ECRICOME 2005 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

Remarque Dans la suite si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nous noterons $\operatorname{Sp} A$ *l'ensemble de ses valeurs propres et* SEP (A, λ) *le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ de A.*

Si α, β γ sont trois réels nous noterons Diag (α, β, γ) la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Q1. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si a, b et c sont trois réels quelconques, I , J, K sont trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne dépendent pas de a, b, c et $M(a,b,c) = a\,I + b\,J + c\,K$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $K^2 = I + J$.

$K^3 = K^2\,K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\,K$. Donc $K^3 - 2\,K = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\boxed{J^2 = I}$ $\boxed{K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\boxed{K^2 = I + J}$ $\boxed{K^3 = 2\,K}$.

$\boxed{X^3 - 2\,X \text{ est un polynôme annulateur de } K.}$

$X^3 - 2\,X$ est un polynôme annulateur de K et $X^3 - 2\,X = X\,(X^2 - 2) = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

$X^3 - 2\,X$ est donc un polynôme annulateur de K dont les racines sont $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$. Ainsi :

$\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles de } K \text{ sont } -\sqrt{2},\ 0 \text{ et } \sqrt{2}.}$

Q2. **Ici il faut sans doute comprendre que P doit être une matrice orthogonale.**

Remarque $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$ *est une matrice inversible de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *et* ${}^tPKP$ *est la matrice diagonale* $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ *mais* P^{-1} *n'est pas égale à* ${}^tP$ *!!*

K est une matrice symétrique et à coefficients réels donc K est diagonalisable. Mieux il existe une matrice orthogonale P, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que ${}^tPKP$ soit une matrice diagonale.

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } P \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } P^{-1}={}^tP \text{ et telle que } D={}^tPKP \text{ soit une matrice diagonale.}}$$

Les valeurs propres possibles de K sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Regardons si ces réels sont des valeurs propres de K.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $KX=\begin{pmatrix}y\\x+z\\y\end{pmatrix}$.

$$KX=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=0\\x+z=0\\y=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=0\\z=-x\end{cases}.$$

Ainsi 0 est valeur propre de K et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Soit ε un élément de $\{-1,1\}$. $KX=\varepsilon\sqrt{2}\,X\Longleftrightarrow\begin{cases}y=\varepsilon\sqrt{2}\,x\\x+z=\varepsilon\sqrt{2}\,y\\y=\varepsilon\sqrt{2}\,z\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=\varepsilon\sqrt{2}\,x\\\varepsilon\sqrt{2}\,x=\varepsilon\sqrt{2}\,z\\x+z=(\varepsilon\sqrt{2})^2\,x\end{cases}.$

$$KX=\varepsilon\sqrt{2}\,X\Longleftrightarrow\begin{cases}y=\varepsilon\sqrt{2}\,x\\x=z\\x+z=2\,x\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=\varepsilon\sqrt{2}\,x\\z=x\end{cases}.$$

Ainsi $\varepsilon\sqrt{2}$ est valeur propre de K et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix}1\\\varepsilon\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.

Finalement K possède trois valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Posons $X_1=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $X_3=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.

$\|X_1\|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$, $\|X_2\|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ et $\|X_3\|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$.

Dès lors posons $Y_1=\dfrac{1}{\|X_1\|}X_1=\begin{pmatrix}1/2\\-\sqrt{2}/2\\1/2\end{pmatrix}$, $Y_2=\dfrac{1}{\|X_2\|}X_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $Y_3=\dfrac{1}{\|X_3\|}X_3=\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{2}/2\\1/2\end{pmatrix}$.

Alors (Y_1) est une base orthonormée de SEP $\left(K,-\sqrt{2}\right)$, (Y_2) est une base orthonormée de SEP $(K,0)$ et (Y_3) est une base orthonormée de SEP $\left(K,\sqrt{2}\right)$.

K est une matrice symétrique à coefficients réels dont les valeurs propres sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Ainsi SEP $\left(K,-\sqrt{2}\right)$, SEP $(K,0)$ et SEP $\left(K,\sqrt{2}\right)$ sont trois sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP}\left(K,-\sqrt{2}\right) \oplus \text{SEP}\,(K,0) \oplus \text{SEP}\left(K,\sqrt{2}\right)$ (K est diagonalisable).

Alors $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ contituée de vecteurs propres de K respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Notons alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2. P est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée ; ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

3. ${}^tPKP = P^{-1}KP = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{Diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$.

Si $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Alors P est une matrice inversible d'inverse ${}^tP$, $D = {}^tPKP$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ et $-\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2}$!

Q3. Soient a, b et c trois réels. $M = M(a,b,c) = a\,I + b\,J + c\,K = a\,I + b\,(K^2 - I) + c\,K = (a-b)\,I + c\,K + b\,K^2$.

$$\boxed{M = M(a,b,c) = (a-b)\,I + c\,K + b\,K^2.}$$

${}^tPMP = {}^tP\big((a-b)\,I + c\,K + b\,K^2\big)P = (a-b)\,{}^tPIP + c\,{}^tPKP + b\,{}^tPK^2P.$

${}^tPMP = (a-b)\,P^{-1}P + c\,P^{-1}KP + b\,P^{-1}K^2P = (a-b)\,I + c\,D + b\,(P^{-1}KP)^2 = (a-b)\,I + c\,D + b\,D^2.$

$${}^tPMP = (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^2.$$

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} a-b-c\sqrt{2}+2\,b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c\sqrt{2}+2\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si a, b et c sont trois réels et si $M = M(a,b,c)$ alors :

$P^{-1}MP = {}^tPMP = (a-b)\,I + c\,D + b\,D^2 = \begin{pmatrix} a+b-c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ou $P^{-1}MP = {}^tPMP = \text{Diag}(a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2})$.

Soient a, b et c trois réels.

