Jean-François COSSUTTA. Marcelin Berthelot Saint Maur 94.

# ECRICOME 2003

## EXERCICE 1

### 1.1 Convergence de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

$\boxed{1}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est en particulier minorée par son premier terme $u_0$ qui est strictement positif. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Ceci donne encore : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$. Finalement :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement positive et strictement croissante.}}$$

$\boxed{2}$ Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Etant croissante elle est alors convergente et majorée par sa limite que nous noterons $\ell$.

Notons que $\ell \geqslant u_0 = a > 0$. $\ell$ est donc un réel strictement positif.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Un passage à la limite banal donne alors $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$. Ainsi $\ell$ vaut 0 !

Cette légère contradiction montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée donc :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

### 1.2 Comportement asymptotique de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

$\boxed{1}$ Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln u_{n+1} - \dfrac{1}{2^n} \ln u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \left(\ln(u_n + u_n^2) - 2 \ln u_n\right)$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

Soient $n$ et $p$ deux éléments de $\mathbb{N}$.

En remplaçant $n$ par $n+p$ dans l'égalité précédente on obtient : $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_{n+p}}\right)$.

Rappelons que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante et strictement positive. Par conséquent : $0 < u_n \leqslant u_{n+p}$.

Donc $1 < 1 + \dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

La stricte croissance de la fonction ln donne : $0 < \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

La stricte positivité de $\dfrac{1}{2^{n+p+1}}$ permet alors d'écrire :

$$0 < v_{n+p+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

$\boxed{2}$ Soient $k$ et $n$ deux éléments de $\mathbb{N}$. $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+p+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

En sommant ces inégalités de 0 à k il vient : $0 < \displaystyle\sum_{p=0}^{k} (v_{n+p+1} - v_{n+p}) \leqslant \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

Observons que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} (v_{n+p+1} - v_{n+p}) = v_{n+k+1} - v_n$. Observons encore que :

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1-(1/2)^{k+1}}{1-(1/2)} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right).$$

Ainsi pouvons-nous écrire que : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Or $\dfrac{1}{2^n}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) > 0$. Par conséquent : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

$\boxed{3}$ Soit $k$ un élément de $\mathbb{N}$. En donnant la valeur 0 à $n$ dans ce qui précède on obtient en particulier :

$v_{k+1} - v_0 \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_0}\right)$, ou : $v_{k+1} \leqslant v_0 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_0}\right) = \ln u_0 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_0}\right) = \ln(1 + u_0)$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ v_{k+1} \leqslant \ln(1 + u_0)$. Ce qui s'écrit encore $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k \leqslant \ln(1 + a)$.

Ne reste plus qu'à remarquer que $v_0 = \ln u_0 \leqslant \ln(1 + u_0) = \ln(1 + a)$ pour dire que :

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée par } \ln(1+a).}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+p+1} - v_n$. En faisant $p = 0$ ceci donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+1} - v_n$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée donc elle est convergente.}}$$

$\boxed{4}$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\alpha$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln u_n \leqslant \alpha$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_n \leqslant \alpha\, 2^n$. La croissance de la fonction exp fournit alors sans difficulté :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \exp(\alpha\, 2^n).}$$

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N},\ v_{n+k+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

En faisant tendre $k$ vers $+\infty$ on obtient : $\alpha - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$ ou $\alpha\, 2^n - v_n\, 2^n \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Par conséquent $\alpha\, 2^n \leqslant v_n\, 2^n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) = \ln u_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) = \ln(1 + u_n)$. La croissance de la fonction exp donne alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exp(\alpha\, 2^n) \leqslant u_n + 1.}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \exp(\alpha\, 2^n) - 1 \leqslant u_n \leqslant \exp(\alpha\, 2^n)$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \dfrac{1}{\exp(\alpha\, 2^n)} \leqslant \dfrac{u_n}{\exp(\alpha\, 2^n)} \leqslant 1 \quad (*)$.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \exp(\alpha\, 2^n)$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Ceci donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp(\alpha\, 2^n) = +\infty$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\exp(\alpha\, 2^n)} = 0$.

$(*)$ et le théorème d'encadrement fournissent alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\exp(\alpha\, 2^n)} = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha\, 2^n).}$$

<u>Remarque</u> *Il était encore plus simple de montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{exp(\alpha\, 2^n)}{u_n} = 1$ *!*

$\boxed{5}$ D'après 1.2.4, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \exp(\alpha\, 2^n) - u_n \leqslant 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \beta_n \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}$. Posons pour alléger les écritures : $\gamma_n = \exp(\alpha\, 2^n)$ et observons que $\gamma_{n+1} = \gamma_n^2$.

