Jean-François COSSUTTA. Marcelin Berthelot Saint Maur 94. jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

ECRICOME 2004

EXERCICE 1

Q1 S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes donc S est diagonalisable. Alors :

il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale D.

Q2 a) • Soient V et W deux éléments de E et α un réel.

$f(\alpha V+W) = \Big((\alpha V+W)(\lambda_1^k), (\alpha V+W)(\lambda_2^k), \dots, (\alpha V+W)(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha V+W) = \Big(\alpha V(\lambda_1^k)+W(\lambda_1^k), \alpha V(\lambda_2^k)+W(\lambda_2^k), \dots, \alpha V(\lambda_n^k)+W(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha V+W) = \alpha\Big(V(\lambda_1^k), V(\lambda_2^k), \dots, V(\lambda_n^k)\Big) + \Big(W(\lambda_1^k), W(\lambda_2^k), \dots, W(\lambda_n^k)\Big)$.

$f(\alpha V+W) = \alpha f(V)+f(W)$. f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

• Soit T un élément de $\operatorname{Ker} f$. $f(T)=0_{\mathbb{R}^n}$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ T(\lambda_i^k)=0$.

Rappelons alors que $x \to x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car k est $\boxed{\text{impair}}$. Cette application est donc injective.

Les réels λ_1, λ_2, ..., λ_n étant deux à deux distincts il en est alors de même pour les réels λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_n^k.

T est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ qui a au moins n racines distinctes. Ainsi T est le polynôme nul.

Par conséquent $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et f est injective.

f est alors une application linéaire injective de E dans $\mathbb{R}^n$ et $\dim E = (n-1)+1 = n = \dim \mathbb{R}^n < +\infty$ donc :

f est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soit T un élément de E.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ T(\lambda_i^k)=\lambda_i \iff f(T)=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \iff T=f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. Par conséquent :

il existe un unique élément U de E tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ U(\lambda_i^k)=\lambda_i$; $U=f^{-1}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

Q3 Montrons que $R(D)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, c'est à dire que $U(D^k)=D$.

Jouons la "difficulté" en reprenant la logique de la première question et en supposant que P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale D (et pas plus...).

Il existe alors un élément $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Nous écrirons plus simplement $D=\operatorname{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

S et D sont semblables donc ont même spectre. Alors $\{\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_n\} = \operatorname{Sp} D = \operatorname{Sp} S = \{\lambda_1,\lambda_2\dots,\lambda_n\}$.

Il existe un élément $(u_0,u_1,\dots,u_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $U=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i$.

$$U(D^k)=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\,(D^k)^i=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\,D^{ki}=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n\end{pmatrix}^{ki}=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\begin{pmatrix}\alpha_1^{ki} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2^{ki} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^{ki}\end{pmatrix}.$$

$$U(D^k)=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}u_i\,(\alpha_1^k)^i & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}u_i\,(\alpha_2^k)^i & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}u_i\,(\alpha_n^k)^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U(\alpha_1^k) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & U(\alpha_2^k) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & U(\alpha_n^k)\end{pmatrix}.$$

Ainsi $U(D^k)=\mathrm{Diag}\big(U(\alpha_1^k),U(\alpha_2^k),\dots,U(\alpha_n^k)\big)$.

Pour montrer que $U(D^k)=D$ il ne reste plus qu'à montrer que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ U(\alpha_i^k)=\alpha_i$.

Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Il existe un élément j de $[\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i=\lambda_j$. Alors $U(\alpha_i^k)=U(\lambda_j^k)=\lambda_j=\alpha_i$.

Finalement $U(D^k)=\mathrm{Diag}\big(U(\alpha_1^k),U(\alpha_2^k),\dots,U(\alpha_n^k)\big)=\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=D$.

Donc $R(D)=U(D^k)-D=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } D.}$$

Il existe un élément $(r_0,r_1,\dots,r_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $R=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}r_i\,X^i$.

Rappelons que $D=P^{-1}SP$ donc $S=PDP^{-1}$ et $\forall i\in\mathbb{N},\ S^i=PD^iP^{-1}$ (récurrence simple).

$$R(S)=\sum_{i=0}^{n-1}r_i\,S^i=\sum_{i=0}^{n-1}r_i\,PD^iP^{-1}=P\left(\sum_{i=0}^{n-1}r_i\,D^i\right)P^{-1}=PR(D)P^{-1}=P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}P^{-1}=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

$$\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } S.}$$

Q4 a) Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N},\ AS^{pk}=S^{pk}A$.

• L'égalité est vraie pour $p=0$ car dans ce cas $S^{pk}=I_n$.

• Supposons l'égalité vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$AS^{pk}=S^{pk}A$. En multipliant à droite par S^k il vient $AS^{pk}S^k=S^{pk}AS^k$ ou $AS^{(p+1)k}=S^{pk}AS^k$.

En remarquant que $AS^k=S^kA$ on obtient : $AS^{(p+1)k}=S^{pk}S^kA=S^{(p+1)k}A$ ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ AS^{pk}=S^{pk}A.}$$

b) Rappelons que $U=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,X^p$ et que $U(S^k)-S=R(S)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $S=U(S^k)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,(S^k)^p=\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,S^{pk}$.

