ECRICOME 2001

EXERCICE 1

Dans toute la suite, si T est une variable aléatoire, nous noterons F_T sa fonction de répartition.

Q1 X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre a. Ainsi sa fonction de répartition est définie par : $\forall x \in\ ]-\infty, 0[,\ F_X(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_X(x) = 1 - e^{-ax}$.

Déterminons la fonction de répartition de $-X$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-X} = P(-X \leqslant x) = P(X \geqslant -x) = 1 - P(X < -x) = 1 - F_X(-x)$.

Ainsi : $\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ F_{-X}(x) = 1 - (1 - e^{-a(-x)})$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F_{-X}(x) = 1 - 0$.

Alors $\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ F_{-X}(x) = e^{ax}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F_{-X}(x) = 1$.

Ou $\boxed{\forall x \in\ ]-\infty, 0[,\ F_{-X}(x) = e^{ax} \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[,\ F_{-X}(x) = 1.}$

Il est aisé de vérifier que F_{-X} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_{-X}(x) = ae^{ax}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_{-X}(x) = 0$.

$\boxed{\text{Dès lors, posons : } \forall x \in]-\infty, 0], f(x) = ae^{ax} \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = 0.\ f \text{ est une densité de } -X}$.

Q2 Posons $\forall x \in\ ]-\infty, 0[,\ g(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) = be^{-bx}$; g est une densité de Y car Y suit une loi exponentielle de paramètre b.

X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes il en est alors de même pour Y et $-X$. De plus Y et $-X$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives g et f. Le cours nous permet alors de dire que $Y - X = Y + (-X)$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\, f(u)\, \mathrm{d}u$$

Fixons t dans $\mathbb{R}$. $h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t-u)\, ae^{au}\, \mathrm{d}u$.

Le changement de variable $v = t - u$ donne alors : $h(t) = -\displaystyle\int_{+\infty}^{t} g(v)\, ae^{a(t-v)}\, \mathrm{d}v = a \int_{t}^{+\infty} g(v)\, e^{a(t-v)}\, \mathrm{d}v$.

Ainsi : $h(t) = a \displaystyle\int_{\mathrm{Max}\{t,0\}}^{+\infty} be^{-bv}\, e^{a(t-v)}\, \mathrm{d}v$. Posons, pour simplifier les écritures, $z = \mathrm{Max}\{t, 0\}$.

$h(t) = a \displaystyle\int_{z}^{+\infty} be^{-bv}\, e^{a(t-v)}\, \mathrm{d}v = ab\, e^{at} \int_{z}^{+\infty} e^{-(a+b)v}\, \mathrm{d}v$.

$h(t) = ab\, e^{at} \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-(a+b)v}}{-(a+b)}\right]_z^A = ab\, e^{at} \left[\frac{e^{-(a+b)z}}{(a+b)}\right] = \frac{ab}{a+b}\ e^{a(t-z)-bz}$.

Si t appartient à $]-\infty, 0]$, $z = 0$ et $h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{at}$ et si t appartient à $]0, +\infty[$, $z = t$ et $h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{-bt}$

$\boxed{\text{Dès lors la fonction } h \text{ définie par } \forall t \in]-\infty, 0],\ h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{at} \text{ et } \forall t \in]0, +\infty[,\ h(t) = \dfrac{ab}{a+b}\ e^{-bt} \text{ est une densité de } Y - X.}$

Q3 Soit s un élément de $[0,+\infty[$. $P(Z \leqslant s) = P(|X-Y| \leqslant s) = P(|Y-X| \leqslant s) = P(-s \leqslant Y-X \leqslant s) = \displaystyle\int_{-s}^{s} h(t)\,\mathrm{d}t$.

$$P(Z \leqslant s) = \int_{-s}^{0} \frac{ab}{a+b}\, e^{at}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{s} \frac{ab}{a+b}\, e^{-bt}\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{a+b}\left(\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-s}^{0} + \left[\frac{e^{-bt}}{-b}\right]_{0}^{s}\right) = \frac{ab}{a+b}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\,e^{-as} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b}\,e^{-bs}\right].$$

$$P(Z \leqslant s) = \frac{ab}{a+b}\left[\frac{a+b}{ab} - \frac{1}{ab}\left(b\,e^{-as} + a\,e^{-bs}\right)\right] = 1 - \frac{b\,e^{-as} + a\,e^{-bs}}{a+b}\cdot$$

Finalement : $\boxed{\forall s \in [0,+\infty[,\ P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\,e^{-as} + a\,e^{-bs}}{a+b}}$.

Q4 a) Nous venons de voir que : $\forall s \in [0,+\infty[,\ F_Z(s) = P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{b\,e^{-as} + a\,e^{-bs}}{a+b}\cdot$ F_Z est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De toute évidence : $\forall s \in]-\infty,0[,\ F_Z(s) = P(|X-Y| \leqslant s) = 0$. Comme $F_Z(0) = 0$ nous pouvons même écrire que : $\forall s \in]-\infty,0],\ F_Z(s) = 0$. Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$, non ?

Ceci suffit pour dire que $\boxed{\text{Z est une variable aléatoire à densité}}$.

$\forall s \in]-\infty,0[,\ F_Z'(s) = 0$ et $\forall s \in]0,+\infty[,\ F_Z'(s) = 0 - \dfrac{b\,(-a)e^{-as} + a\,(-b)e^{-bs}}{a+b} = \dfrac{ab}{a+b}\left[e^{-as} + e^{-bs}\right]$.