$M = M(a, b, c)$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2})$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, M = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Diag}(a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2}) = \{a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2}\}$.

$$\boxed{\text{Si } a,\, b,\, c \text{ sont trois réels, l'ensemble des valeurs popres de } M = M(a, b, c) \text{ est } \{a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2}\}.}$$

Soient a, b et c trois réels. Cherchons le nombre de valeurs propres distinctes de $M = M(a, b, c)$ ainsi que ses sous-espaces popres.

Posons $\lambda_1 = a + b - c\sqrt{2}$, $\lambda_2 = a - b$ et $\lambda_3 = a + b + c\sqrt{2}$.

Nous avons vu que $M = M(a, b, c)$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}\, M = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

$M = (a - b)\, I + c\, K + b\, K^2$ donc $M = Q(K)$ où Q est le polynôme $(a - b) + c\, X + b\, X^2$.

Rappelons que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de K respectivement associé aux valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Alors $K\, Y_1 = -\sqrt{2}\, Y_1$, $K\, Y_2 = 0 \times Y_2$ et $K\, Y_3 = \sqrt{2}\, Y_3$.

Le cours nous permet alors de dire que $M\, Y_1 = Q(K)\, Y_1 = Q(-\sqrt{2})\, Y_1$, $M\, Y_2 = Q(K)\, Y_2 = Q(0)\, Y_2$ et $M\, Y_3 = Q(K)\, Y_3 = Q(\sqrt{2})\, Y_3$.

Un calcul simple (en fait déjà fait) donne $Q(-\sqrt{2}) = \lambda_1$, $Q(0) = \lambda_2$ et $Q(\sqrt{2}) = \lambda_3$.

Ainsi (Y_1, Y_2, Y_3) est une base ortonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3.

• Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois réels deux à deux distincts, M admet trois valeurs propres deux à deux distinctes et les sous-espaces propres de M sont nécessairement des droites vectorielles.

Plus précisément : SEP $(M, \lambda_1) = \mathrm{Vect}(Y_1)$, SEP $(M, \lambda_2) = \mathrm{Vect}(Y_2)$ et SEP $(M, \lambda_3) = \mathrm{Vect}(Y_3)$.

• Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, M n'admet qu'une valeur propre et comme M est diagonalisable le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

• Supposons que deux des réels λ_1, λ_2, λ_3 soient égaux et que le troisième soit distinct des deux précédents.

Il existe trois éléments i, j k de $[\![1, 3]\!]$, deux à deux distinctes, et tels que $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$.

Comme M est diagonalisable, M possède deux sous-espaces propres dont l'un est de dimension 1 et l'autre de dimension 2.

(Y_i, Y_j) est une famille libre de SEP (M, λ_i) qui est alors de dimension au moins 2. Ce qui précède montre que SEP (M, λ_i) est de dimension 2. (Y_i, Y_j) est finalement une base de SEP (M, λ_i).

De plus SEP (M, λ_k) est nécessairement de dimension 1 et il est engendré par (Y_k).

Il ne reste plus qu'à examiner les conditions sur a, b et c qui donnent ses différents cas.

$\lambda_1 = \lambda_2 \iff a + b - \sqrt{2}\,c = a - b \iff 2\,b = \sqrt{2}\,c \iff c = \sqrt{2}\,b.$

$\lambda_3 = \lambda_2 \iff a + b + \sqrt{2}\,c = a - b \iff -2\,b = \sqrt{2}\,c \iff c = -\sqrt{2}\,b.$

$\lambda_1 = \lambda_3 \iff a + b - \sqrt{2}\,c = a + b + \sqrt{2}\,c \iff c = 0.$

Ainsi :

- $c = b = 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a$;
- $c = 0$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_3 = a + b \neq \lambda_2 = a - b$;
- $c = \sqrt{2}\,b$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = a - b \neq \lambda_3 = a + 3\,b$;
- $c = -\sqrt{2}\,b$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_2 = \lambda_3 = a - b \neq \lambda_1 = a + 3\,b$;
- dans les autres cas λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois réels deux à deux distincts.

Il ne reste plus qu'à conclure en faisant la synthèse des résultats obtenus.

$$\boxed{\text{Si } b = c = 0,\ M = M(a,b,c) \text{ admet une seule valeur propre } a \text{ et SEP } (M, a) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Si $c = 0$ et $b \neq 0$, $M = M(a,b,c)$ admet deux valeurs propres distinctes : $a + b$ et $a - b$.

Dans ce cas SEP $(M, a+b) = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$ et SEP $(M, a-b) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right).$

Si $c = \sqrt{2}\,b$ et $b \neq 0$, $M = M(a,b,c)$ admet deux valeurs propres distinctes : $a - b$ et $a + 3\,b$.

Dans ce cas SEP $(M, a-b) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$ et SEP $(M, a+3\,b) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right).$

Si $c = -\sqrt{2}\,b$ et $b \neq 0$, $M = M(a,b,c)$ admet deux valeurs propres distinctes : $a - b$ et $a + 3\,b$.

Dans ce cas SEP $(M, a-b) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$ et SEP $(M, a+3\,b) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right).$

Dans les autres cas $M = M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $a+b-\sqrt{2}\,c$, $a-b$ et $a+b+\sqrt{2}\,c$.

De plus SEP $\big(M, a+b-\sqrt{2}\,c\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$, SEP $(M, a-b) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$ et

SEP $\big(M, a+b+\sqrt{2}\,c\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$.

4. Ici $a = 4$, $b = 2$ et $c = \sqrt{2}$.

Alors $M = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 6 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4+2-\sqrt{2}\,\sqrt{2} = 4$, $\lambda_2 = 4-2 = 2$ et $\lambda_3 = 4+2+\sqrt{2}\,\sqrt{2} = 8$.