Alors $AS=AU(S_k)=A\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,S^{pk}\right)=\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,AS^{pk}=\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,S^{pk}A=\left(\sum_{p=0}^{n-1}u_p\,S^{pk}\right)A=U(S^k)A=SA$.

$$\boxed{A \text{ et } S \text{ commutent.}}$$

$\boxed{\textbf{Q5}}$ a) Observons que $S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; alors 1 est valeur propre de S.

De même $S\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; -1 est valeur propre de S.

Notons que 1 et -1 sont alors LES valeurs propres de S car S est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{S \text{ possède deux valeurs propres distinctes.}}$$

b) $S^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$. Alors $\forall r\in\mathbb{N},\ S^{2r}=(S^2)^r=I_2^r=I_2$. Il est alors clair que :

$$\boxed{A \text{ commute avec toute puissance paire de } S.}$$

$AS=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&2\end{pmatrix}$ et $SA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$. Alors $AS\neq SA$ et ainsi :

$$\boxed{A \text{ ne commute pas avec } S.}$$

EXERCICE 2

2.1. Etude de la bijection réciproque.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ f est dérivable sur $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ f'(x)=-\dfrac{\cos' x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot$

f' est nulle en 0 et strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$. Comme f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, ceci suffit pour dire que f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur l'intervalle $\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=[1,\sqrt{2}]$.

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \text{ sur l'intervalle } J=[1,\sqrt{2}].}$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Désolé et pardon aux familles de courbes tout ça...

Retenons que dans un plan muni d'un repère orthonormé la représentation graphique $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} est l'image de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Notons que $f'(0)=0$ et $f'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

Notons encore que f est convexe sur I car f'' existe et est positive sur I (voir plus loin...).

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Soit x un élément de J. $x=f\left(f^{-1}(x)\right)=\dfrac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)}\cdot$ Alors $\cos\left(f^{-1}(x)\right)=\dfrac{1}{x}\cdot$

$f^{-1}(x)$ est un élément de $[0,\frac{\pi}{4}]$ donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right)$ est positif.

Donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right)=\left|\sin\left(f^{-1}(x)\right)\right|=\sqrt{\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)}=\sqrt{1-\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\forall x\in J,\ \cos\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x\in J,\ \sin\left(f^{-1}(x)\right)=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\cdot}$$

$\boxed{\textbf{Q4}}$ f est dérivable et de dérivée strictement positive (donc non nulle) sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=]1,\sqrt{2}]=J-\{1\}$. Donc :

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable } J - \{1\}.}$$

Remarque f *est croissante sur* I *et* $f'(0) = 0$ *alors* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = +\infty$ *; en particulier* $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ *admet une demi-tangente "verticale" au point d'abscisse 1.*

Soit x un élément de $J - \{1\}$. $\displaystyle\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{\cos^2\big(f^{-1}(x)\big)}{\sin\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{x^2}\,\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\cdot$

Comme x est positif : $\displaystyle\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{x^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

$$\boxed{\forall x \in J - \{1\},\ \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\cdot}$$

Q5 f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ donc f^{-1} possède un développement limité en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1 qui est :

$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + \big(f^{-1}\big)'(\sqrt{2})\,(x-\sqrt{2}) + \mathrm{o}(x-\sqrt{2}).$

Notons que $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\big(f^{-1}\big)'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ Alors :

$$\boxed{f^{-1} \text{ possède un développement limité en } \sqrt{2} \text{ à l'ordre 1 qui est} : f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x-\sqrt{2}) + \mathrm{o}(x-\sqrt{2}).}$$

2.2. Etude des dérivées successives de f

Q1 $x \to \cos x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et non nulle sur I. donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I.}$$

Q2 Montrons par récurrence, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ (qui peut le plus peut le moins !), il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}\cdot$

• Considérons le polynôme $P_0 = 1$. $\forall x \in I,\ f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{P_0(\sin x)}{\cos^{0+1}(x)}\cdot$ La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}\cdot$

$\displaystyle\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \Big(f^{(n)}\Big)'(x) = \frac{\cos x\, P_n'(\sin x)\ \cos^{n+1}(x) - P_n(\sin x)\,(n+1)\,(-\sin x)\ \cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}\cdot$

$\displaystyle\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}\left[\cos^2(x)\,P_n'(\sin x) + (n+1)\,\sin x\,P_n(\sin x)\right]\cdot$

$\displaystyle\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\cos^{n+2}(x)}\left[(1-\sin^2(x))\,P_n'(\sin x) + (n+1)\,\sin x\,P_n(\sin x)\right]\cdot$

Posons alors $P_{n+1} = (1-X^2)\,P_n' + (n+1)\,X\,P_n$. P_{n+1} est un polynôme et $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{(n+1)+1}(x)}\cdot$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}\cdot}$$

Remarque *Soit* n *un élément de* $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe un second polynôme Q_n *tel que* $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}\cdot$

Alors $\forall x \in I,\ Q_n(\sin x) = P_n(\sin x)$ *donc* $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right],\ (Q_n - P_n)(\sin x) = 0.$

Ceci donne encore : $\forall z \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ (Q_n - P_n)(z) = 0.$

Alors $Q_n - P_n$ *est un polynôme qui admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul. Par conséquent* $Q_n = P_n$.

Finalement pour tout n *dans* $\mathbb{N}$, *il existe un* <u>*unique*</u> *polynôme* P_n *tel que* $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}\cdot$

Q3 $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{P_1(\sin x)}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1 = X$.