$\boxed{\text{Dès lors la fonction } \ell \text{ définie par } \forall s \in]-\infty,0[,\ \ell(s) = 0 \text{ et } \forall s \in [0,+\infty[,\ \ell(s) = \dfrac{ab}{a+b}\left[e^{-as}+e^{-bs}\right] \text{ est une densité de } |X-Y|.}$

b) Posons $\forall s \in]-\infty,0[,\ \hat{f}(s) = 0$ et $\forall s \in [0+\infty[,\ \hat{f}(s) = a\,e^{-at}$.

$\hat{f}$ est une densité de X et $\ell = \dfrac{1}{a+b}\left[b\,\hat{f} + a\,g\right]$.

X (resp. Y) possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{a}$ (resp. $\dfrac{1}{b}$). Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\,\hat{f}(s)\,\mathrm{d}s$ (resp. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\,g(s)\,\mathrm{d}s$) existe et vaut $\dfrac{1}{a}$ (resp. $\dfrac{1}{b}$).

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s\,\ell(s)\,\mathrm{d}s$ existe et vaut $\dfrac{1}{a+b}\left[b\,\dfrac{1}{a} + a\,\dfrac{1}{b}\right]$. $\boxed{Z = |X-Y| \text{ admet une espérance qui vaut : } \dfrac{b^2+a^2}{ab(a+b)}\cdot}$

EXERCICE 2

Q1 tr est une application de E dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de E et λ un réel.

$\lambda\,A + B = (\lambda\,a_{ij} + b_{ij})$ donc $\mathrm{tr}(\lambda\,A+B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda\,a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

$\boxed{\text{L'application tr est une forme linéaire sur } E}$.

Q2 a) Soit $M = (m_{ij})$ un élément de E. ${}^tM = (m_{ji})$. Ainsi $\mathrm{tr}({}^tM) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ii} = \mathrm{tr}(M)$!

$\boxed{\forall M \in E,\ \mathrm{tr}({}^tM) = \mathrm{tr}(M)}$.

b) Soit (A,B) un couple d'éléments de E. D'après ce qui précède : $\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB))$.

Or ${}^t({}^tAB) = {}^tB\,{}^t({}^tA) = {}^tBA$. Ainsi $g(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = g(B,A)$.

$\boxed{\forall (A,B) \in E^2,\ g(A,B) = g(B,A)}$.

Q3 Soit $A = (a_{ij})$ un élément de E. ${}^tAA = (c_{ij})$ avec, pour tout élément (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$.

Alors $g(A,A) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}^2$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } A \text{ de } E,\ g(A,A) \text{ est la somme des carrés des coefficients de } A}$

<u>*Remarque*</u> *Plus généralement si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E :* $\boxed{g(A,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}}$.

Q4 • De toute évidence g est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soient A, B et C trois éléments de E. Soit λ un réel.

$g(A, \lambda B + C) = \mathrm{tr}({}^tA(\lambda B + C)) = \mathrm{tr}(\lambda {}^tAB + {}^tAC)$.

La linéarité de l'application tr donne alors : $g(A, \lambda B + C) = \lambda\,\mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tAC) = \lambda\, g(A,B) + g(A,C)$.

$\forall (A,B,C) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(A, \lambda B + C) = \lambda\, g(A,B) + g(A,C)$. g est linéaire à droite.

• D'après Q2 b) : $\forall (A,B) \in E^2,\ g(A,B) = g(B,A)$. g est symétrique.

Ces deux premiers points permettent de dire que g est une forme bilinéaire symétrique.

• Soit A un élément de E. $g(A,A)$ est la somme des carrés des coefficients de A donc $g(A,A)$ est un réel positif ou nul.

Mieux, si $g(A,A)$ est nul, les carrés des coefficients de A sont nécessairement tous nuls donc les coefficients de A sont également tous nuls et A est la matrice nulle.

Donc $\forall A \in E,\ g(A,A) \geqslant 0$ et $\forall A \in E,\ g(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0_E$.

Ainsi g est une forme bilinéaire symétrique définie positive comme disent les gens savants.

Nous dirons que $\boxed{g \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Q5 a) Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ il en est de même de la famille $(e_n, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$.

f est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui transforme la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n}$.

b) Pour montrer que $U^n = I$ montrons que $f^n = Id_E$. f^n et Id_E sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ donc $f^n = Id_E$ dès que f^n et Id_E coïncident sur les éléments de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Dès lors prouvons que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ f^n(e_k) = e_k$.

Fixons k dans $[\![1,n]\!]$ et commençons par montrer, par récurrence, que : $\forall i \in [\![0,k-1]\!],\ f^i(e_k) = e_{k-i}$.

C'est clair pour $i = 0$. Supposons la propriété vraie pour un élément i de $[\![0,k-2]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Observons que $2 \leqslant k - i \leqslant n$. Alors $f^{i+1}(e_k) = f\big(f^i(e_k)\big) = f(e_{k-i}) = e_{k-i-1} = e_{k-(i+1)}$. Et ainsi s'achève la récurrence.

En particulier $f^{k-1}(e_k) = e_{k-(k-1)} = e_1$. Alors $f^k(e_k) = f\big(f^{k-1}(e_k)\big) = f(e_1) = e_n$.

Cette première étape nous donne alors, pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$: $\forall i \in [\![0,k-1]\!],\ f^i(e_k) = e_{k-i}$ et $f^k(e_k) = e_n$.

Reprenons, pour finir, k dans $[\![1,n]\!]$. $f^n(e_k) = f^{n-k}\big(f^k(e_k)\big) = f^{n-k}(e_n)$.

Comme $n-k$ est élément de $[\![0,n-1]\!]$, $f^{n-k}(e_n)=e_{n-(n-k)}=e_k$; ceci donne alors : $f^n(e_k)=f^{n-k}(e_n)=e_k$.

Finalement $\forall k\in[\![1,n]\!],\ f^n(e_k)=e_k$. Ceci donne $f^n=Id_E$ qui donne enfin $\boxed{U^n=I}$.