M admet trois valeurs propres distinctes 4, 2 et 8. De plus :

SEP $(M,4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$, SEP $(M,2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$ et SEP $(M,8) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$

Si $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$ alors ${}^tPMP = P^{-1}MP$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

L'énoncé est encore approximatif à ce niveau. Dans la suite (x,y,z) est implicitement un élément de $\mathbb{R}^3 - \{0_{R^3}\}$ et ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a. i. $\|X'\|^2 = {}^tX'X' = {}^t({}^tPX){}^tPX = {}^tX{}^t({}^tP){}^tPX = {}^tXP{}^tPX = {}^tXPP^{-1}X = {}^tXX = \|X\|^2$.

$$\boxed{\|X'\|^2 = \|X\|^2.}$$

$${}^tXMX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D{}^tPX = {}^tX'DX' = (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} 4\,x' \\ 2\,y' \\ 8\,z' \end{pmatrix}.$$

Ainsi ${}^tXMX = 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2$. De plus $\|X\|^2 = \|X'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Alors

$$\boxed{f(x,y,z) = \frac{4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.}$$

a. ii. $2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leqslant 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2 \leqslant 8\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ car x'^2, y'^2, z'^2 sont trois réels positifs.

Donc $2 \leqslant \dfrac{4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \leqslant 8$ et ainsi $2 \leqslant f(x,y,z) \leqslant 8$ puisque $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \|X\|^2 > 0$.

$f(x,y,z) = 2 \Longleftrightarrow 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2 = 2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) \Longleftrightarrow 2\,x'^2 + 6\,z'^2 = 0 \Longleftrightarrow x' = z' = 0$.

$f(x,y,z) = 8 \Longleftrightarrow 4\,x'^2 + 2\,y'^2 + 8\,z'^2 = 8\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) \Longleftrightarrow 4\,x'^2 + 6\,y'^2 = 0 \Longleftrightarrow x' = y' = 0$.

Or $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' = {}^tPX = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{2}(x - \sqrt{2}\,y + z) \\ y' = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - z) \\ z' = & \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{2}\,y + z) \end{cases}$.

Alors $f(x,y,z) = 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ x + \sqrt{2}\,y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\big((1,0,-1)\big))$

Et $f(x,y,z) = 8 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}\,y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = \dfrac{2\,x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\big((1,\sqrt{2},1)\big))$

Résumons. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{R^3}\},\ 2 \leqslant f(x,y,z) \leqslant 8$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{R^3}\}, f(x,y,z) = 2 \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\big((1,0,-1)\big)$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{R^3}\}, f(x,y,z) = 8 \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\big((1,\sqrt{2},1)\big)$.

Le minimum de f est 2 et il est atteint en tout point de $\text{Vect}\big((1,0,-1)\big) - \{0_{R^3}\}$.
Le maximum de f est 8 et il est atteint en tout point de $\text{Vect}\big((1,\sqrt{2},1)\big) - \{0_{R^3}\}$.

Remarque Les fans de Rayleigh ne seront pas surpris par ces résultats...

b. i. Soit B une solution de l'équation. $BM = BB^2 = B^3 = B^2B = MB$.

B et M commutent.

Soit λ une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ.

$BMX = MBX$ donc $B(\lambda\,X) = MBX$ ou $MBX = \lambda\,BX$; ainsi BX appartient à E_λ.

Si λ une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ alors BX appartient à E_λ

Soit Y un vecteur propre de M. Notons γ la valeur propre associée. $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $MY = \gamma\,Y$.

M ayant trois valeurs propres deux à deux distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Ainsi le sous-espace propre E_γ de M associé à la valeur propre γ est $\text{Vect}(Y)$.

Or $BY \in E_\gamma$ donc il existe un réel γ' tel que $BY = \gamma'\,Y$. Comme Y n'est pas nul, c'est un vecteur propre de B (associé à la valeur propre γ').

$$\boxed{\text{Les vecteurs propres de } M \text{ sont des vecteurs propres de } B.}$$

Montrons que $\Delta = {}^tPBP$ est une matrice diagonale. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit j un élément de $[\![1,3]\!]$. PE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de P c'est donc Y_j. $PE_j = Y_j$ et $P^{-1}Y_j = E_j$.

De plus Y_j est un vecteur propre de M donc de B ; $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}, BY_j = \alpha_j\, Y_j$.

Alors $\Delta E_j = {}^tPBPE_j = P^{-1}BY_j = \alpha_j\, P^{-1}Y_j = \alpha_j\, E_j$.

Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de Δ est $\alpha_j\, E_j$ et ceci pour tout élément j de $[\![1,3]\!]$. Donc $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\Delta = {}^tPBP \text{ est une matrice diagonale.}}$$

b. ii. Oublions pudiquement le texte et résolvons l'équation.

Nous venons de voir que si B est solution de l'équation il existe une matrice diagonale Δ telle que $\Delta = {}^tPBP = P^{-1}BP$ ou telle que $B = P\Delta{}^tP = P\Delta P^{-1}$.

Ainsi les solutions de l'équation sont "de la forme" $P\Delta{}^tP = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Considérons alors une matrice diagonale $\Delta = \text{Diag }(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et posons $B = P\Delta{}^tP = P\Delta P^{-1}$.