$\forall x \in I,\ f''(x) = \dfrac{1}{\cos^4(x)}\left[\cos x \cos^2(x) - (\sin x)\, 2\, (-\sin x) \cos x\right] = \dfrac{1}{\cos^3(x)}\left[1 - \sin^2(x) + 2\sin^2(x)\right].$

$\forall x \in I,\ f''(x) = \dfrac{1}{\cos^{2+1}(x)}\left[1 + \sin^2(x)\right]$. Finalement $\forall x \in I,\ f''(x) = \dfrac{P_2(\sin x)}{\cos^{2+1}(x)}$ avec $P_2 = X^2 + 1$.

$$\boxed{P_1 = X} \quad \text{et} \quad \boxed{P_2 = X^2 + 1}$$

<u>Remarque</u> *Le tout pouvait s'obtenir encore plus rapidement avec* $P_{n+1} = (1 - X^2)\, P_n' + (n+1)\, X\, P_n$.

Q4 La question 2 $\boxed{\text{et}}$ sa remarque permettent de dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\ P_{n+1} = (1 - X^2)\, P_n' + (n+1)\, X\, P_n.}$$

Alors $P_3 = (1 - X^2)\, P_2' + (2+1)\, X\, P_2 = (1 - X^2)(2X) + 3\, X\, (1 + X^2) = X^3 + 5\, X$.

$$\boxed{P_3 = X^3 + 5\, X.}$$

Q5 Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$), le terme de plus haut degré de P_n est X^n.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ car $P_0 = 1$ (ou pour $n = 1$ car $P_1 = X$).
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n + 1$.

P_n est de degré n donc $X P_n$ est de degré $n + 1$ et $(1 - X^2)\, P_n'$ de degré au plus $n + 1$ (si $n = 0$...).

Ainsi $P_{n+1} = (1 - X^2)\, P_n' + (n+1)\, X\, P_n$ est de degré au plus $n + 1$.

Les coefficients de X^{n+1} dans $(1 - X^2)\, P_n'$ et $(n+1)\, X\, P_n$ sont respectivement $-n$ et $n + 1$ car le terme de plus haut degré de P_n est X^n.

Alors le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est $-n + (n+1)$ donc 1. Ainsi le terme de plus haut degré de P_{n+1} est X^{n+1} ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ P_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est 1.}}$$

2.3. Etude de la suite d'intégrales.

Q1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. f est continue sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ donc f^n également. Alors $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x$ existe.

$$\boxed{(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bien définie.}}$$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$

$$\boxed{I_2 = 1.}$$

Q2 $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\},\ \dfrac{1}{1 - t^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 + t + 1 - t}{1 - t^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 + t}{1 - t^2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 - t}{1 - t^2} = \dfrac{1/2}{1 - t} + \dfrac{1/2}{1 + t}\cdot$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\},\ \frac{1}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t} \text{ avec } a = b = \frac{1}{2}\cdot}$$

Q3 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin' x}{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

Posons $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right],\ u(x)=\sin x$. u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et définit une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Le changement de variable $t=\sin x=u(x)$ donne alors

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin' x}{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Big[-\ln|1-t|+\ln|1+t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|-\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2=\ln(\sqrt{2}+1).$$

$$\boxed{I_1=\ln(\sqrt{2}+1).}$$

Q4 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n+1}(x)}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n}(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^{n+1}(x)}-\frac{1}{\cos^{n}(x)}\right)\mathrm{d}x.$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos x}{\cos^{n+1}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Or $0\leqslant\dfrac{\pi}{4}$ et $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right],\ \dfrac{1-\cos x}{\cos^{n+1}(x)}\geqslant 0$ donc $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos x}{\cos^{n+1}(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. Finalement :

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est croissante.}}$$

Q5 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ (hum !).

$$I_n-\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}-\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}.$$

Distinguons alors deux cas.

• Supposons n supérieur ou égal à 2.

$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}>0$ et $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right],\ \dfrac{1}{\cos^n(x)}\geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}\geqslant 0.$

Par conséquent $I_n-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}\geqslant 0$ et $I_n\geqslant\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}$.

• Supposons que n soit égal à 1.

Alors $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{4}-1<0$ et $\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2},0\right],\ \dfrac{1}{\cos^n(x)}>0$ ce qui donne $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}>0.$

Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}<0$ et $I_n<\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}$! !

Dans la suite de cette question nous supposerons pudiquement que n est supérieur ou égal à 2.

$x\to\cos x$ est décroissante et strictement positive sur I donc $x\to\dfrac{1}{\cos x}$ est croissante et strictement positive sur I (ce qui n'est pas nouveau !).

Alors $x\to\dfrac{1}{\cos^n(x)}$ est croissante sur $I=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ donc sur $\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2},\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Alors $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{\pi}{4}$ et $\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2},\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\dfrac{1}{\cos^n(x)}\geqslant\dfrac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$.

Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}\geqslant\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}=\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right)\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$. Finalement :

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ I_n\geqslant\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}.}$$

Posons $\forall n\in[\![2,+\infty[\![, h_n=\dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$.

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $h_n>0$ et $\ln(h_n)=-2\ln n-n\,\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

$\ln(h_n)=n\left[-2\,\dfrac{\ln n}{n}-\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right]$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right)=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\ln\sqrt{2}$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[-2\,\frac{\ln n}{n}-\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=\ln\sqrt{2}>0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln h_n=+\infty$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}h_n=+\infty$.