Rappelons que la famille $\mathcal{B}'=\Big(f(e_1),f(e_2),f(e_1),\dots,f(e_n)\Big)=(e_n,e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la matrice U de f dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est également la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Si nous munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont alors deux bases orthonormales.

La matrice de passage U de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ vérifie alors : $\boxed{U^{-1}={}^tU}$.

Q6 $f^2(e_1)=f\big(f(e_1)\big)=f(e_4)=e_3$, $f^2(e_2)=f\big(f(e_2)\big)=f(e_1)=e_4$, $f^2(e_3)=f\big(f(e_3)\big)=f(e_2)=e_1$ et $f^2(e_4)=f\big(f(e_4)\big)=f(e_3)=e_2$.

$f^3(e_1)=f\big(f^2(e_1)\big)=f(e_3)=e_2$, $f^3(e_2)=f\big(f^2(e_2)\big)=f(e_4)=e_3$, $f^3(e_3)=f\big(f^2(e_3)\big)=f(e_1)=e_4$ et $f^3(e_4)=f\big(f^2(e_4)\big)=f(e_2)=e_1$.

Ainsi : $\boxed{U^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\text{ et } U^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}$.

Montrons que la famille (I,U,U^2,U^3) est orthogonale.

g étant symétrique il suffit pour cela de montrer que : $\forall (i,j)\in[\![0,3]\!]^2,\ i<j\Rightarrow g(U^i,U^j)=0$.

Soit i et j deux éléments de $[\![0,3]\!]$ tels que $i<j$. $g(U^i,U^j)=\mathrm{tr}({}^tU^iU^j)=\mathrm{tr}\left(({}^tU)^iU^j\right)=\mathrm{tr}\left((U^{-1})^iU^j\right)=\mathrm{tr}(U^{j-i})$.

Observons que $j-i\in\{1,2,3\}$. Or : $\mathrm{tr}(U)=\mathrm{tr}(U^2)=\mathrm{tr}(U^3)=0$. Ainsi $g(U^i,U^j)=0$.

Ceci achève de montrer que $\boxed{(I,U,U^2,U^3)\text{ est une famille orthogonale de } E}$.

Q7 $V=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Déterminons la projection orthogonale W de V sur $F=\mathrm{Vect}(I,U,U^2,U^3)$.

W appartient à F donc il existe quatre réels a_0, a_1, a_2, a_3 tels que $W=a_0I+a_1U+a_2U^2+a_3U^3$.

De plus $V-W$ est un élément de $F^\perp$ donc $V-W$ est orthogonal à I, U, U^2 et U^3.

Soit k un élément de $[\![0,3]\!]$. $0=g(V-W,U^k)=g(V,U^k)-g(W,U^k)$ donc $g(V,U^k)=g(W,U^k)$. Alors :

$g(V,U_k)=g(W,U^k)=g(a_0I+a_1U+a_2U^2+a_3U^3,U^k)=a_0g(I,U^k)+a_1g(U,U^k)+a_2g(U^2,U^k)+a_3g(U^3,U^k)$.

La famille (I,U,U^2,U^3) étant orthogonale, il vient :

$g(V,U_k)=a_kg(U^k,U^k)=a_k\,\mathrm{tr}\left(({}^tU)^kU^k\right)=a_k\,\mathrm{tr}\left((U^{-1})^kU^k\right)=a_k\,\mathrm{tr}(U^{k-k})=a_k\,\mathrm{tr}(I)=4\,a_k$.

Ainsi $a_k=\dfrac14\ g(V,U^k)=\dfrac14\ \mathrm{tr}({}^tVU^k)$. Notons alors que :

$${}^tVI={}^tV=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ {}^tVU=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ {}^tVU^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ {}^tVU^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

La trace de ces quatre matrices est 1. Alors $a_k=\dfrac14\ \mathrm{tr}({}^tVU^k)=\dfrac14$.

Finalement $\boxed{\text{la projection orthogonale de } V \text{ sur } F=\mathrm{Vect}(I,U,U^2,U^3) \text{ est } W=\dfrac14\left(I+U+U^2+U^3\right)}$.

PROBLÈME

Résultats préliminaires

Q1 Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}$.

C'est clair pour $n = 0$ car F_0 est la variable certaine égale à a et $2\,a_0 = 2 \times 2^{0-1}a = a$.

Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $2k$ la valeur prise par F_n ; k appartient à $[\![0, a_n]\!]$ (hypothèse de récurrence...). Soit i la valeur prise par X_n ; i est élément de $[\![0, 2k]\!]$.

F_{n+1} prend alors la valeur $2i$ (si le lancer $n+1$ donne pile) ou la valeur $2(2k-i)$ (si le lancer $n+1$ donne face).

$0 \leqslant i \leqslant 2k \leqslant 2a_n = a_{n+1}$ donc $2i$ appartient à $\{0, 2, 4, \dots, 2a_{n+1}\}$.

$0 \leqslant 2k - i \leqslant 2k \leqslant 2a_n = a_{n+1}$ donc $2(2k-i)$ appartient également à $\{0, 2, 4, \dots, 2a_{n+1}\}$.

Ceci suffit pour dire que F_{n+1} prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots, 2a_{n+1}\}$ et pour achever la récurrence.

$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ F_n \text{ prend ses valeurs dans } \{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}}$.

Remarque
Notons que ce qui précède indique que si F_n prend la valeur $2k$ alors F_{n+1} prend une valeur inférieure ou égale à $4k$ ($0 \leqslant i \leqslant 2k$ et $0 \leqslant 2k - i \leqslant 2k$...).

Q2 a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) = 1$.

Ainsi $\boxed{G_n(1) = 1}$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $G_n(0) = P(F_n = 0)$.