$-\beta_{n+1} + \gamma_{n+1} = u_{n+1} = u_n + u_n^2 = \gamma_n - \beta_n + (\gamma_n - \beta_n)^2 = \gamma_n - \beta_n + \gamma_n^2 - 2\gamma_n\, \beta_n + \beta_n^2 = \gamma_n - \beta_n + \gamma_{n+1} - 2\gamma_n\, \beta_n + \beta_n^2.$

Alors $-\beta_{n+1} = \gamma_n - \beta_n - 2\gamma_n\, \beta_n + \beta_n^2$ ou $\gamma_n\,(2\,\beta_n - 1) = \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n$.

En multipliant par $\dfrac{1}{\gamma_n}$ c'est à dire par $\exp(-\alpha\, 2^n)$ il vient : $2\,\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha\, 2^n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2\,\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha\, 2^n).}$$

$\boxed{6}$ La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il en est donc de même de la suite $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (par exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\beta_{n+1} + \beta_n^2 + \beta_n| \leqslant |\beta_{n+1}| + |\beta_n|^2 + |\beta_n| \leqslant 3$).

De plus la suite $\big(\exp(-\alpha\, 2^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $\Big((\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha\, 2^n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(2\beta_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 0.

Plus précisément ( ? !) $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \beta_n \leqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = \beta_{n+1} + \left(\beta_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\cdot$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{4} \leqslant \beta_{n+1} + \left(\beta_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = \beta_{n+1} - \beta_n(1 - \beta_n) \leqslant \beta_{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{4} \leqslant \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n \leqslant 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{4}\exp(-\alpha\, 2^n) \leqslant 2\beta_n - 1 \leqslant \exp(-\alpha\, 2^n)$.

Le théorème d'encadrement redonne alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\beta_n - 1) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\beta_n) = -\dfrac{1}{2}\cdot$ Ce qui s'écrit $-\beta_n \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$ et donne alors $u_n - \exp(\alpha\, 2^n) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$ ou :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha\, 2^n) + \mathrm{o}(1).}$$

---

## EXERCICE 2

---

$\boxed{1}$ $Tr$ est par définition une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda$ un réel.

$$Tr(\lambda\, A + B) = Tr\big((\lambda\, a_{ii} + b_{ii})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\big) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \lambda\, Tr(A) + Tr(B).$$

D'où la linéarité de $Tr$.

Posons $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $D = BA = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

$Tr(AB) = Tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = Tr(D) = Tr(BA).$

Finalement :

$$\boxed{Tr \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ qui vérifie} : \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Tr(AB) = Tr(BA).}$$

$\boxed{2}$ Version 1 Notons $I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{Im} Tr \subset \mathbb{R}$ donc $\operatorname{Im} Tr$ est de dimension 0 ou 1.

$Tr(I_n) = n$ donc $\operatorname{Im} Tr$ n'est pas réduit à 0. Ainsi la dimension de $\operatorname{Im} Tr$ est 1.

$\operatorname{Im} Tr \subset \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Im} Tr = \dim \mathbb{R} = 1$ donc $\operatorname{Im} Tr = \mathbb{R}$ et :

$$\boxed{Tr \text{ est surjective.}}$$

Version 2 $Tr(I_n) = n$. Par conséquent $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ Tr\left(\dfrac{\lambda}{n} I_n\right) = \dfrac{\lambda}{n} Tr(I_n) = \lambda$.

Ainsi tout élément $\lambda$ de $\mathbb{R}$ possède au moins un antécédent par $Tr$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\frac{\lambda}{n} I_n$ par exemple). Nous retrouvons ainsi la surjectivité de $Tr$.

Le théorème du rang permet alors de dire que : $\dim \operatorname{Ker} Tr = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im} Tr = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$.

$$\boxed{\text{Le noyau de } Tr \text{ est de dimension } n^2 - 1.}$$

$\boxed{3}$ Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $B$ et $C$ trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda$ un réel.

- $\varphi(A, \lambda B + C) = Tr\big({}^tA(\lambda B + C)\big) = Tr(\lambda\, {}^tAB + {}^tAC) = \lambda\, Tr({}^tAB) + Tr({}^tAC) = \lambda\, \varphi(A, B) + \varphi(A, C)$.

- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa transposée ont même trace car elles ont mêmes éléments diagonaux.

Ainsi $Tr({}^tAB) = Tr\big({}^t({}^tAB)\big) = Tr\big({}^tB\,{}^t({}^tA)\big) = Tr({}^tBA)$. Ainsi $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$.

- Posons ${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. $\varphi(A, A) = Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 \geqslant 0$. $\varphi(A, A) \geqslant 0$.

- Supposons que $\varphi(A, A) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = 0$. Comme $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ji}^2 \geqslant 0 : \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ji}^2 = 0$.

Donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ji} = 0$. Ainsi $A$ est la matrice nulle.

Les quatre points précédents montrent que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons vu plus haut que : $\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$.

En changeant $i$ en $j$ et $j$ en $i$ on peut écrire : $\|A\|^2 = \varphi(A, A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

$\boxed{4}$ Soit $A$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $|Tr(A)| = |Tr({}^tI_nA)| = |\varphi(I_n, A)|$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient alors : $|Tr(A)| \leqslant \|I_n\|\, \|A\|$.

Or $\|I_n\|^2 = \varphi(I_n, I_n) = Tr({}^tI_nI_n) = Tr(I_n) = n$. Par conséquent : $|Tr(A)| \leqslant \sqrt{n}\, \|A\|$. Finalement :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |Tr(A)| \leqslant \sqrt{n}\, \|A\|}$$

$\boxed{5}$ Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car ils contiennent tous les deux la matrice nulle.

Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda$ un réel.

Si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^t(\lambda\,A+B)=\lambda\,{}^tA+{}^tB=\lambda\,A+B$ donc $\lambda\,A+B$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ${}^t(\lambda\,A+B)=\lambda\,{}^tA+{}^tB=\lambda\,(-A)-B=-(\lambda\,A+B)$ donc $\lambda\,A+B$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ce que le texte donnait gracieusement...).

• Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Soit $A$ un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B$ un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On a $\varphi(A,B)=\varphi(B,A)=Tr({}^tBA)=Tr(-BA)=-Tr(BA)=-Tr(AB)=-Tr({}^tAB)=-\varphi(A,B)$.

Ainsi $\varphi(A,B)=-\varphi(A,B)$. $\varphi(A,B)=0$. $A$ et $B$ sont orthogonaux.

$\forall A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall B\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,B)=0$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

• Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

<u>Remarque</u> *Etant orthogonaux, leur intersection est réduite à la matrice nulle et ils sont donc en somme directe. Ne resterait plus qu'à montrer que leur somme est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour obtenir la supplémentarité. Je vous laisse cela. Je préfère réactiver une méthode standard pour montrer la supplémentarité dans des cas non triviaux.*

Soit $A$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A$ est de manière unique somme d'un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

<u>Analyse/Unicité</u>. Supposons que $A$ soit la somme d'un élément $A'$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément $A''$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$A=A'+A''$ et ${}^tA={}^tA'+{}^tA''=A'-A''$. Alors $A+{}^tA=2A'$ et $A-{}^tA=2A''$.

Par conséquent $A'=\frac{1}{2}\big(A+{}^tA\big)$ et $A''=\frac{1}{2}\big(A-{}^tA\big)$. D'où l'unicité.

<u>Synthèse/Existence</u>. Posons $A'=\frac{1}{2}\big(A+{}^tA\big)$ et $A''=\frac{1}{2}\big(A-{}^tA\big)$.

$A'+A''=A$. De plus ${}^tA'=\frac{1}{2}\big({}^tA+A\big)=A'$ et ${}^tA''=\frac{1}{2}\big({}^tA-A\big)=-A''$ ; $A'$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A''$ à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. D'où l'existence.

Finalement $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(A',A'')\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ A=A'+A''$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

<u>Remarque</u> *Soit $A$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède $\frac{1}{2}\big(A+{}^tA\big)$ est la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ étant supplémentaires et orthogonaux, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\frac{1}{2}\big(A+{}^tA\big)$ est la projection orthogonale de $A$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ pour } \varphi.}$$

<u>Remarque</u> *On peut également retrouver le tout en remarquant que $f:A\to{}^tA$ est un endomorphisme symétrique et involutif de l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\varphi)$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont, pour $n\geqslant 2$, les deux seuls sous-espaces propres de $f$...*

$\boxed{6}$ Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'après 2.3, $\forall M=(m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}-mij)^2=\|A-M\|^2$.