Alors $B^2 = M \iff (P\Delta P^{-1})^2 = M \iff P\Delta^2P^{-1} = M \iff \Delta^2 = P^{-1}MP = \text{Diag}(4,2,8)$.

$$B^2 = M \iff \Delta^2 = \text{Diag}(4,2,8) \iff \text{Diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2) = \text{Diag}(4,2,8) \iff \begin{cases} \delta_1^2 = 4 \\ \delta_2^2 = 2 \\ \delta_3^2 = 8 \end{cases}.$$

$$B^2 = M \iff \begin{cases} \delta_1 = 2 \text{ ou } \delta_1 = 2 \\ \delta_2 = \sqrt{2} \text{ ou } \delta_2 = -\sqrt{2} \\ \delta_3 = 2\sqrt{2} \text{ ou } \delta_3 = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B^2 = M(4, 2, \sqrt{2})$ est :

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 2\,\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}\,\varepsilon'' \end{pmatrix} {}^tP \,;\, (\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon'') \in \{-1,1\}^3 \right\}.$$

Ou encore :

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' & 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon & \varepsilon - \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' \\ 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon & 2\,\varepsilon + 2\sqrt{2}\,\varepsilon'' & 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon \\ \varepsilon - \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' & 2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon & \varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon'' \end{pmatrix} ;\, (\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon'') \in \{-1,1\}^3 \right\}.$$

Il n'échappera alors à personne que :

l'ensemble des solutions de l'équation $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B^2 = M(4, 2, \sqrt{2})$ est :
$$\left\{ M\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon''}{2}, \frac{\varepsilon - \sqrt{2}\,\varepsilon' + \sqrt{2}\,\varepsilon''}{2}, \frac{2\,\varepsilon'' - \sqrt{2}\,\varepsilon}{2}\right) ; (\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

EXERCICE 2

1. Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \geqslant 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

u_n est défini et $u_n \geqslant \sqrt{n} \geqslant 0$. Ainsi $n + 1 + u_n \geqslant n + 1 \geqslant 0$.

Alors $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$ est défini et $u_{n+1} \geqslant \sqrt{n + 1}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \text{ est défini et } u_n \geqslant \sqrt{n}.}$$

2. a. Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. $(1 - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$ donc $1 + x - 2\sqrt{x} \geqslant 0$ et ainsi $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}\big(1 + x\big)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}\big(1 + x\big).}$$

b. Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}\cdot$

• La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \leqslant u_0 = 0 + \dfrac{u_0}{2^0}\cdot$

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

$n + 1 + u_n$ appartient à $\mathbb{R}^+$ donc $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\big(1 + n + 1 + u_n\big) = 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\,u_n$.

L'hypothèse de récurrence donne alors : $u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{u_0}{2^n}\right) = 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} + \dfrac{u_0}{2^{n+1}} = n + 1 + \dfrac{u_0}{2^{n+1}}\cdot$
Ainsi s'achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}\cdot}$$

Ce qui précède donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_{n-1} \leqslant n - 1 + \dfrac{u_0}{2^{n-1}} \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^{n-1}}\cdot$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \dfrac{u_{n-1}}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{u_0}{2^{n-1}}\cdot$ Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\,\frac{u_0}{2^{n-1}}\right) = 0 + 0 \times 0 = 0$.

Il vient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } 0.}$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_n}{n} = \sqrt{\dfrac{n+u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{u_{n-1}}{n^2}}\cdot$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \sqrt{0+0} = 0.$

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } 0.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} \leqslant u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}\cdot$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}$! !

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}\cdot}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n-1}}{n-1}\,\dfrac{n-1}{n}\right) = 0 \times 1 = 0.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}} = 1$. L'encadrement obtenu plus haut donne alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}.}$$

Remarque Il est clair que l'encadrement est parfaitement inutile et que le résultat s'obtient presque directement.

3.

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}\,x + \mathrm{o}(x) \text{ au voisinage de } 0.}$$

Donc $\sqrt{1+x}-1 = \dfrac{1}{2}\,x+\mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0. Alors $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\,x.$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = 0$, donc $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\,\left[\sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}-1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{u_{n-1}}{n}\cdot$

Comme $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$ alors $u_n - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\,\dfrac{\sqrt{n-1}}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\,\dfrac{\sqrt{n}}{2\,n} = \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{\text{La suite de terme général } w_n = u_n - \sqrt{n} \text{ converge vers } \frac{1}{2}\cdot}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\,(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\cdot$

Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=0.}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n-u_{n-1}=\left(u_n-\sqrt{n}\right)-\left(u_{n-1}-\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-0=0.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right)=0.}$$

Ce résultat peut encore s'écrire : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+\,*},\ \exists p\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geqslant p\Rightarrow\left|u_n-u_{n-1}\right|<\varepsilon.$

En prenant ε égal à $\dfrac{1}{2}$ on obtient l'existence d'un élément N_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant N_0\Rightarrow\left|u_n-u_{n-1}\right|<\dfrac{1}{2}$ ou $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant N_0\Rightarrow-\dfrac{1}{2}<u_n-u_{n-1}<\dfrac{1}{2}.$

Il en résulte que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant N_0\Rightarrow u_{n-1}-\dfrac{1}{2}<u_n.$

Comme N_0 appartient à $\mathbb{N}^*$, on peut encore écrire $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_0\Rightarrow u_{n-1}-\dfrac{1}{2}<u_n.$

Ce qui permet très largement d'affirmer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_0\Rightarrow u_{n-1}-\dfrac{1}{2}\leqslant u_n.$

Ainsi, conformément au texte ont peut dire :

$$\boxed{\text{Il existe un entier naturel } N_0 \text{ tel que pour tout entier naturel } n\text{, si } n\geqslant N_0 \text{ alors } u_n\geqslant u_{n-1}-\frac{1}{2}.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+1+u_n}-\sqrt{n+u_{n-1}}$. Alors :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\left(\sqrt{n+1+u_n}-\sqrt{n+u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}\right)}{\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}}=\frac{\left(n+1+u_n\right)-\left(n-u_{n-1}\right)}{\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}}.$$

Finalement $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}}.$

Ainsi $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $1+u_n-u_{n-1}$ car $\sqrt{n+1+u_n}+\sqrt{n+u_{n-1}}$ est strictement positif.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n \text{ est du signe de } 1+u_n-u_{n-1}.}$$

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant N_0$.

Alors $u_n\geqslant u_{n-1}-\dfrac{1}{2}$ donc $1+u_n-u_{n-1}\geqslant 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Ainsi $1+u_n-u_{n-1}$ est très largement positif.