$\boxed{\text{Concrètement, } G_n(0) \text{ est donc la probabilité pour que la fortune du joueur soit nulle après le lancer } n}$.

Si la fortune du joueur est nulle après le lancer n, elle reste nulle après le lancer $n+1$ (si F_n prend la valeur 0, X_n prend également la valeur 0 ainsi que $2X_n$ et $2(F_n - X_n)$).

Ainsi l'événement $\{F_n = 0\}$ est contenu dans l'événement $\{F_{n+1} = 0\}$.

La croissance de P donne alors : $G_n(0) = P(F_n = 0) \leqslant P(F_{n+1} = 0) = G_{n+1}(0)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n(0) \leqslant G_{n+1}(0)$. $\boxed{\text{La suite } \big(G_n(0)\big)_{n \geqslant 0} \text{ est croissante}}$.

De plus cette suite, de probabilités, est majorée par 1 donc elle converge. $\boxed{\big(G_n(0)\big)_{n \geqslant 0} \text{ est convergente}}$.

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Notons que G_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme).

$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{a_n} kP(F_n = 2k)\, x^{k-1}$. Donc $2\,G_n'(1) = \sum\limits_{k=1}^{a_n} 2kP(F_n = 2k) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} 2kP(F_n = 2k) = E(F_n)$.

Ainsi $\boxed{G_n'(1) = E(F_n)/2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n''(x) = \sum\limits_{k=2}^{a_n} k(k-1)P(F_n = 2k)\, x^{k-2}$. $G_n''(1) = \sum\limits_{k=2}^{a_n} k(k-1)P(F_n = 2k) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} k(k-1)P(F_n = 2k)$.

$4G_n''(1) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} 4k(k-1)P(F_n = 2k) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} (2k)^2 P(F_n = 2k) - 2\sum\limits_{k=0}^{a_n} 2kP(F_n = 2k) = E(F_n^2) - 2E(F_n)$.

En remarquant que $E(F_n^2) = V(F_n) + \big(E(F_n)\big)^2$, il vient $4G_n''(1) = V(F_n) + \big(E(F_n)\big)^2 - 2E(F_n)$.

Ainsi $\boxed{V(F_n) = 4G_n''(1) + 2E(F_n) - \big(E(F_n)\big)^2}$.

Q3 Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ G_n''(x) = \sum\limits_{k=2}^{a_n} k(k-1)P(F_n = 2k)\, x^{k-2} \geqslant 0$. $\boxed{G_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^+}$.

Première partie

Q1 Notons P_{n+1} l'événement le lancer $n+1$ donne pile. $\big(P_{n+1}, \overline{P_{n+1}}\big)$ est un système complet d'événements.

Ainsi $P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\} \cap P_{n+1}) + P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\} \cap \overline{P_{n+1}})$

$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = P(\{2X_n = 2j\} \cap \{F_n = 2k\} \cap P_{n+1}) + P(\{2(F_n - X_n) = 2j\} \cap \{F_n = 2k\} \cap \overline{P_{n+1}})$

Par une indépendance raisonnable il vient alors :

$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = P(\{X_n = j\} \cap \{F_n = 2k\})P(P_{n+1}) + P(\{F_n - X_n = j\}) \cap \{F_n = 2k\})P(\overline{P_{n+1}})$.

Par conséquent : $P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = p\, P(\{X_n = j\} \cap \{F_n = 2k\}) + (1-p)\, P(\{F_n - X_n = j\} \cap \{F_n = 2k\})$.

$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = p\, P(\{X_n = j\} \cap \{F_n = 2k\}) + (1-p)\, P(\{X_n = 2k - j\} \cap \{F_n = 2k\})$.

$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = p\, P(F_n = 2k)P(X_n = j / F_n = 2k) + (1-p)\, P(F_n = 2k)P(X_n = 2k - j / F_n = 2k)$.

$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = p\, \dfrac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k) + (1-p)\, \dfrac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k) = \dfrac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k)$.

$\boxed{\text{Si } k \text{ est un élément de } [\![0, a_n]\!] \text{ et si } j \text{ est un élément de } [\![0, 2k]\!],\ P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = \dfrac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k)}$.

<u>Remarques</u>

1. La remarque de la première question des résultats préliminaires, autorise à dire que si j est un élément de $[\![0, a_{n+1}]\!]$, strictement supérieur à $2k$, alors $P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = 0$; en effet si F_n prend la valeur $2k$, F_{n+1} prend une valeur inférieure ou égale à $4k$.

2. En toute rigueur la démonstration précédente ne vaut que si $P(F_n = 2k)$ n'est pas nul(le). Rassurons nous en remarquant que si $P(F_n = 2k) = 0$ alors $P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = 0$ (car P est croissante et $\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\} \subset \{F_n = 2k\}$)... et le résultat vaut encore non ?

Q2 Soit j un élément de $[\![0, a_{n+1}]\!]$. $(\{F_n = 2k\})_{k \in [\![0, a_n]\!]}$ est un système complet d'événements donc :

$P(F_{n+1} = 2j) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\})$.

L'une des remarques précédentes permet d'écrire que : $P(F_{n+1} = 2j) = \displaystyle\sum_{\frac{j}{2} \leqslant k \leqslant a_n} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\})$.

Ainsi $\boxed{P(F_{n+1} = 2j) = \displaystyle\sum_{\frac{j}{2} \leqslant k \leqslant a_n} \frac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k)}$.

Q3 Soit x un réel de $[0, 1[$ (ou de $\mathbb{R} - \{1\}$...). $G_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{a_{n+1}} P(F_{n+1} = 2j)\, x^j = \sum_{j=0}^{a_{n+1}} \sum_{\frac{j}{2} \leqslant k \leqslant a_n} \frac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k)\, x^j$.