On cherche donc à montrer que $\underset{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}}\|A-M\|^2$ existe et vaut $\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-aji)^2$.

Dès lors utilisons le cours pour répondre à la question. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\varphi)$ et $A$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\underset{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}}\|A-M\|$ existe et la projection orthogonale $P_A$ de $A$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'unique élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

Ainsi $\displaystyle \operatorname*{Min}_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A-M\|^2$ existe et vaut $\|A-P_A\|^2$.

Rappelons que $P_A=\frac{1}{2}\big(A+{}^tA\big)$. Par conséquent $\|A-P_A\|^2=\|\frac{1}{2}(A-{}^tA)\|^2=\frac{1}{4}\|A-{}^tA\|^2$.

Donc $\displaystyle \|A-P_A\|^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-aji)^2$.

$$\boxed{\operatorname*{Min}_{(m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-mij)^2 \text{ existe et vaut } \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-aji)^2.}$$

---

---

**PROBLÈME**

---

### 3.1 Loi du chi-deux

$\boxed{1}$ Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

$\varphi$ est une densité de $X_1$ et $\Phi$ est sa fonction de répartition. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leqslant x) = P(X_1^2 \leqslant x)$.

Alors : $\forall x \in ]-\infty, 0[,\ F_{Y_1}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Y_1}(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\,\Phi(\sqrt{x}) - 1$.

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty, 0[,\ F_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Y_1}(x) = 2\,\Phi(\sqrt{x}) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - 1.}$$

$\boxed{2}$ $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$.

Notons que $\forall x \in ]-\infty, 0],\ F_{Y_1} = 0$ ($\Phi(0) = \frac{1}{2}$). Alors $F_{Y_1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ SUR $]-\infty, 0]$.

$x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $F_{Y_1}$ est continue SUR $[0, +\infty[$ et de clase $\mathcal{C}^1$ SUR $]0, +\infty[$.

$F_{Y_1}$ étant continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, $F_{Y_1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$F_{Y_1}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, $F_{Y_1}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$F_{Y_1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc $Y_1$ est une variable aléatoire à densité.

De plus $\forall x \in ]-\infty, 0[,\ F'_{Y_1}(x) = 0$ et $\forall x \in ]0, +\infty[,\ F'_{Y_1}(x) = 2\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\Phi'(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\varphi(\sqrt{x}) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\,\sqrt{\pi}} = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot$

Posons : $\forall x \in ]-\infty, 0],\ f_{Y_1}(x) = 0$ et $\forall x \in ]0, +\infty[,\ f_{Y_1}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot$

$f_{Y_1}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui coïncide avec $F'_{Y_1}$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc $f_{Y_1}$ est une densité de $Y_1$.

$f_{Y_1}$ est également une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{Y_1 \text{ suit une loi gamma de paramètres 2 et } \frac{1}{2}\cdot}$$

$\boxed{3}$ Notons que les variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ sont indépendantes et suivent toutes une loi normale centrée réduite. Ainsi les variables aléatoires $X_1^2,\ X_2^2,\ ...,\ X_n^2$ sont indépendantes et suivent toutes une loi gamma de paramètres 2 et $\dfrac{1}{2}\cdot$

Le cours indique que la somme de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois gamma de paramètres respectifs $b,\ \tau$ et $b,\ \tau'$ suit une loi gamma de paramètres $b,\ \tau + \tau'$.

Une récurrence simple permet alors de dire que $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $n \times \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \text{ suit une loi gamma de paramètres 2 et } \frac{n}{2}\cdot}$$

$\boxed{4}$ Comme $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $\dfrac{n}{2}$ le programme nous permet de dire que $E(Y_n) = 2 \times \dfrac{n}{2} = n$.

Le programme n'exige pas la connaissance de la variance d'une loi gamma. Retrouvons cette variance.

Soit $Z$ une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres $b$ et $\tau$.

Posons $\forall x \in ]-\infty, 0],\ \psi_1(x) = 0$ et $\forall x \in ]0, +\infty[,\ \psi_1(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{b}}\, x^{\tau-1}}{b^\tau\, \Gamma(\tau)}$. $\psi_1$ est une densité de $Z$.

Posons encore : $\forall x \in ]-\infty, 0],\ \psi_2(x) = 0$ et $\forall x \in ]0, +\infty[,\ \psi_2(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{b}}\, x^{(\tau+2)-1}}{b^{\tau+2}\, \Gamma(\tau+2)}$. $\psi_2$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres $b$ et $\tau + 2$.