Or $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ I_n\geqslant h_n$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=+\infty.}$$

Q6 $I_2=1=\dfrac{(\sqrt{2})^0}{0+1}+\dfrac{0}{0+1}\,I_0$ donc l'égalité est vraie pour $n=0$ (oui, I_0 n'a pas une forme intégrale...).

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n+2}(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(x)}\,\frac{1}{\cos^n(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan'(x)\,\frac{1}{\cos^n(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan'(x)\cos^{-n}(x)\,\mathrm{d}x.$

Un intégration par parties alors évidente donne : $\displaystyle I_{n+2}=\Big[\tan x\cos^{-n}(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)\,(-n)\,(-\sin x)\,\cos^{-n-1}(x)\,\mathrm{d}x.$

$\displaystyle I_{n+2}=\tan\frac{\pi}{4}\cos^{-n}\left(\frac{\pi}{4}\right)-0-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)\,(-n)\,(-\sin x)\,\cos^{-n-1}(x)\,\mathrm{d}x.$

$\displaystyle I_{n+2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-n}-n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\,\sin x\,\frac{1}{\cos^{n+1}(x)}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-n}-n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}\,\mathrm{d}x.$

$\displaystyle I_{n+2}=(\sqrt{2})^n-n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}\,\mathrm{d}x=(\sqrt{2})^n-n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n+2}(x)}+n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)}=(\sqrt{2})^n-n\,I_{n+2}+n\,I_n.$

Alors $(n+1)\,I_{n+2}=(\sqrt{2})^n+n\,I_n$ et donc $I_{n+2}=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}\,I_n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+2}=\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\,I_n.}$$

PROBLÈME

3.1. Etude d'une variable discrète d'univers image fini.

3.1.1. Préliminaires

Q1 $a_1 = \sqrt{1}\,\dfrac{C_2^1}{4^1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot$ $\boxed{a_1 = \dfrac{1}{2}\cdot}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Notons que $C_{2n+2}^{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)}\,\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} = \dfrac{2\,(2n+1)}{(n+1)}\,C_{2n}^n$.

Ainsi : $\dfrac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \dfrac{2\,(2n+1)}{(n+1)}\cdot$ Alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{n+1}\,C_{2n+2}^{n+1}}{4^{n+1}}\,\dfrac{4^n}{\sqrt{n}\,C_{2n}^n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\,\dfrac{1}{4}\,\dfrac{2\,(2n+1)}{n+1} = \dfrac{2n+1}{2\,\sqrt{n(n+1)}}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2\,\sqrt{n(n+1)}}\cdot}$$

Q2 Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}\cdot$

• $a_1 = \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{2\times 1+1}}$. L'inégalité est vraie pour $n = 1$.

• Supposons l'inégalité vraie pour un élément n de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$a_{n+1} = a_n\,\dfrac{2n+1}{2\,\sqrt{n(n+1)}} \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}\,\dfrac{2n+1}{2\,\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\dfrac{1}{2^2}\,\dfrac{2n+1}{n+1}} = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)}}\cdot$

Or $\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)} = \dfrac{1}{4\,(2n+3)(n+1)}\Big(4\,(n+1)^2 - (2n+3)(2n+1)\Big)$.

Ainsi $\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)} = \dfrac{1}{4\,(2n+3)(n+1)}\big(4\,n^2 + 8\,n + 4 - 4\,n^2 - 8\,n - 3\big) = \dfrac{1}{4\,(2n+3)(n+1)} \geqslant 0$.

Alors $\dfrac{n+1}{2n+3} \geqslant \dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)}$ donc $\sqrt{\dfrac{n+1}{2n+3}} \geqslant \sqrt{\dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)}}\cdot$ Soit encore : $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)}} \leqslant \sqrt{\dfrac{n+1}{2n+3}}\cdot$

Par conséquent : $a_{n+1} \leqslant \sqrt{\dfrac{2n+1}{2^2\,(n+1)}} \leqslant \sqrt{\dfrac{n+1}{2n+3}}$ ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\cdot}$$

Q3 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2\,\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\dfrac{(2n+1)^2}{4\,n(n+1)}} = \sqrt{\dfrac{4\,n^2+4\,n+1}{4\,n^2+4\,n}} > \sqrt{\dfrac{4\,n^2+4\,n}{4\,n^2+4\,n}} = 1$ et $a_n > 0$. Alors $a_{n+1} > a_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}} \leqslant \sqrt{\dfrac{n+\frac{1}{2}}{2n+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ elle donc convergente.

Notons ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2} = a_1 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; en passant à la limite il vient $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

$$\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers un réel } \ell \text{ tel que } \frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot}$$

3.1.2. Etude de cas particuliers

► Encore une fois qui peut le plus peut le moins. Nous traiterons donc, le plus souvent possible le cas ou $n = m$ et où p est quelconque.

Dans toute la suite nous noterons, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, A_k (resp. B_k) l'événement à la $k^{\text{ème}}$ épreuve on met une boule dans l'urne A (resp. B).

Q1 • R_1 est la variable certaine égale à 0.

• $R_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

L'événement $\{R_2 = 0\}$ est la réunion disjointe des événements $A_1 \cap A_2$ et $B_1 \cap B_2$.