Une permutation classique (?) des deux sommes donne alors :

$G_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{a_n} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k)\, x^j = \sum_{k=0}^{a_n} \left(\frac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k) \sum_{j=0}^{2k} x^j \right)$. Comme x ne vaut pas 1 :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{1}{2k+1}\, P(F_n = 2k)\, \frac{1 - x^{2k+1}}{1-x}.$$

Finalement $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k}-1}{(2k+1)(x-1)}\, P(F_n = 2k)}$.

<u>*Remarque*</u>
De tout évidence le résultat précédent vaut pour tout élément x de $\mathbb{R} - \{1\}$.

Q4 Soit x un réel.

$$\int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k)\, t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) \int_x^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k)\, \frac{1 - x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Notons alors que $x \to \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t$ est une fonction polynôme.

Supposons que x appartienne à $[0,1[$.

$$(1-x)\, G_{n+1}(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1}-1}{(2k+1)(x-1)} P(F_n = 2k) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{1 - x^{2k+1}}{2k+1} P(F_n = 2k) = \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Alors la fonction polynôme $x \to (1-x)\, G_{n+1}(x) - \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t$, qui s'annule en tout point de $[0,1[$, admet une infinité de zéros. C'est donc la fonction nulle.

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x)\, G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t}$.

<u>*Remarque*</u>
Le résultat s'obtient encore plus rapidement en utilisant la remarque de la question précédente...

Q5 $x \to G_{n+1}(x)$ et $x \to \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynômes.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x)\, G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t$. En dérivant il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -G_{n+1}(x) + (1-x)\, G'_{n+1}(x) = -G_n(x^2)$.

En dérivant une seconde fois on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -G'_{n+1}(x) - G'_{n+1}(x) + (1-x)\, G''_{n+1}(x) = -2x\, G'_n(x^2)$.

En posant $x = 1$ on obtient : $-2\, G'_{n+1}(1) = -2\, G'_n(1)$ ou $-E(F_{n+1}) = -E(F_n)$. Soit encore $E(F_{n+1}) = E(F_n)$.

La suite $\big(E(F_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est constante et $E(F_0) = a$. Par conséquent $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(F_n) = a}$.

Deuxième partie

A) Simulation informatique de l'expérience

Q1 La fonction mise.

Il s'agit de simuler, de manière indépendante, m fois une expérience aléatoire et de compter le nombre de réalisations d'un événement A de probabilité s, associé à cette expérience.

Ici nous nous placerons dans le cas où l'expérience consiste à choisir au hasard un élément de l'intervalle $[0,1[$ et l'événement A est : obtenir un élément appartenant à l'intervalle $[0,s[$.

```
function mise(m:integer;s:real):integer;

var i,suc:integer;

begin

suc:=0;
for i:=1 to m do if random<s then suc:=suc+1;
mise:=suc;

end;
```

Q2 Le programme principal.

```
program simulation;

var a,n,i,X,F:integer;r,p:real;

function mise(m:integer;s:real):integer;
           ................

begin
randomise;
write('Donner la valeur de n. n=');readln(n);
write('Donner la valeur de p. p=');readln(p);
write('Donner la valeur de r. r=');readln(r);
write('Donner la valeur de a. a=');readln(a);

F:=a;
For i:=1 to n do
    begin
    X:=mise(r,F);
    if random<p then F:=X+X else F:=2*(F-X);
    writeln('La fortune du joueur après le lancer ',i,' est : ',F);
    end;
end.
```

B) Etude théorique

Q1 Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et soit x un réel. $G_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{a_{n+1}} P(F_{n+1} = 2j)\, x^j$.

Reprenons les arguments de la première partie.

Soit j un élément de $[\![0, a_{n+1}]\!]$. Comme $(\{F_n = 2k\})_{k \in [\![0,a_n]\!]}$ est un système complet d'événements :

$P(F_{n+1} = 2j) = \sum_{k=0}^{a_n} P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\})$.

Soit k un élément de $[\![0, a_n]\!]$.

Si $j > 2k$ alors $P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = 0$.

Supposons $j \leqslant 2k$. Un raisonnement rigoureusement analogue à celui de la question 1 de la première partie donne :

$P(\{F_{n+1} = 2j\} \cap \{F_n = 2k\}) = p\, P(F_n = 2k) P(X_n = j / F_n = 2k) + (1-p)\, P(F_n = 2k) P(X_n = 2k - j / F_n = 2k)$.

Par hypothèse : $P(X_n = j / F_n = 2k) = \mathrm{C}_{2k}^{j}\, r^j (1-r)^{2k-j}$ et $P(X_n = 2k - j / F_n = 2k) = \mathrm{C}_{2k}^{2k-j}\, r^{2k-j} (1-r)^j$.

Notons que : $C_{2k}^{2k-j}=C_{2k}^{j}$.

On a alors $P(\{F_{n+1}=2j\}\cap\{F_n=2k\})=\Big[p\ C_{2k}^{j}\,r^j(1-r)^{2k-j}+(1-p)\,C_{2k}^{j}\,r^{2k-j}(1-r)^j\Big]\,P(F_n=2k)$.