$\forall x \in ]0, +\infty[,\ x^2\, \psi_1(x) = \dfrac{b^{\tau+2}\, \Gamma(\tau+2)}{b^\tau\, \Gamma(\tau)}\, \dfrac{e^{-\frac{x}{b}}\, x^{(\tau+2)-1}}{b^{\tau+2}\, \Gamma(\tau+2)} = \dfrac{b^{\tau+2}\, \Gamma(\tau+2)}{b^\tau\, \Gamma(\tau)}\, \psi_2(x)$.

Notons que $\Gamma(\tau+2) = (\tau+1)\, \tau\, \Gamma(\tau)$. Alors $\dfrac{b^{\tau+2}\, \Gamma(\tau+2)}{b^\tau\, \Gamma(\tau)} = b^2\, (\tau+1)\, \tau$.

Par conséquent $\forall x \in ]0, +\infty[,\ x^2\, \psi_1(x) = b^2\, (\tau+1)\, \tau\, \psi_2(x)$. Mieux $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2\, \psi_1(x) = b^2\, (\tau+1)\, \tau\, \psi_2(x)$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(t)\, \mathrm{d}t$ existe et vaut 1 donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, \psi_1(t)\, \mathrm{d}t$ existe et vaut $b^2\, (\tau+1)\, \tau$. Alors $E(Z^2)$ existe et vaut $b^2\, (\tau+1)\, \tau$.

Par conséquent $Z$ possède une variance qui vaut $b^2\, (\tau+1)\, \tau - (E(Z))^2 = b^2\, (\tau+1)\, \tau - (b\, \tau)^2 = b^2\, \tau$.

$V(Z)$ existe et vaut $b^2\, \tau$. Appliqué à $Y_n$ ce résultat permet de dire que :

$$\boxed{Y_n \text{ possède une variance qui vaut } 2n}$$

$\boxed{5}$ Posons : $\forall x \in ]-\infty, 0],\ f_{Y_n}(x) = 0$ et $\forall x \in ]0, +\infty[,\ f_{Y_n}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

$f_{Y_n}$ est une densité de $Y_n$ nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent la fonction de répartition $G_n$ de $Y_n$ est nulle sur $]-\infty, 0]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in ]0, +\infty[,\ G_n'(x) = f_{Y_n}(x) > 0$.

Tout d'abord il n'existe pas de réel $t$ appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ tel que $G_n(t) = \beta$ ($\beta > 0$).

De plus $G_n$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. La restriction de $G_n$ à $]0, +\infty[$ définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $G_n(]0, +\infty[) = ]\lim\limits_{x \to 0^+} G_n(x), \lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x)[$.

$G_n$ étant une fonction de répartition $G_n$ est en particulier continue en 0, ce qui donne $\lim\limits_{x \to 0^+} G_n(x) = G_n(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = 1$.

La restriction de $G_n$ à $]0, +\infty[$ définit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Comme $\beta$ appartient à $]0, 1[$, il existe un unique élément $t$ de $]0, +\infty[$ tel que $G_n(t) = \beta$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } t \text{ tel que } G_n(t) = \beta}.$$

### 3.2 Estimation ponctuelle de $\sigma^2$.

$\boxed{1}$ Pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, $X_i$ possède une espérance qui vaut $m$. Alors $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ donc $\dfrac{1}{n}\, (n \times m)$ ou $m$ (linéarité de l'espérance).

$X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont $n$ variables aléatoires <u>indépendantes</u> possédant une variance qui vaut $\sigma^2$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ possède une variance qui vaut $n\, \sigma^2$.

Alors $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ possède une variance qui vaut $\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 n\, \sigma^2$ ou $\dfrac{\sigma^2}{n}$.

$E(F_n) = m$ et $\lim_{n \to +\infty} V(F_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{F_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } m}.$$

$\boxed{2}$ a) $\sum_{i=1}^{n} (X_i - F_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\, X_i\, F_n + F_n^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) F_n + \sum_{i=1}^{n} F_n^2$.

$\sum_{i=1}^{n} (X_i - F_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\,(n\, F_n)\, F_n + n\, F_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\, F_n^2$.

En multipliant par $\frac{1}{n}$ il vient : $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - F_n^2$. Finalement :

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big((X_i^2 - 2m\, X_i + m^2) + 2m\, X_i - m^2\Big) - F_n^2$.