Donc $P(R_2 = 0) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)$. Alors $P(R_2 = 0) = P(A_1)\, P(A_2/A_1) + P(B_1)\, P(B_2/B_1) = p^2 + q^2$.

On peut encore écrire : $P(R_2 = 0) = p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2\,pq = 1 - 2\,pq$.

Donc $P(R_2 = 1) = 1 - P(R_2 = 0) = 1 - (1 - 2\,pq) = 2pq$.

<u>Remarque</u> *On peut retrouver ce dernier résultat directement en écrivant :*

$$\{R_2 = 1\} = (B_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap B_3).$$

$$\boxed{R_2(\Omega) = \{0, 1\},\ P(R_2 = 0) = 2pq \text{ et } P(R_2 = 1) = 1 - 2\,pq.} \quad \boxed{\text{Si } p = q = \frac{1}{2} \text{ alors } P(R_2 = 0) = P(R_2 = 1) = \frac{1}{2}\cdot}$$

• $R_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

L'événement $\{R_3 = 0\}$ est la réunion disjointe des événements $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ et $B_1 \cap B_2 \cap B_3$.

Donc $P(R_3 = 0) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

Alors $P(R_3 = 0) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) + P(B_1)\, P(B_2/B_1)\, P(B_3/B_1 \cap B_2) = p^3 + q^3$.

Finalement $P(R_3 = 0) = p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3\,p^2\,q - 3\,q^2\,p = 1 - 3\,p\,q\,(p + q) = 1 - 3\,p\,q$.

L'événement $\{R_3 = 1\}$ est la réunion disjointe des événements $B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, $A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap A_4$, $A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4$, $A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$, $B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap B_4$ et $B_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap B_4$.

$p(B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(B_1)\, P(A_2/B_1)\, P(A_3/B_1 \cap A_2)\, P(A_4/B_1 \cap A_2 \cap A_3) = q\,p\,p\,p = q\,p^3$.

De même $P(A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) = q\,p^3$.

De même encore $P(A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap B_4) = p\,q^3$.

Alors $P(R_3 = 1) = 3\,q\,p^3 + 3\,p\,q^3 = 3\,pq\,(p^2 + q^2) = 3\,pq\,((p + q)^2 - 2\,pq) = 3\,pq\,(1 - 2\,pq) = 3\,pq - 6\,(pq)^2$.

Ainsi $P(R_3 = 2) = 1 - P(R_3 = 0) - P(R_3 = 1) = 1 - (1 - 3\,p\,q) - (3\,p\,q - 6\,(p\,q)^2) = 6\,(pq)^2$.

$$\boxed{R_3(\Omega) = \{0, 1, 2\},\ P(R_3 = 0) = 1 - 3\,pq,\ P(R_3 = 1) = 3\,pq - 6\,(pq)^2 \text{ et } P(R_3 = 2) = 6\,(pq)^2.}$$

$$\boxed{\text{Si } p = q = \frac{1}{2} \text{ alors } P(R_3 = 0) = \frac{1}{4},\ P(R_3 = 1) = \frac{3}{8} \text{ et } P(R_3 = 2) = \frac{3}{8}\cdot}$$

Q2 $E(R_1) = 0$. $E(R_2) = P(R_2 = 1) = 2\,pq$.

$E(R_3) = P(R_3 = 1) + 2\,P(R_3 = 2) = 3\,pq - 6\,(pq)^2 + 12\,(pq)^2 = 3\,pq + 6\,(pq)^2$.

$$\boxed{E(R_1) = 0} \quad \boxed{E(R_2) = 2\,pq} \quad \boxed{E(R_3) = 3\,pq + 6\,(pq)^2}$$

Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{E(R_1) = 0}$ $\boxed{E(R_2) = \dfrac{1}{2}}$ $\boxed{E(R_3) = \dfrac{9}{8}}$

$E(R_1^2) = 0$. $E(R_2^2) = P(R_2 = 1) = 2\,pq$.

$E(R_3^2) = P(R_3 = 1) + 4\,P(R_3 = 2) = 3\,pq - 6\,(pq)^2 + 24\,(pq)^2 = 3\,pq + 18\,(pq)^2$.

$V(R_1) = 0$. $V(R_2) = E(R_2^2) - \big(E(R_2)\big)^2 = 2\,pq - (2\,pq)^2 = 2\,pq\,(1 - 2\,pq)$.

$V(R_3) = E(R_2^3) - \big(E(R_3)\big)^2 = 3\,pq + 18\,(pq)^2 - (3\,pq + 6\,(pq)^2)^2 = 3\,pq + 18\,(pq)^2 - 9\,(pq)^2 - 36\,(pq)^3 - 36\,(pq)^4$.

$V(R_3) = 3\,pq\,(1 + 3\,pq - 12\,(pq)^2 - 12\,(pq)^3)$.

Des calculs simples donnent pour $p = q = \dfrac{1}{2} : V(R_1) = 0$, $V(R_2) = \dfrac{1}{4}$ et $V(R_3) = \dfrac{39}{64}$.