Ainsi $P(F_{n+1}=2j)=\displaystyle\sum_{\frac{j}{2}\leqslant k\leqslant a_n}\Big[p\ C_{2k}^{j}\,r^j(1-r)^{2k-j}+(1-p)\,C_{2k}^{j}\,r^{2k-j}(1-r)^j\Big]\,P(F_n=2k)$. Alors :

$$G_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{a_{n+1}}P(F_{n+1}=2j)\,x^j=\sum_{j=0}^{a_{n+1}}\ \sum_{\frac{j}{2}\leqslant k\leqslant a_n}\Big[p\ C_{2k}^{j}\,r^j(1-r)^{2k-j}+(1-p)\,C_{2k}^{j}\,r^{2k-j}(1-r)^j\Big]\,P(F_n=2k)\,x^j.$$

Une inversion des deux sommes donne :

$$G_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{a_n}\sum_{j=0}^{2k}\Big[p\ C_{2k}^{j}\,r^j(1-r)^{2k-j}+(1-p)\,C_{2k}^{j}\,r^{2k-j}(1-r)^j\Big]\,P(F_n=2k)\,x^j.$$

$$G_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{a_n}\left[p\sum_{j=0}^{2k}C_{2k}^{j}(xr)^j(1-r)^{2k-j}+(1-p)\sum_{j=0}^{2k}C_{2k}^{j}(r)^{2k-j}(x-xr)^j\right]P(F_n=2k).$$

De la formule du binôme il résulte que : $G_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{a_n}\big[p\,(xr+1-r)^{2k}+(1-p)\,(x-xr+r)^{2k}\big]\,P(F_n=2k)$.

Enfin : $G_{n+1}(x)=p\displaystyle\sum_{k=0}^{a_n}P(F_n=2k)(xr+1-r)^{2k}+(1-p)\sum_{k=0}^{a_n}P(F_n=2k)(x-xr+r)^{2k}$.

Il est alors clair que $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ G_{n+1}(x)=p\,G_n\big[(xr+1-r)^2\big]+(1-p)\,G_n\big[(x-xr+r)^2\big]}$.

Q2 a) Soit x un réel. $Q(x)=Ax^2+2r(1-r)x+A=A(x-1)^2+2Ax+2r(1-r)x=A(x-1)^2+2x(A+r-r^2)$.

p vaut $\frac12$ donc $A=\frac12\big(r^2+(1-r)^2\big)=\frac12\big(2r^2-2r+1\big)=r^2-r+\frac12$.

Alors $Q(x)=A(x-1)^2+2x(A+r-r^2)=A(x-1)^2+2x(r^2-r+\frac12+r-r^2)=A(x-1)^2+x$.

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ Q(x)=x+A(x-1)^2}$.

b) Soit x un élément de $[0,1]$.

$A=\frac12\big(r^2+(1-r)^2\big)$ est strictement positif. Par conséquent $Q(x)=x+A(x-1)^2\geqslant 0$.

Nous avons vu que $A=r^2-r+\frac12$. Ainsi $A=\frac12-r(1-r)\leqslant\frac12$.

Alors $Q(x)=x+A(x-1)^2\leqslant x+\frac12(x-1)^2=\frac12\big(2x+x^2-2x+1\big)=\frac12\big(x^2+1\big)\leqslant\frac12(1+1)=1$.

Finalement $\forall x\in[0,1],\ 0\leqslant Q(x)\leqslant 1$. $\boxed{[0,1]\text{ est stable par }Q}$.

<u>Remarque</u>

Ce résultat s'obtient également sans difficulté en remarquant que : Q est croissante sur $[0,1]$, $Q(0)\geqslant 0$ et $Q(1)=1$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=Q(u_n)-u_n=A(u_n-1)^2\geqslant 0$. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n$. $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0}\text{ est croissante}}$.

Comme $u_0=0$ et que $[0,1]$ est stable par Q, une récurrence très simple montre que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est alors croissante et majorée donc convergente.

Notons ℓ sa limite. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+A(u_n-1)^2$ donc $\ell=\ell+A(\ell-1)^2$. $A(\ell-1)^2=0$.

A étant strictement positif, $(\ell-1)^2$ est nul et ℓ vaut alors 1. $\boxed{\text{La suite }(u_n)_{n\geqslant 0}\text{ converge vers }1}$.

Q3 a) Soit n dans $\mathbb{N}$ et x un réel (positif ou nul). G_n est convexe sur $\mathbb{R}^+$ donc :

$$G_n\left[\frac12\,(xr+1-r)^2+\frac12\,(x-xr+r)^2\right]\leqslant\frac12\,G_n\big[(xr+1-r)^2\big]+\frac12\,G_n\big[(x-xr+r)^2\big]=G_{n+1}(x).$$

Observons que : $\frac{1}{2}\ (xr+1-r)^2+\frac{1}{2}\ (x-xr+r)^2=\frac{1}{2}\ (xr+1-r)^2+\frac{1}{2}\ (x(1-r)+r)^2$.

Donc $\frac{1}{2}\ (xr+1-r)^2+\frac{1}{2}\ (x-xr+r)^2=\frac{1}{2}\ \Big(\big(r^2+(1-r)^2\big)x^2+4r(1-r)x+r^2+(1-r)^2\Big)$.

Ainsi $\frac{1}{2}\ (xr+1-r)^2+\frac{1}{2}\ (x-xr+r)^2=\frac{1}{2}\ (2Ax^2+4r(1-r)x+2A)=Q(x)$.

Alors $G_n\big(Q(x)\big)\leqslant G_{n+1}(x)$. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^{(+)},\ G_n\big(Q(x)\big)\leqslant G_{n+1}(x)}$.

<u>Remarque</u> *Cette formule vaut pour tout reél x.*

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Posons pour tout k dans $[\![1,n+1]\!]$, $t_k=G_k(u_{n+1-k})$ et montrons que la suite $(t_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est croissante.

Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. $t_{k+1}=G_{k+1}(u_{n-k})\geqslant G_k\big(Q(u_{n-k})\big)=G_k(u_{n-k+1})=t_k$.

Ceci achève de montrer la croissance de la suite $(t_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ et autorise à écrire que :

$G_{n+1}(0)=G_{n+1}(u_0)=t_{n+1}\geqslant t_1=G_1(u_n)$. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ G_{n+1}(0)\geqslant G_1(u_n)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$. Comme G_1 est continue en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_1(u_n)=G_1(1)=1$.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N},\ G_1(u_n)\leqslant G_{n+1}(0)=P(F_{n+1}=0)\leqslant 1$. Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_{n+1}=0)=1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n=0)=1$.