Or $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $1+u_n-u_{n-1}$ (car n est dans $\mathbb{N}^*$ puisque $N_0\in\mathbb{N}^*$) donc $u_{n+1}-u_n$ est positif.

Finalement $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_0\Rightarrow u_{n+1}-u_n\geqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante à partir d'un certain rang.}}$$

5. Voici une version récursive.

```
Function suite(n:integer;u_0:real):real;

begin
if n=0 then suite:=u_0
       else suite:=sqrt(n+suite(n-1,u_0));
end;
```

Ajoutons une version itérative sans doute plus raisonnable...

```
Function suite(n:integer;u_0:real):real;

var i:integer; a:real;
begin
a:=u_0;
for i:=1 to n do
a:=sqrt(i+a);
suite:=a;
end;
```

PROBLÈME

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. Soit α un réel. $\widehat{f}_\alpha : t \to \dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

Notons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$ converge et que $\widehat{f}_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2\,\alpha}}\cdot$

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2\,\alpha}}\cdot$

Cette dernière intégrale converge si et seulement si $2\,\alpha > 1$ ou $\alpha > \dfrac{1}{2}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha, \text{ l'intégrale } J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}\cdot}$$

2. Soit α un réel de l'intervalle $[1,+\infty[$ (ou de l'intervalle $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$). $h_\alpha : t \to \dfrac{t^2}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Fixons A dans $[0,+\infty[$ et posons $\forall t \in [0,+\infty[,\ u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{2\,\alpha}\,\dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De plus : $\forall t \in [0,+\infty[,\ u'(t) = 1$, $\forall t \in [0,+\infty[,\ v'(t) = -\dfrac{1}{2\,\alpha}\left(-\dfrac{\alpha\,(2\,t)\,(1+t^2)^{\alpha-1}}{(1+t^2)^{2\,\alpha}}\right) = \dfrac{t}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\cdot$

Notons que $h_\alpha = u\,v'$. Une intégration par parties alors claire donne :

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \left[t\left(-\frac{1}{2\,\alpha}\,\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha}}\right)\right]_0^A - \int_0^A 1\times\left(-\frac{1}{2\,\alpha}\right)\,\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\,\alpha}\,\frac{A}{(1+A^2)^{\alpha}} + \frac{1}{2\,\alpha}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\alpha}}.$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{(1+A^2)^{\alpha}} = 0$ car $\displaystyle\frac{A}{(1+A^2)^{\alpha}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2\,\alpha}} = \frac{1}{A^{2\,\alpha-1}}$ et $2\,\alpha-1>0$.

Nous avons également $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\alpha}} = J_\alpha$. Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\,\alpha}\,J_\alpha$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha \text{ de } [1,+\infty[\text{ (ou de }]\tfrac{1}{2},+\infty[\text{)}, \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \frac{1}{2\,\alpha}\,J_\alpha.}$$

Soit α un réel de l'intervalle $[1,+\infty[$ (ou de l'intervalle $]\frac{1}{2},+\infty[$).

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t + J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t + J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\alpha}} = J_\alpha$.

Ainsi $\displaystyle J_{\alpha+1} = J_\alpha - \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = J_\alpha - \frac{1}{2\,\alpha}\,J_\alpha = \frac{2\,\alpha-1}{2\,\alpha}\,J_\alpha$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha \text{ de } [1,+\infty[\text{ (ou de }]\tfrac{1}{2},+\infty[\text{)}, J_{\alpha+1} = \frac{2\,\alpha-1}{2\,\alpha}\,J_\alpha.}$$

3. $\displaystyle J_1 = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty}\big[\arctan t\big]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\arctan A = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

$$\text{“}J_n = \frac{2\,(n-1)-1}{2\,(n-1)}\times\frac{2(\,n-2)-1}{2\,(n-2)}\times\cdots\times\frac{2\times1-1}{2\times1}\times J_1 = \frac{(2\,n-3)(2\,n-5)\cdots(1)}{2^{n-1}\,(n-1)!}\,J_1\text{”}$$

$$\text{“}J_n = \frac{(2\,n-2)(2\,n-3)(2\,n-4)(2\,n-5)\cdots(2)(1)}{2^{n-1}\,(n-1)!\,(2\,(n-1))(2\,(n-2))\cdots(2)}\,J_1 = \frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2}\,J_1\text{”}$$

Montrons alors par récurrence que : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2}\,J_1$.

- La propriété est vraie pour $n=1$ car pour $n=1$, $\displaystyle\frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2} = \frac{0!}{[1\times0!]^2} = 1$.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$J_{n+1} = \frac{2\,n-1}{2\,n}\,J_n = \frac{2\,n-1}{2\,n}\,\frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2}\,J_1 = \frac{(2\,n)(2\,n-1)}{(2\,n)^2}\,\frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2}\,J_1.$$

$\displaystyle J_{n+1} = \frac{(2\,n)!}{[2\,n\,2^{n-1}\,(n-1)!]^2}\,J_1 = \frac{(2\,n)!}{[2^n\,n!]^2}\,J_1$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2}\,J_1 = \frac{(2n-2)!}{\left[2^{n-1}\,(n-1)!\right]^2}\,\frac{\pi}{2}.}$$

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrons d'abord l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$. Notons que g_n est continue, paire et (strictement) positive sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ il suffit donc de montrer la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$

$g_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{t^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}}\,\dfrac{1}{t^{n+1}}$, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$ converge car $n+1>1$ et g_n est positive sur $[1,+\infty[$.

Les règles de comparaisons des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

g_n étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\,\mathrm{d}t$ est également strictement positive.

Posons alors $k_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$; k_n est un réel strictement positif. Posons encore $f_n = \dfrac{1}{k_n}\,g_n$.