$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 + 2m\, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 + 2\, m\, F_n - m^2 - F_n^2$

Ceci donne alors sans difficulté :

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2.}$$

b) Soit $i$ un élément de $[\![1, n]\!]$. $X_i$ possède une espérance qui vaut $m$ et une variance qui vaut $\sigma^2$.

Donc $E\big((X_i - E(X_i))^2\big)$ existe et vaut $\sigma^2$. Ainsi $(X_i - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\sigma^2$.

Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\big((X_i - m)^2\big)$ ou $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$ soit encore $\sigma^2$.

De plus nous avons vu, dans 3.2.1 que $F_n$ possède une espérance et une variance, que $E(F_n) = m$ et que $V(F_n) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot$

Alors $(F_n - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{\sigma^2}{n}\cdot$

Finalement $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$ possède une espérance qui vaut : $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2\right) - E\Big((F_n - m)^2\Big)$

ou $\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\cdot$

$$\boxed{V_n \text{ possède une espérance et } E(V_n) = \frac{n-1}{n}\, \sigma^2.}$$

c) Supposons $n \geqslant 2$. $E(V_n) = \frac{n-1}{n}\, \sigma^2$ donc $\frac{n}{n-1}\, E(V_n) = \sigma^2$. Ainsi $E\left(\frac{n}{n-1}\, V_n\right) = \sigma^2$. Finalement :

$$\boxed{\frac{n}{n-1}\, V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_1 - F_n)^2 \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2}$$

**3.3 Estimation par intervalle de confiance de $\sigma^2$, m étant connue.**

Il semble raisonnable de supposer dans la suite que $\alpha$ est un réel appartenant à $]0, 1[$

$\boxed{1}$ Soit $i$ un élément de $[\![1,n]\!]$. Posons $Z_i = \dfrac{X_i - m}{\sigma}\cdot$

$X_i$ suit une loi normale de paramètres $m$ et $\sigma$ et $Z_i = \dfrac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{V(X_i)}}$ donc $Z_i$ suit une loi normale centrée réduite.

$X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont indépendantes donc $Z_1$, $Z_2$, ..., $Z_n$ le sont également.

3.1.3 permet alors de dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ suit une loi du $Chi-deux$ à $n$ degrés de liberté.

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 = U_n$. Finalement :

$$\boxed{U_n \text{ suit une loi du } Chi-deux \text{ à } n \text{ degré de liberté.}}$$

$\boxed{2}$ $n\,T_n = \sigma^2\,U_n$ donc $\left\{\dfrac{n\,T_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \dfrac{n\,T_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} = \left\{\dfrac{\sigma^2\,U_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \dfrac{\sigma^2\,U_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} = \left\{\dfrac{U_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{U_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\}.$

3.1.5 nous a montré que que $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ et $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ sont des réels strictement positifs. Alors :

$$\boxed{\left\{\frac{n\,T_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{n\,T_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} = \left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}.}$$

$U_n$ suit une loi du $Chi-deux$ à $n$ degrés de liberté, sa fonction de répartition est donc $G_n$.

Alors $P\left(\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}\right) = G_n\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right) - G_n\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \left\{\frac{n\,T_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{n\,T_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\} \text{ est } 1-\alpha.}$$

**3.4 Estimation par intervalle de confiance de $\sigma^2$, m étant inconnue.**

$\boxed{\text{Nous supposerons dans toute cette partie que } n \text{ est supérieur ou égal à } 2}$.

$\boxed{1}$ a) $A$ est une matrice symétrique et réelle donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

b) Posons $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $C = AB = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ b_i = 1$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ c_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} = n - 1 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(-1) = n - 1 + (n-1)\times(-1) = 0.$

$$\boxed{AB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.}$$

$B$ n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ par conséquent :

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } B \text{ est un vecteur propre associé.}}$$

c) La matrice de $\varphi - n\,Id_{\mathbb{R}^n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A - n\,I_n$.

Il est aisé de voir que $A - n\,I_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $-1$.

Cette matrice n'est pas la matrice nulle et toutes ses colonnes sont identiques, elle est donc de rang 1.

Ainsi $\varphi - n\,Id_{\mathbb{R}^n}$ est de rang 1.

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}(\varphi - n\,Id_{\mathbb{R}^n}) = 1.}$$

d) Le théorème du rang donne $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(\varphi - n\, Id_{\mathbb{R}^n}) + \dim \mathrm{Im}(\varphi - n\, Id_{\mathbb{R}^n})$.