Rappelons que la suite $(\{F_n=0\})_{n\geqslant 0}$ est croissante (au sens de l'inclusion). Le théorème de la limite monotone indique alors que $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{F_n=0\}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n=0)=1$.

L'événement $\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{F_n=0\}\right)$ est donc quasi-certain. $\boxed{\text{Il est quasi-certain que le joueur soit ruiné. Tragique !}}$.

Q4 a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall x\in\mathbb{R},\ G_{n+1}(x)=p\,G_n\big[(xr+1-r)^2\big]+(1-p)\,G_n\big[(x-xr+r)^2\big]$.

En dérivant il vient : $\forall x\in\mathbb{R},\ G'_{n+1}(x)=p(2r(xr+1-r))\,G'_n\big[(xr+1-r)^2\big]+(1-p)(2(1-r)(x-xr+r))\,G'_n\big[(x-xr+r)^2\big]$.

En faisant $x=1$ on obtient $G'_{n+1}(1)=2pr\,G'_n(1)+2(1-p)(1-r)\,G'_n(1)=2[pr+(1-p)(1-r)]\,G'_n(1)=B\times G'_n(1)$.

Soit encore $E(F_{n+1})=B\times E(F_n)$.

$\boxed{\big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0}\text{ est une suite géométrique de raison } B}$. On a alors $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ E(F_n)=aB^n}$.

b) Notons que : $2p=1-2p'$, $2r=1-2r'$, $|p'|<\frac{1}{2}$ et $|r'|<\frac{1}{2}\cdot$

Alors $B=2[pr+(1-p)(1-r)]=4pr+2-2p-2r=(1-2p')(1-2r')+2p'+2r'=1+4r'p'$.

$|p'|<\frac{1}{2}$ et $|r'|<\frac{1}{2}$ donc $|p'r'|<\frac{1}{4}\cdot$ Ainsi $-1<4p'r'<1$ et $0<B<2$.

Si $p'r'<0:0<B<1$ et la suite $\big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Si $p'r'=0:B=1$ et la suite $\big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0}$ est constante et converge vers a.

Si $p'r'>0:B>1$ et la suite $\big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $+\infty$ et donc diverge.

$\boxed{\text{Si } (1/2-p)(1/2-r)<0: \text{la suite } \big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0}$.

$\boxed{\text{Si } (1/2-p)(1/2-r)=0: \text{la suite } \big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0} \text{ est constante et converge vers } a}$.

$\boxed{\text{Si } (1/2-p)(1/2-r)>0: \text{la suite } \big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0} \text{ a pour limite } +\infty \text{ et donc diverge}}$.

c) Soit n dans $\mathbb{N}$. $0\leqslant 1-P(F_n=0)=\sum\limits_{k=1}^{a_n} P(F_n=2k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{a_n}(2k)P(F_n=2k)=E(F_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant 1 - P(F_n = 0) \leqslant E(F_n)$. Il est alors clair que :

$\boxed{\text{si la suite } \big(E(F_n)\big)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers 0, la suite } \big(P(F_n=0)\big)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers 1}}$.

Q5 a) Soit n dans $\mathbb{N}$

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G'_{n+1}(x) = p(2r(xr+1-r))\, G'_n\big[(xr+1-r)^2\big] + (1-p)(2(1-r)(x-xr+r))\, G'_n\big[(x-xr+r)^2\big]$.

En dérivant on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G''_{n+1}(x) = p(2r^2)\, G'_n\big[(xr+1-r)^2\big] + p(2r(xr+1-r))^2\, G''_n\big[(xr+1-r)^2\big] + (1-p)(2(1-r)^2)\, G'_n\big[(x-xr+r)^2\big] + (1-p)(2(1-r)(x-xr+r))^2\, G''_n\big[(x-xr+r)^2\big].$$

On faisant $x = 1$ il vient : $G''_{n+1}(1) = 2[pr^2 + (1-p)(1-r)^2]\, G'_n(1) + 4[pr^2 + (1-p)(1-r)^2]\, G''_n(1)$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G''_{n+1}(1) = 2A\, G'_n(1) + 4A\, G''_n(1)}$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $G''_{n+1}(1) = 2A\, G'_n(1) + 4A\, G''_n(1)$.

Rappelons que $E(F_n) = aB^n$ donc $2\, G'_n(1) = E(F_n) = aB^n$. Ainsi $G''_{n+1}(1) = aAB^n + 4A\, G''_n(1)$.

En divisant par B^{n+1} on obtient : $v_{n+1} = \dfrac{aA}{B} + \dfrac{4A}{B}\, v_n$.

Ainsi $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 0} \text{ est une suite arithmético-géométrique}}$.

c) Commençons par remarquer que $v_0 = G''_0(1)$. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ G_0(x) = x^{a/2}$, $v_0 = G''_0(1) = \frac{a}{2}(\frac{a}{2} - 1) = \frac{a(a-2)}{4}$.

Distingons alors deux cas.

• <u>Supposons que $B = 4A$</u>. La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de raison $\dfrac{aA}{B} = \dfrac{a}{4}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 + \dfrac{a}{4}\, n = \dfrac{a(a-2)}{4} + \dfrac{a}{4}\, n = \dfrac{a(a-2+n)}{4}$.

Alors $\boxed{\text{Si } B = 4A : \forall n \in \mathbb{N},\ G''_n(1) = \dfrac{a(a-2+n)}{4}\, B^n}$.

• <u>Supposons que $B \neq 4A$</u>.