$\boxed{V(R_1) = 0}$ $\boxed{V(R_2) = 2\,pq\,(1 - 2\,pq)}$ $\boxed{V(R_3) = 3\,pq\,(1 + 3\,pq - 12\,(pq)^2 - 12\,(pq)^3).}$

Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{V(R_1) = 0}$ $\boxed{V(R_2) = \dfrac{1}{4}}$ $\boxed{V(R_3) = \dfrac{39}{64}}$

Q3 R_n prend ses valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$. Mieux si k est un élément de $[\![0, n-1]\!]$, en mettant au cours des k premières épreuves une boule dans l'urne A et au cours des n épreuves suivantes une boule dans B on réalise l'événement $\{R_n = k\}$. Ainsi :

$$\boxed{R_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!].}$$

Q4 Faisons d'abord remarquer à notre ami concepteur que l'on ne tire pas (pas plus que l'on ne pointe) mais on place des boules dans l'urne A ou dans l'urne B.

Soit k un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

a) Notons U^A_{n-1+k} (resp. U^B_{n-1+k}) l'événement à l'issue des $n-1+k$ premières épreuves l'urne A (resp. B) contient $n-1$ boules et l'urne B (resp A) contient k boules.

Chaque épreuve a deux issues : mettre une boule dans A ou mettre une boule dans B. Le premier événement se produit avec la probabilité p et le second avec la probablité q.

U^A_{n-1+k} se réalise si et seulement si en faisant $n-1+k$ épreuves de manière indépendante on réalise $n-1$ fois le premier événement et k fois le second.

Alors les amateurs de lois binômiales n'ont pas de mal à comprendre que $P(U^A_{n-1+k}) = \mathrm{C}^{n-1}_{n-1+k}\, p^{n-1}\, q^k$.

De même $P(U^B_{n-1+k}) = \mathrm{C}^{n-1}_{n-1+k}\, q^{n-1}\, p^k$.

La probabilité qu'à l'issue des $n-1+k$ premières épreuves l'urne A contienne n-1 boules et l'urne B contienne k boules est :

$$\mathrm{C}^{n-1}_{n-1+k}\, p^{n-1}\, q^k = \binom{n-1+k}{n-1} p^{n-1}\, q^k.$$

b) L'événement $\{R_n = k\}$ se réalise si et seulement si à l'issue des $n-1+k$ premières épreuves l'urne A contient n-1 boules, l'urne B contient k boules et à la $(n+k)^{\text{ème}}$ épreuve on place une boule dans A $\boxed{\text{ou}}$ à l'issue des $n-1+k$ premières épreuves l'urne B contient $n-1$ boules, l'urne A contient k boules et à la $(n+k)^{\text{ème}}$ épreuve on place une boule dans B.

Ainsi $\{R_n = k\}$ est la réunion disjointe des événements $U^A_{n-1+k} \cap A_{n+k}$ et $U^B_{n-1+k} \cap B_{n+k}$.

Alors $P(R_n = k) = P(U^A_{n-1+k} \cap A_{n+k}) + P(U^B_{n-1+k} \cap B_{n+k})$.

$P(R_n = k) = P(U^A_{n-1+k})\, P(A_{n+k}/U^A_{n-1+k}) + P(U^B_{n-1+k})\, P(B_{n+k}/U^B_{n-1+k})$.

$P(R_n = k) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, p^{n-1}\, q^k\, p + \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, q^{n-1}\, p^k\, q = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, \big(p^n\, q^k + q^n\, p^k\big).$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(R_n = k) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, \big(p^n\, q^k + q^n\, p^k\big).}$$

$$\boxed{\text{Si } p = q = \frac{1}{2},\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(R_n = k) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}.}$$

Q5 $\boxed{\text{Jusqu'à la fin de de 3.1.2. nous supposerons } p = q = \frac{1}{2}\cdot}$ ◀

Soit k un élément de $[\![0, n-2]\!]$.

$2\,(k+1)\,P(R_n = k+1) = 2\,(k+1)\ \mathrm{C}_{n+k}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = (k+1)\,\dfrac{(n+k)!}{(n-1)!\,(k+1)!}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}.$

$2\,(k+1)\,P(R_n = k+1) = (n+k)\,\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1} = (n+k)\ \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1} = (n+k)\,P(R_n = k).$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ 2\,(k+1)\,P(R_n = k+1) = (n+k)\,P(R_n = k).}$$

Q6 En sommant de 2 jusqu'à $n-2$ l'égalité précédente il vient :

$2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,P(R_n = k+1) = \sum_{k=0}^{n-2} (n+k)\,P(R_n = k).$

En effectuant un petite translation d'indice dans la première somme on peut écrire :

$2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,P(R_n = k) = \sum_{k=0}^{n-2} (n+k)\,P(R_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\,P(R_n = k) - (n+n-1)\,P(R_n = n-1).$

Ainsi $2\,E(R_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\,P(R_n = k) + n \sum_{k=0}^{n-1} P(R_n = k) - (2\,n-1)\,P(R_n = n-1).$

Alors $2\,E(R_n) = E(R_n) + n \times 1 - (2\,n-1)\,P(R_n = n-1)$. Finalement :

$$\boxed{E(R_n) = n - (2\,n-1)\,P(R_n = n-1) = n - (2\,n-1)\ \mathrm{C}_{2\,n-2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,n-2}.}$$

Exercice *Montrer dans le cas où p est quelconque que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{E(R_{n+1})}{n+1} - \dfrac{E(R_n)}{n} = \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{n+1}\,(pq)^n.$

Ecrire un programme en Turbo-Pascal permettant de calculer $E(R_n)$.