Ainsi $n = \dim \mathrm{Ker}(\varphi - n\, Id_{\mathbb{R}^n}) + 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(\varphi - n\, Id_{\mathbb{R}^n}) = n - 1.}$$

Comme $n \geqslant 2$, $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - n\, Id_{\mathbb{R}^n}) = n - 1 \geqslant 1$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi - n\, Id_{\mathbb{R}^n})$ n'est pas réduit au vecteur nul et ainsi $n$ est une valeur propre de $\varphi$ dont le sous-espace propre est de dimension $n-1$.

$n$ est donc une valeur propre de $A$ dont le sous-espace propre SEP $(A, n)$ est de dimension $n - 1$.

Rappelons que 0 est une valeur propre de $A$ et que $A$ est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc la somme des dimensions de ces sous espaces propres est $n$. Ainsi 0 et $n$ sont les seules valeurs propres de $A$ et le sous-espace propre SEP $(A, 0)$ associé à la valeur propre 0 est de dimension 1. Mieux SEP $(A, 0) = \mathrm{Vect}(B)$.

$A$ étant symétrique SEP $(A, 0)$ et SEP $(A, n)$ sont orthogonaux. Ces deux sous-espaces étant supplémentaires :

SEP $(A, n) = \Big(\text{SEP } (A, 0)\Big)^{\perp} = \Big(\mathrm{Vect}(B)\Big)^{\perp}$

| |
|---|
| L'ensemble des valeurs propres de $A$ est $\{0, n\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite vectorielle engendrée par $B$ et celui associé à la valeur propre $n$ est $\Big(\mathrm{Vect}(B)\Big)^{\perp}$. |

e) Nous supposerons que $W$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $n$...

<u>Version 2</u> $W$ est orthogonal à $B$ donc $< W, B >= 0$. Ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (w_j \times 1) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j = 0$ !

<u>Version 2</u> AW=nW. Alors : $\displaystyle n\, w_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, w_j = a_{11}\, w_1 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} a_{1j}\, w_j = (n-1)\, w_1 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} (-w_j) = n\, w_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j$.

$\displaystyle n\, w_1 = n\, w_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } n \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} w_i = 0.}$$

<u>*Remarque*</u> SEP $(A, n)$ *est en fait l'ensemble des éléments* $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *tels que :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$.

f) Soit $(W_1, W_2, \ldots, W_{n-1})$ une base orthonormale du sous-espace propre SEP $(A, n)$ de $A$ associé à la valeur propre $n$. Soit $(W_n)$ une base orthonormale du sous-espace propre SEP $(A, 0)$ de $A$ associé à la valeur propre 0.

SEP $(A, n)$ et SEP $(A, 0)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{B} = (W_1, W_2, \ldots, W_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeurs propres $n$, $n$, ..., $n$, 0.

Notons $P$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

$P$ est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De plus $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale dont les $n-1$ premiers coefficients de la diagonale valent $n$ et le dernier 0. $D = \mathrm{Diag}(n, n, \ldots, n, 0)$...

Notons que la dernière colonne de $P$ est $W_n$ et que $W_n$ est un élément de SEP $(A, 0)$ qui est la droite vectorielle engendrée par $B$. Ainsi la dernière colonne de $P$ est proportionnelle à $B$.

Il existe une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est proportionnelle à $B$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^{-1}AP = D$ avec ${}^tP = P^{-1}$. $D = \text{Diag}(n, n, \ldots, n, 0)$.

g) On est prié de remarquer que ${}^tP = (p_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

Soit $i$ un élément de $[\![1, n-1]\!]$. La $i^{\text{ème}}$ colonne de $P$ est $W_i$ et $W_i$ appartient à SEP $(A, n)$. e) montre alors que la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de $P$ est nulle.

Ainsi la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^tP$ est nulle. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0.}$$

Posons $P = (q_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ ! et ${}^tPP = (s_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. ${}^tPP = I_n$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ 1 = s_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, q_{ji} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = 1.}$$

2 a) Soit $X$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = {}^tPX$ et observons que $A = PD{}^tP$.