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_n est positive sur $\mathbb{R}$ car g_n est positive sur $\mathbb{R}$ et k_n est un réel strictement positif.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Mieux $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k_n}\,k_n = 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{si } n \text{ appartient à } \mathbb{N}^* \text{ et si } k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t,\ f_n = \frac{1}{k_n}\,g_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n étant paire sur $\mathbb{R}$, $k_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$\varphi : t \to \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante. Elle définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

Ceci suffit pour s'autoriser à faire le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ dans $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient alors :

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \left((1+u^2)^{-\frac{n+1}{2}}\,\sqrt{n}\right)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n = 2\sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}}.}$$

2. a. et b. Gagnons un peu de temps en fixant r dans $\mathbb{N}^*$ et en étudiant l'existence d'un moment d'ordre r pour X.

Il s'agit donc d'étudier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, f_n(t)\,\mathrm{d}t$ car f_n a la parité de r sur $\mathbb{R}$.

Observons que $t \to t^r\, f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Notons encore que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge ou si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\, g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Retenons alors que X possède un moment d'ordre r si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\, g_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et étudions la nature de cette intégrale.

$t \to t^r\, g_n(t)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus :

$$t^r\, g_n(t) = t^r\, \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^r\, \left(\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}}\, t^r\, t^{-(n+1)} = \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\, g_n(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}}\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale converge si et seulement si $n + 1 - r > 1$ ou $n > r$. Finalement :

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre } r \text{ si et seulement si } n > r.}$$

$$\boxed{X \text{ possède une espérance si et seulement si } n > 1.}$$

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre 2 ou une variance si et seulement si } n > 2.}$$

$t \to t\, f_n(t)$ étant impaire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pourvu que l'on ait $n > 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n > 1,\ E(X) = 0.}$$

Supposons $n > 2$. $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^2\, f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

$$V(X) = \frac{2}{k_n}\int_0^{+\infty} t^2\, g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{k_n}\int_0^{+\infty} t^2\, \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ déjà justifié dans **Q1** donne alors :

$$V(X) = \frac{2}{k_n}\int_0^{+\infty}\left(n\, u^2\, \left(1+u^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}\, \sqrt{n}\right)\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{n}\, n}{k_n}\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

En remarquant que $\dfrac{n-1}{2} \geqslant 1$ (car $n \geqslant 3$) et en appliquant **I Q2** on obtient :

$$V(X) = \frac{2\sqrt{n}\, n}{k_n}\, \frac{1}{2\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, J_{\frac{n-1}{2}} = \frac{2\sqrt{n}\, n}{(n-1)\, k_n}\, J_{\frac{n-1}{2}}.$$

Or $k_n = 2\sqrt{n}\, J_{\frac{n+1}{2}}$ et, d'après **I Q2**, $J_{\frac{n+1}{2}} = J_{\frac{n-1}{2}+1} = \dfrac{2\ \frac{n-1}{2} - 1}{2\ \frac{n-1}{2}}\, J_{\frac{n-1}{2}} = \dfrac{n-2}{n-1}\, J_{\frac{n-1}{2}}$ (toujours parce que $\frac{n-1}{2} \geqslant 1$). Alors $k_n = 2\sqrt{n}\, \dfrac{n-2}{n-1}\, J_{\frac{n-1}{2}}$.

Ainsi $V(X) = \dfrac{2\sqrt{n}\, n}{(n-1)\, 2\sqrt{n}\, \frac{n-2}{n-1}\, J_{\frac{n-1}{2}}}\, J_{\frac{n-1}{2}} = \dfrac{n}{n-2}\cdot$

$$\boxed{\text{Si } n > 2,\ V(X) = \frac{n}{n-2}\cdot}$$

Partie III : Simulation d'une loi.

1. Posons $T = \tan\Theta$ et notons F_T la fonction de répartition de T et F_Θ celle de Θ.

Rappelons que $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{\pi}{2}\right[, F_\Theta(x) = 0$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, F_\Theta(x) = \dfrac{x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\pi}\left[x + \dfrac{\pi}{2}\right]$

et $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, F_\Theta(x) = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(\tan\Theta \leqslant x) = P(\Theta \leqslant \arctan x)$ car arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et Θ prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = F_\Theta(\arctan x) = \dfrac{1}{\pi}\left[\arctan x + \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \frac{1}{\pi}\left[\arctan x + \frac{\pi}{2}\right].}$$

arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour $F_T : x \to \dfrac{1}{\pi}\left[\arctan x + \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi F_T est une variable aléatoire à densité et F_T' en est une densité.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T'(t) = \dfrac{1}{\pi\,(1+x^2)}\cdot$ Alors $F_T' = f_1$. Finalement :

$$\boxed{T = \tan\Theta \text{ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité } f_1 : x \to \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}\cdot}$$

2. $Y = \tan\Theta = T$! ! Ainsi Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité f_1. Par conséquent :

$$\boxed{Y = \tan\Theta \text{ et } Y \text{ suit une loi de Cauchy.}}$$

3. Réecrivons le programme pour commencer.

```
Program simu;
var u,x:real;
begin
randomize;
u:=pi*random-pi/2;
x:=sin(u)/cos(u);
writeln(x);
end.
```

Random fournit un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0,1[$. Comme $z \to \pi\, x - \dfrac{\pi}{2}$ définit une bijection de $[0,1[$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'instruction **u : =pi*random-pi/2** affecte à la variable u un réel choisit au hasard dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On affecte alors à la variable x la tangente de ce nombre et on l'affiche.

Rassurons nous en disant que la probabilité pour que l'on affecte à u la valeur $-\dfrac{\pi}{2}$ est nulle.