Soit x un réel. $x = \dfrac{aA}{B} + \dfrac{4A}{B}\, x \Leftrightarrow x = \dfrac{aA}{B-4A}$. Posons $C = \dfrac{aA}{B-4A}$.

La suite $(v_n - C)_{n\geqslant 0}$ est alors clairement géometrique de raison $\dfrac{4A}{B}$ et de premier terme $v_0 - C = \dfrac{a(a-2)}{4} - C$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - C = \left(\dfrac{4A}{B}\right)^n \left(\dfrac{a(a-2)}{4} - C\right)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = C + \left(\dfrac{4A}{B}\right)^n \left(\dfrac{a(a-2)}{4} - C\right)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ G''_n(1) = v_n B^n = CB^n + \left(\dfrac{a(a-2)}{4} - C\right)(4A)^n$.

Finalement $\boxed{\text{Si } B \neq 4A : \forall n \in \mathbb{N},\ G''_n(1) = \dfrac{aA}{B-4A}\, B^n + \left(\dfrac{a(a-2)}{4} - \dfrac{aA}{B-4A}\right)(4A)^n}$.

<u>Remarque</u>

$B = 4A$ *si et seulement si* : $p = 2(1-r)\left(r - \dfrac{1}{2}\right)$.

Q6 a) $p = r = \dfrac{1}{3}$ donc $1 - p = 1 - r = \dfrac{2}{3}$.

Alors $A = p^3 + (1-p)^3 = \dfrac{1}{27} + \dfrac{8}{27} = \dfrac{1}{3}$, $B = 2[p^2 + (1-p)^2] = 2\left[\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9}\right] = \dfrac{10}{9}$ et $B^2 = \dfrac{100}{81}$.

$\boxed{A = \dfrac{1}{3},\ B = \dfrac{10}{9} \text{ et } B^2 = \dfrac{100}{81}}$.

$\dfrac{aA}{B-4A} = -\dfrac{3a}{2}$ et $\dfrac{a(a-2)}{4} - \dfrac{aA}{B-4A} = \dfrac{a(a-2)}{4} + \dfrac{3a}{2} = \dfrac{a(a+4)}{4}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n''(1) = \dfrac{aA}{B-4A}\, B^n + \left(\dfrac{a(a-2)}{4} - \dfrac{aA}{B-4A}\right)(4A)^n$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ G_n''(1) = \dfrac{a(a+4)}{4}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - \dfrac{3a}{2}\left(\dfrac{10}{9}\right)^n$.

$0 < \dfrac{10}{9} < \dfrac{4}{3}$ donc la suite de terme général $-\dfrac{3a}{2}\left(\dfrac{10}{9}\right)^n$ est négligeable devant la suite de terme général $\dfrac{a(a+4)}{4}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

Ainsi $G_n''(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a(a+4)}{4}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V(F_n) = 4G_n''(1) + 2E(F_n) - \big(E(F_n)\big)^2$.

$4G_n''(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} a(a+4)\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$, $2E(F_n) = 2aB^n = 2a\left(\dfrac{10}{9}\right)^n$ et $\big(E(F_n)\big)^2 = a^2B^{2n} = a^2\left(\dfrac{100}{81}\right)^n$.

Notons que $0 < \dfrac{10}{9} < \dfrac{100}{81} < \dfrac{4}{3}$.

Ainsi les suites de termes généraux $2E(F_n)$ et $\big(E(F_n)\big)^2$ sont négligeables devant la suite de terme général $4G_n''(1)$.

Alors $V(F_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 4G_n''(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} a(a+4)\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. $\boxed{V(F_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a(a+4)\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}$.

b) Montrer que la suite de terme général $P(F_n < 2^{\frac{n}{4}}a)$ converge vers 1 revient à montrer que la suite de terme général $P(F_n \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a)$ converge vers zéro car $P(F_n < 2^{\frac{n}{4}}a) = 1 - P(F_n \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a)$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $P(F_n \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a) = P\Big(F_n - E(F_n) \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)$.

Observons que : $a\,2^{\frac{n}{4}} > a(10/9)^n = E(F_n)$ car $2^{\frac{1}{4}} > 10/9$ et $a > 0$; donc $2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)) > 0$.

Alors $\{F_n - E(F_n) \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\} \subset \{|F_n - E(F_n)| \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\}$. La croissance de P fournit ainsi :

$P(F_n \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a) = P\Big(F_n - E(F_n) \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big) \leqslant P\Big(|F_n - E(F_n)| \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne : $P(F_n \geqslant 2^{\frac{n}{4}}a) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{\Big(2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)^2}$ (car $2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)) > 0$...).

Ne reste plus à montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{V(F_n)}{\Big(2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)^2} = 0$.

$2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)) = \big(2^{1/4}\big)^n - a\,(10/9)^n$. Comme $0 < 10/9 < 2^{1/4}$, la suite de terme général $a\,(10/9)^n$ est négligeable devant la suite de terme général $\big(2^{1/4}\big)^n$.

Ainsi $2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \big(2^{1/4}\big)^n$. Ce qui donne encore : $\Big(2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \big(2^{1/2}\big)^n$.

Par conséquent $\dfrac{V(F_n)}{\Big(2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} a(a+4)\,\dfrac{(4/3)^n}{\big(2^{1/2}\big)^n}$.

$3\sqrt{2} > 4$ donc $0 < \dfrac{4/3}{2^{1/2}} < 1$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(a(a+4)\,\dfrac{(4/3)^n}{\big(2^{1/2}\big)^n}\right) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{V(F_n)}{\Big(2^{\frac{n}{4}}a - E(F_n)\Big)^2} = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(F_n \geqslant 2^{n/4}a) = 0$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(F_n < 2^{n/4}a) = 1}$.