Q7 $n - E(R_n) = (2\,n-1)\,P(R_n = n-1) = (2\,n-1)\ \mathrm{C}_{2\,n-2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,n-2} = \dfrac{2\,n-1}{\sqrt{n-1}}\,a_{n-1}.$

Rappelons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot$ Donc $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot$

Alors $n - E(R_n) = \dfrac{2\,n-1}{\sqrt{n-1}}\,a_{n-1} \sim \dfrac{2\,n}{\sqrt{n}}\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{n}\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}.$

$$\boxed{n - E(R_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \sqrt{n}.}$$

Q8 $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ 2\,(k+1)\,P(R_n = k+1) = (n+k)\,P(R_n = k).$

Donc $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ 2\,(k+1)^2\,P(R_n = k+1) = (k+1)\,(n+k)\,P(R_n = k).$

En sommant de 2 jusqu'à $n-2$ l'égalité précédente il vient :

$$2\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2\,P(R_n=k+1)=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,(n+k)\,P(R_n=k).$$

En effectuant un petite translation d'indice dans la première somme on peut écrire :

$$2\sum_{k=1}^{n-1}k^2\,P(R_n=k)=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,(n+k)\,P(R_n=k)-n\,(2\,n-1)\,P(R_n=n-1).$$

Ainsi $2\,E(R_n^2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k^2\,P(R_n=k)+(n+1)\sum_{k=0}^{n-1}k\,P(R_n=k)+n\sum_{k=0}^{n-1}P(R_n=k)-n\,(2\,n-1)\,P(R_n=n-1)$.

$E(R_n^2)=(n+1)\,E(R_n)+n\times 1-n\,(2\,n-1)\,P(R_n=n-1)$. Or $(2\,n-1)\,P(R_n=n-1)=n-E(R_n)$ donc :

$E(R_n^2)=(n+1)\,E(R_n)+n-n\,(n-E(R_n))=(2n+1)\,E(R_n)-n\,(n-1)$.

$$\boxed{E(R_n^2)=(2n+1)\,E(R_n)-n\,(n-1).}$$

Q9 $V(R_n)=E(R_n^2)-\big(E(R_n)\big)^2=(2n+1)\,E(R_n)-n\,(n-1)-\big(E(R_n)\big)^2$.

$$\boxed{V(R_n)=(2n+1)\,E(R_n)-\big(E(R_n)\big)^2-n\,(n-1).}$$

Q10 Rappelons que : $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ E(R_n)=n-(2\,n-1)\ \mathrm{C}_{2\,n-2}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\,n-2}$.

Observons que ceci vaut encore pour $n=1$ car $E(R_1)=0$ et $n-(2\,n-1)\ \mathrm{C}_{2\,n-2}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\,n-2}$ vaut également 0 pour $n=1$.

Posons alors $\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\ b_n=\mathrm{C}_{2\,n-2}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\,n-2}$. Alors $b_1=1$.

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $b_n=\dfrac{(2\,n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\,n-2}=\dfrac{(2\,n-2)(2\,n-3)}{(n-1)^2}\,\dfrac{(2\,n-4)!}{\big((n-2)!\big)^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\,n-4}\dfrac{1}{4}$.

$b_n=\dfrac{(2\,n-2)(2\,n-3)}{4\,(n-1)^2}\,b_{n-1}=\dfrac{2\,n-3}{2\,(n-1)}\,b_{n-1}=\left(1-\dfrac{0.5}{n-1}\right)b_{n-1}$.

Alors $\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\ E(R_n)=n-(2n-1)\,b_n$, $b_1=1$ et $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ b_n=\left(1-\dfrac{0.5}{n-1}\right)b_{n-1}$.

Il n'y a alors plus de difficulté pour écrire un petit programme qui calcule $E(R_n)$... et $V(R_n)$.

```
1 Program ECRICOME_2004;
2
3 var k,n:integer;b:real;
4 begin
5 write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
6 b:=1;
7 for k:=2 to n do b:=(1-0.5/(k-1))*b;
8 b:=n-(n+n-1)*b;
9 writeln('L''espérance de R',n,' est : ',b);
10 writeln('La variance de R',n,' est : ',(n+n-1-b)*b-n*(n-1));
```

Remarque *Pour s'éviter une soustraction à chaque passage dans la boucle on peut remplacer la ligne 7 par :*

```
for k:=1 to n-1 do b:=(1-0.5/k)*b;
```

3.1.3. Retour au cas général

$\boxed{\textbf{Q1}}$ L'événement remplir l'une des deux urnes est certain. Notons R_A (resp. R_B) l'événement on remplit en premier l'urne A (resp. B).

$P(R_A \cup R_B) = 1$ et $R_A \cap R_B = \emptyset$. Ainsi $1 = P(R_A) + P(R_B)$.

Pour tout élément k de $[\![0, m-1]\!]$ notons R_A^k l'événement on remplit l'urne A en premier et l'urne B contient alors k boules.

R_A est la réunion disjointe des événements R_A^1, R_A^2, ..., R_A^{m-1}. Donc $P(R_A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} P(R_A^k)$.

Soit k dans $[\![0, m-1]\!]$. Notons X_{n-1+k} la variable aléatoire qui compte le nombre de boules placées dans A au cours des $n-1+k$ premières épreuves. X_{n-1+k} suit une loi binômiale de paramètres $n-1+k$ et p.