Ainsi ce programme simule la variable aléatoire $Y = \tan \Theta$ qui suit une loi de Cauchy.

$$\boxed{\text{Ce programme simule la loi de Cauchy.}}$$

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

1. a. Y est une variable aléatoire à densité de densité f. Le cours, ou presque, nous dit alors que $-Y = (-1)\,Y$ est une variable aléatoire à densité admettant $x \to \dfrac{1}{|-1|}\, f\left(\dfrac{x-0}{-1}\right)$ ou $x \to f(-x)$ pour densité.

$$\boxed{-Y \text{ est une variable aléatoire à densité admettant } x \to f(-x) \text{ pour densité.}}$$

Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

Montrons que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.

• Supposons que Y et $-Y$ ont même loi. Y et $-Y$ ont même fonction de répartition. Notons $\hat{F}$ celle de $-Y$. Par hypothèse $\widehat{F} = F$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$, $x \to f(-x)$ est une densité de $-Y$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\widehat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{F}'(x) = f(-x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \widehat{F}'(x) = F'(x) = f(x)$. Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

• Supposons que f est paire sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. Ainsi f est une densité de Y et de $-Y$ donc Y et $-Y$ ont même loi.

$$\boxed{Y \text{ et } -Y \text{ ont même loi si et seulement si } f \text{ est paire.}}$$

Dans la suite de ce **a**, f est paire donc Y et $-Y$ ont même loi. Ainsi $\widehat{F} = F$.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ G(x) = P(|Y| \leqslant x) = 0.$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) = P(|Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant Y \leqslant x) = P(Y \leqslant x) - P(Y < -x).$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) = P(Y \leqslant x) - P(-Y > x) = P(Y \leqslant x) - \big(1 - P(-Y \leqslant x)\big) = F(x) - \big(1 - \widehat{F}(x)\big).$

$\forall x \in [0,+\infty[,\ G(x) = F(x) - \big(1 - F(x)\big) = 2\,F(x) - 1.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2\,F(x) - 1 & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}.}$$

f est paire sur $\mathbb{R}$ donc $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(0).$

Alors $2\,F(0) - 1 = 0$ et ainsi $F(0) = \dfrac{1}{2}\cdot$ On peut alors écrire :

$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 2\,F(x) - 1 & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}.$

G est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.

F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour $2\,F - 1$. Ainsi G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,+\infty[$:

1. G est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$;
2. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$ au moins.

Ceci suffit pour dire que $\boxed{|Y| \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ G'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ G'(x) = 2\,F'(x) = 2\,f(x)$.

Posons alors $\forall x \in]-\infty, 0[,\ g(x) = 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) = 2\,f(x)$.

g est une fonction numérique positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec G' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc g est une densité de $|Y|$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2\,f(x) & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases} \text{ est une densité de } |Y|.}$$

b. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $|Y|$ est une variable aléatoire à densité donc $P(|Y| = x) = 0$.

Alors $0 = P(|Y| = x) = P(Y = x) + P(Y = -x) = P(Y = x) + P(-Y = x) = 2\,P(Y = x)$ car Y et $-Y$ ont même loi. Donc $P(Y = x) = 0$.

$0 = P(|Y| = 0) = P(Y = 0)$; $P(Y = 0) = 0$.

Soit x un réel strictement négatif. $-x$ est strictement positif donc $P(Y = -x) = 0$. Alors $P(-Y = x) = 0$ donc $P(Y = x) = 0$ toujours parce que Y et $-Y$ ont même loi. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y = x) = 0.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(Y \leqslant x) = P(Y < x) + P(Y = x) = P(Y < x) = 1 - P(Y \geqslant x) = 1 - P(-Y \leqslant -x).$

Y et $-Y$ ayant même loi il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - P(Y \leqslant -x) = 1 - F(-x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x).}$$

Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $G(x) = P(|Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant Y \leqslant x) = P(Y \leqslant x) - P(Y < -x)$.

Or $P(Y = -x) = 0$ donc $G(x) = P(Y \leqslant x) - P(Y \leqslant -x) = F(x) - F(-x) = F(x) - \big(1 - F(x)\big) = 2\,F(x) - 1$.

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[,\ F(x) = \dfrac{1 + G(x)}{2}\cdot$

$\forall x \in]-\infty, 0],\ -x \in [0, +\infty[$ donc $\forall x \in]-\infty, 0],\ F(-x) = \dfrac{1 + G(-x)}{2}\cdot$

Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0],\ F(x) = 1 - F(-x) = 1 - \dfrac{1 + G(-x)}{2} = \dfrac{1 - G(-x)}{2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - G(-x)}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1 + G(x)}{2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - G(-x)}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{1 + G(x)}{2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \ !\,!}$$

Montrons alors que Y est une variable aléatoire à densité. Il suffit de montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

$|Y|$ est une variable aléatoire à densité donc g est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Alors G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - D$ et $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ G'(x) = g(x)$.

$x \to -x$ et G sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \dfrac{1 + G(x)}{2}$ et $x \to \dfrac{1 - G(-x)}{2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$.

Posons $D_1 = D \cap]0, +\infty[$ et $D_2 = \{-x; x \in D_1\}$.

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$ donc $\dfrac{1 + G}{2}$ aussi.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[- D_1$ et $\forall x \in]0, +\infty[- D_1,\ F'(x) = \dfrac{1}{2}\, G'(x) = \dfrac{1}{2}\, g(x) = \dfrac{1}{2}\, g(|x|)$!

$x \to -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in]-\infty, 0[- D_2,\ -x \in \mathbb{R} - D$ et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$.

Alors $x \to \dfrac{1 - G(-x)}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[- D_2$; F également.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[- D_2,\ F'(x) = \dfrac{1}{2}\, G'(-x) = \dfrac{1}{2}\, g(-x) = \dfrac{1}{2}\, g(|x|)$.

