_{k+1} sachant que l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi hypergéométrique de paramètres N, n et $\dfrac{j}{n}$.

• La question 2.

Utilisons encore le préliminaire avec la fonction $g : x \to x$ et le couple (T_k, T_{k+1}).

Il vient alors : $E(T_{k+1}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} E_j\, P(T_k = j)$ avec, pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, $E_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\, P(T_{k+1} = i/T_k = j)$.

Si j appartient à $T_k(\Omega)$, $T_{k+1}/T_k = j \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, \frac{j}{n})$ et donc $E_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} iP(T_{k+1} = i/T_k = j) = n\,\frac{j}{n} = j$.

Alors : $E(T_{k+1}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} E_j\, P(T_k = j) = \sum_{j=0}^{n} j\, P(T_k = j) = E(T_k)$.

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(T_{k+1}) = E(T_k)}$.

La suite $\big(E(T_k)\big)_{k\geqslant 0}$ est constante et $E(T_0) = np$ car T_0 suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p.

Par conséquent : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(T_k) = np}$.

• La question 3.

Utilisons alors le préliminaire avec la fonction $g : x \to x(n - x)$ et le couple (T_k, T_{k+1}). Nous obtenons :

$E(Z_{k+1}) = E\Big(g(T_{k+1})\Big) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} E_j\, P(T_k = j)$ avec, pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, $E_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(i)P(T_{k+1} = i/T_k = j)$.

Rappelons que, pour tout j élément de $[\![0, n]\!]$, la loi de T_{k+1} sachant que $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi hypergéométrique de paramètres N, n et $\dfrac{j}{n}$.

Soit V_j une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant cette loi.

On a encore : $\forall j \in [\![0, n]\!],\ E_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(i)P(T_{k+1} = i/T_k = j) = \sum_{i=0}^{n} g(i)P(V_j = i) = E\big(g(V_j)\big) = E\big(V_j(n - V_j)\big)$.

Or : $E\big(V_j(n-V_j)\big)=nE(V_j)-E(V_j^2)=nE(V_j)-V(V_j)-\big(E(V_j)\big)^2$, $E(V_j)=j$ et $V(V_j)=n\,\dfrac{j}{n}\,\Big(1-\dfrac{j}{n}\Big)\,\Big(\dfrac{N-n}{N-1}\Big)=\dfrac{N-n}{n(N-1)}j(n-j)=\dfrac{m-1}{(N-1)}j(n-j)$

Donc : $\forall j\in[\![0,n]\!],\ E_j=nj-\dfrac{m-1}{(N-1)}\,j(n-j)-j^2=j(n-j)\Big[1-\dfrac{m-1}{N-1}\Big]=j(n-j)\,\dfrac{N-m}{N-1}$.

Revenons alors à $E(Z_{k+1})$. $E(Z_{k+1})=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}E_jP(T_k=j)=\dfrac{N-m}{N-1}\,\sum_{j=0}^{n}\Big[j(n-j)P(T_k=j)\Big]=\dfrac{N-m}{N-1}\,E(g(T_k))$

$E(Z_{k+1})=\dfrac{N-m}{N-1}\,E(Z_k)$

Ainsi $\boxed{\text{La suite de terme général } E(Z_k) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{N-m}{N-1}}$.

Notons que $E(Z_0)=E(g(T_0))=E(T_0(n-T_0))=nE(T_0)-E(T_0^2)=nE(T_0)-V(T_0)-(E(T_0))^2$.

T_0 suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p donc : $E(T_0)=np$ et $V(T_0)=np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.

Alors : $E(Z_0)=n^2p-np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}-n^2p^2=np(n-(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}-np)=np(1-p)\Big[n-\dfrac{N-n}{N-1}\Big]$

$E(Z_0)=n(n-1)p(1-p)\dfrac{N}{N-1}$.

La suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique de premier terme $n(n-1)p(1-p)\dfrac{N}{N-1}$ et de raison $\dfrac{N-m}{N-1}$.

Alors : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ E(Z_k)=n(n-1)p(1-p)\,\dfrac{N}{N-1}\,\Big(\dfrac{N-m}{N-1}\Big)^k}$.

$\Big|\dfrac{N-m}{N-1}\Big|<1$ donc : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\Big(\dfrac{N-m}{N-1}\Big)^k=0$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{k\to+\infty}E(Z_k)=0}$.