$P(R_A^k) = P(\{X_{n-1+k} = n-1\} \cap A_{n+k}) = P(X_{n-1+k} = n-1)\, P(A_{n+k}/X_{n-1+k} = n-1) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, p^{n-1}\, q^k\, p.$

$P(R_A^k) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, p^n\, q^k$.

Alors $P(R_A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}\, p^n\, q^k = p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k\, \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1}$.

En échangeant les rôles de A et B on obtient : $P(R_B) = q^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k\, \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}$.

Comme $P(R_A) + P(R_B) = 1$:

$$\boxed{q^n \sum_{k=0}^{n-1} p^k\, \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k\, \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} = 1}$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Dans toute cette question n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_{m+1} - u_m = q^m\, \mathrm{C}_{n-1+m}^{n-1} > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

De plus, d'après la question précédente : $q^m \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k\, \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} + p^n\, u_m = 1$. Comme $q^m \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k\, \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}$ est un réel strictement positif : $p^n\, u_m < 1$. Ainsi $u_m < \dfrac{1}{p^n}\cdot$

$$\boxed{\text{La suite } (u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est majorée par } \frac{1}{p^n}\cdot}$$

Ainsi la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

b) Soit k un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

Supposons $k > 0$. $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} = \mathrm{C}_{m-1+k}^{k} = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (m+i)$.

Or $\forall i \in [\![0, m-1]\!],\ m + i \underset{m\to+\infty}{\sim} m$ donc

$\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (m+i) \underset{m\to+\infty}{\sim} m^k$. Alors $\mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} \underset{m\to+\infty}{\sim} \dfrac{m^k}{k!}\cdot$ Notons que ceci vaut encore pour $k = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^k}{k!}\cdot}$$

c) $\forall m \in \mathbb{N}^*, q^m \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k \, q^m \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}\right).$

Soit k un élément de $[\![0, n-1]\!]$. $p^k \, q^m \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} \underset{m \to +\infty}{\sim} p^k \, q^m \dfrac{m^k}{k!} = \dfrac{p^k}{k!} \, q^m \, m^k.$

Comme $|q| < 1$, par croissance comparée on a : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} q^m \, m^k = 0$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{p^k}{k!} \, q^m \, m^k\right) = 0.$

Par conséquent, pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(p^k \, q^m \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}\right) = 0.$

Ce qui donne $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k \, q^m \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}\right) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} = 0.}$$

d) $q^m \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} + p^n \, u_m = 1$ donc $u_m = \dfrac{1}{p^n} \left(1 - q^m \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1}\right).$

Alors $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$ car $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \ \mathrm{C}_{m-1+k}^{m-1} = 0.$

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} u_m = \frac{1}{p^n}}$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \gamma_k = q^k \ \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \ \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} = \frac{1}{p^n}\cdot}$$

3.2. Etude d'une variable discrète d'univers image infini.

Q1 En anticipant sur Q3 nous pouvons sans doute dire que :

$$\boxed{T_n \text{ prend presque sûrement ses valeurs dans } \mathbb{N}\ldots}$$

Q2 Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Notons X_{n-1+k} la variable aléatoire qui compte le nombre de boules placées dans A au cours des $n-1+k$ premières épreuves. X_{n-1+k} suit une loi binômiale de paramètres $n-1+k$ et p.

Alors $\{T_n = k\} = \{X_{n-1+k} = n-1\} \cap A_{n+k}$.

Donc $P(T_n = k) = P(X_{n-1+k} = n-1) \, P(A_{n+k}/X_{n-1+k} = n-1) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \ p^{n-1} \, q^{(n-1+k)-(n-1)} \, p = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \ p^n \, q^k.$

$$\boxed{P(T_n = k) = \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \ p^n \, q^k.}$$

Q3 3.1.3 Q3 a montré que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \ \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} = \frac{1}{p^n}\cdot$ Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} \ p^n \, q^k = 1$. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(T_n = k) = 1.}$$

Q4 Soit j un élément de $[\![1, n]\!]$. $Z_j + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p car Z_j compte le nombre d'épreuves nécessaires à l'arrivée d'une nouvelle boule dans A.

Ainsi $E(Z_j + 1)$ existe et vaut $\dfrac{1}{p}\cdot$ Alors $E(Z_j)$ existe et vaut $\dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}\cdot$

De même Z_j+1 possède une espérance qui vaut $\dfrac{q}{p^2}\cdot$ donc Z_j possède une variance qui vaut également $\dfrac{q}{p^2}\cdot$

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ E(Z_j)=\frac{q}{p} \text{ et } V(Z_j)=\frac{q}{p^2}\cdot}$$

Q5 Clairement :

$$\boxed{T_n=\sum_{j=1}^{n} Z_j}$$

Q6 Alors T_n possède une espérance qui vaut : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} E(Z_j)=n\,\frac{q}{p}\cdot$

Les variables aléatoires Z_1, Z_2, ..., Z_n étant visiblement indépendantes, T_n possède une variance qui vaut : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} V(Z_j)$ c'est à dire $n\,\dfrac{q}{p^2}\cdot$

$$\boxed{E(T_n)=n\,\frac{q}{p} \text{ et } V(T_n)=n\,\frac{q}{p^2}\cdot}$$