$q(X) = {}^tXMX = \dfrac{1}{n}\,{}^tXAX = \dfrac{1}{n}\,{}^tXPD{}^tPX = \dfrac{1}{n}\,{}^t({}^tPX)D{}^tPX = \dfrac{1}{n}\,{}^tYDY$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et si } Y = {}^tPX \text{ alors } q(X) = \frac{1}{n}\,{}^tYDY.}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $s = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$ pour simplifier les écritures.

$$q(X) = \frac{1}{n}\,{}^tXAX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\left((n-1)\,x_i - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} x_j\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\left(n\,x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right)$$

$$q(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,(n\,x_i - ns) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(\,x_i - s) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - s\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2s\sum_{i=1}^{n} x_i + s\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2s\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,s^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2s\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2s\,x_i + s^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - s)^2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2.}$$

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tPX$. $q(X) = \dfrac{1}{n}\,{}^tYDY$.

$DY = \begin{pmatrix} n\,y_1 \\ n\,y_2 \\ \vdots \\ n\,y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $q(X) = \dfrac{1}{n}\,{}^tY D Y = \dfrac{1}{n}\left(n\,y_1^2 + n\,y_2^2 + \cdots + n\,y_{n-1}^2\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$.

Or $\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,x_j$ donc $q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,x_j\right)^2$.

$$\boxed{\text{Si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q(X) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,x_j\right)^2.}$$

$\boxed{3}$ a) Soit $i$ un élément de $[\![1,n-1]\!]$. Posons $J = \{j \in [\![1,n]\!] \mid p_{ij} \neq 0\}$.

$J$ n'est pas vide car la $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^tP$ n'est pas nulle puisque ${}^tP$ est inversible. $Y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,X_j = \sum_{j\in J} p_{ij}\,X_j$.

$X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont indépendantes donc $(X_j)_{j\in J}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

$(p_{ij}\,X_j)_{j\in J}$ est alors également une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

De plus pour tout $j$ dans $J$, $p_{ij}\,X_j$ suit une loi normale car $X_j$ suit une loi normale et $p_{ij}$ est un réel non nul.

Le cours montre alors que $Y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,X_j = \sum_{j\in J} p_{ij}\,X_j$ suit une loi normale.

$E(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,E(X_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,m = m \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$.

Rappelons que $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont indépendantes donc il en est de même pour $p_{i1}\,X_1$, $p_{i2}\,X_2$, ..., $p_{in}\,X_n$.

Alors $V(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} V(p_{ij}\,X_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2\,V(X_j) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout élément } i \text{ de } [\![1,n-1]\!],\ Y_i \text{ suit une loi normale de paramètres } 0 \text{ et } \sigma.}$$

b) 3.4.2 montre que : $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,x_j\right)^2$. Ainsi :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,X_j\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.}$$

c) Posons $\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ H_i = \dfrac{1}{\sigma}\,Y_i$.

Soit $i$ un élément de $[\![1,n-1]\!]$. $Y_i$ suit une loi normale et $\frac{1}{\sigma}$ est un réel non nul donc $H_i$ suit une loi normale.

$E(H_i) = \frac{1}{\sigma}\,E(Y_i) = 0$ et $V(H_i) = \frac{1}{\sigma}\,V(Y_i) = 1$. Ainsi $H_i$ suit une loi normale centrée réduite.

$Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes donc $H_1$, $H_2$, ..., $H_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite.

Alors, d'après 3.1.2, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} H_i^2$ suit une loi du $Chi-deux$ à $n-1$ degrés de liberté.

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} H_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = U_n$.

$$\boxed{U_n \text{ suit une loi du } Chi-deux \text{ à } n-1 \text{ degrés de liberté.}}$$

d) $(n-1)\, S_n = \sigma^2\, U_n$, donc :

$$\left\{ \frac{(n-1)\, S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)\, S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\} = \left\{ \frac{\sigma^2\, U_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{\sigma^2\, U_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\} = \left\{ \frac{U_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant 1 \leqslant \frac{U_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\}.$$

3.1.5 nous a montré que que $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ et $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ sont des réels strictement positifs. Alors :

$$\boxed{\left\{ \frac{(n-1)\, S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)\, S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\} = \left\{ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}.}$$

e) $U_n$ suit une loi du $Chi-deux$ à $n-1$ degrés de liberté, sa fonction de répartition est donc $G_{n-1}$.

Donc $P\left(\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\right) = G_{n-1}\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) - G_{n-1}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$.

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \left\{ \frac{(n-1)\, S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)\, S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\} \text{ est } 1-\alpha.}$$

Remarque *Ce problème donne l'occasion de revisiter HEC 99 math 2.*

---