Posons $\Delta = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$. Δ est une partie finie de $\mathbb{R}$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \Delta$. Ceci achève alors de prouver que :

$$\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\, g(|x|)$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R} - \Delta$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec G'. Ainsi f est une densité de $Y = |X|$.

$$\boxed{f : x \to \frac{1}{2}\, g(|x|) \text{ est une densité de } Y.}$$

2. Oui on peut toujours faire le changement de variable $u = e^{2\,t}$ mais il semble plus raisonnable de remarquer que $t \to -\dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \to e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}$.

Notons que $t \to e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit A un réel. $\displaystyle\int_0^A e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\right]_0^A = -\frac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,A}}{2}} + \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

Alors $\displaystyle\int_A^0 e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,A}}{2}} - \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{c\,e^{2\,A}}{2} = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty} -\frac{c\,e^{2\,A}}{2} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}} + \dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{c}{2}} = \dfrac{1}{c}\cdot$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\,t}\, e^{-\frac{c\,e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{c}\cdot}$$

3. a. Notons Φ la fonction de répartition de X. φ est une densité de X continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$. Rappelons également que $\forall t \in [0, +\infty[,\ P(|X| \leqslant t) = 2\,\Phi(t) - 1$.

Cherchons maintenant la fonction de répartition F_Z de Z.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Z \leqslant x) = P(\ln|X| \leqslant x) = P(|X| \leqslant e^x) = 2\,\Phi(e^x) - 1$.

Φ et $x \to e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition $x \to \Phi(e^x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il est alors de même pour F_Z et ainsi :

$$\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

Z étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F'_Z est une densité de Z.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'_Z(x) = 2\,e^x\,\Phi'(e^x) = 2\,e^x\,\varphi(e^x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2\,x}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2\,x}}{2}}$.

$$\boxed{x \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^x\, e^{-\frac{e^{2\,x}}{2}} \text{ est une densité de } Z.}$$

$$\boxed{x \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-x}\, e^{-\frac{e^{-2\,x}}{2}} \text{ est une densité de } -Z}$$

b. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, e^{x}\, e^{-\frac{e^{2\,x}}{2}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times 0 \times e^{-0} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{x-\frac{e^{2\,x}}{2}}\right) = 0$ et ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors ψ est bornée sur $\mathbb{R}$ (air connu...)

Posons $T = \ln\left|\dfrac{X}{X'}\right| = \ln|X| + \big(-\ln|X'|\big)$.

- X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes donc $\ln|X|$ et $\big(-\ln|X'|\big)$ sont également indépendantes.

- $\ln|X|$ et $\big(\text{-}\ln|X'|\big)$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives ψ et $x \to \psi(-x)$.

- ψ est une densité de $\ln|X|$ et ψ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors T est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, \psi\big(-(x-t)\big)\, \mathrm{d}t$.

Soit x un réel. $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{t}\, e^{-\frac{e^{2\,t}}{2}}\, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-(x-t)}\, e^{-\frac{e^{-2\,(x-t)}}{2}}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\, e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\,t}\, e^{-\frac{(1+e^{-2\,x})\, e^{2\,t}}{2}}\, \mathrm{d}t.$

$1 + e^{-2\,x}$ étant un réel strictement positif nous pouvons utiliser 2 avec $c = 1 + e^{-2\,x}$.

Il vient alors $h(x) = \dfrac{2}{\pi}\, e^{-x}\, \dfrac{1}{1+e^{-2\,x}}\cdot$ Alors $h(x) = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2\,x}} = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{e^{2\,x}\, e^{-x}}{e^{2\,x}\,(1+e^{-2\,x})} = \dfrac{2}{\pi}\, \dfrac{e^{2\,x}}{(e^{2\,x}+1)}\cdot$

$$\boxed{x \to \frac{2}{\pi}\, \frac{e^{2\,x}}{(e^{2\,x}+1)} \text{ est une densité de } \ln\left|\frac{X}{X'}\right|\cdot}$$

c. Notons F_T la fonction de répartition de $T = \ln\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ et F_U la fonction de répartition de $U = \left|\dfrac{X}{X'}\right|\cdot$

Observons que : $U = e^{T}$.

U prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_U(x) = 0$.

Soit x un réel strictement positif. $F_U(x) = P(U \leqslant x) = P(e^{T} \leqslant x) = P(T \leqslant \ln x) = F_T(\ln x)$.

$F_U(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln x} h(t)\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^{t}}{(e^{t})^2+1}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \lim_{A\to-\infty} \big[\arctan(e^{t})\big]_{A}^{\ln x} = \frac{2}{\pi}\, \arctan x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$

Mieux, pour la suite, $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$

F_U est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$. Alors F_U est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$, et F_U est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Ainsi U est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty,0[,\ F'_U(x)=0$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'_U(x)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

Posons $\forall x \in]-\infty,0[,\ f_U(x)=0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ f_U(x)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

f_U est une fonction numérique positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_U sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_U est une densité de U

$$\boxed{\text{La fonction } f_U \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ f_U(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases} \text{ est une densité de } \left|\dfrac{X}{X'}\right|\cdot}$$

Posons $Y=\dfrac{X}{X'}\cdot$

1) $|Y|$ est une variable aléatoire à densité de densité f_U.

2) D'après **1. a** X et $-X$ ont même loi car X est une variable aléatoire à densité admettant une densité φ continue et paire ; ainsi $Y=\dfrac{X}{X'}$ et $-Y=\dfrac{-X}{X'}$ ont même loi.

En appliquant **1. b** on peut dire que Y est une variable aléatoire à densité et que $x \to \dfrac{1}{2} f_U\big(|x|\big)$ en est une densité.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2} f_U\big(|x|\big)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+|x|^2}=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}=f_1(x)$. f_1 est donc une densité de Y. Ainsi

$$\boxed{\dfrac{X}{X'} \text{ est une variable aléatoire à densité qui suit une loi de Cauchy.}}$$
