ECRICOME 2008 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

Désolé mais je ne mettrai pas de flèches sur les vecteurs même sous la torture.

1. Soit v un élément de $\mathbb{R}^3$. Il existe un unique élément (v_1, v_2) de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp$ tel que $v = v_1 + v_2$.

Par définition $p(v) = v_1$ et $q(v) = v_2$ donc $(p+q)(v) = p(v) + q(v) = v_1 + v_2 = v$.

$$\boxed{p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$$

2. (u) est une base orthonormée de $\mathcal{D}$. Le cours donne alors :

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^3,\ p(v) =< v, u >\ u.}$$

Notons que $< i, u >= a$, $< j, u >= b$ et $< k, u >= c$. Ainsi :

$$\boxed{p(i) = a\,u = a\,(a\,i + b\,j + c\,k),\ p(j) = b\,u = b\,(a\,i + b\,j + c\,k) \text{ et } p(k) = c\,u = c\,(a\,i + b\,j + c\,k).}$$

Alors : $P = M_{(i,j,k)}(p) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

$q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ donc $Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}.}$$

3. a. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2-a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix} = -Q$.

$$\boxed{M^2 = -Q.}$$

b. $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

u est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$.

Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 3 - 1 = 2$.

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) \leqslant 2.}$$

$f \circ f = -q$ car $M^2 = -Q$. Ainsi $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im}(-q) = \operatorname{Im} q = \mathcal{D}^\perp$. Alors $\mathcal{D}^\perp = \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Ceci donne en particulier : $2 = \dim \mathcal{D}^\perp = \dim \operatorname{Im} f^2 \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$. Alors $\operatorname{rg} f \geqslant 2$.

Finalement $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 2$.

Alors $\mathcal{D}^\perp \subset \operatorname{Im} f$ et $\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \operatorname{Im} f = 2$ donc $\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp$.

Dans ces conditions $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$. De plus u est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$.

Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u) = \mathcal{D}$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp \text{ et } \operatorname{Ker} f = \mathcal{D}.}$$

c. $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ p(v) \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} f$ donc $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ f\big(p(v)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{f \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.}$$

$f^2 = -q = p - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $f^3 = f \circ p - f = -f$. Ainsi $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$$\boxed{X + X^3 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

d. L'ensemble des valeurs propres de f est contenu dans l'ensemble des zéros de $X + X^3$ dans $\mathbb{R}$ donc 0 est la seule valeur propre possible de f.

Or $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Ainsi f n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } f \text{ et } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4. a Soient θ et θ' deux réels. $g_\theta \circ g_{\theta'} = (\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin\theta\, f + (1-\cos\theta)\, f^2) \circ (\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin\theta'\, f + (1-\cos\theta')\, f^2)$.

$g_\theta \circ g_{\theta'} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin\theta' + \sin\theta)\, f + \big((1-\cos\theta') + \sin\theta\, \sin\theta' + (1-\cos\theta)\big)\, f^2 + \big(\sin\theta\,(1-\cos\theta')\sin\theta + (1-\cos\theta)\, \sin\theta'\big)\, f^3 + (1-\cos\theta)(1-\cos\theta')\, f^4$.

Notons que $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$. Il vient alors :

$g_\theta \circ g_{\theta'} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \big(\sin\theta' + \sin\theta - \sin\theta\,(1-\cos\theta') - (1-\cos\theta)\, \sin\theta'\big)\, f + \big(1 - \cos\theta' + \sin\theta\, \sin\theta' + 1 - \cos\theta - (1 - \cos\theta)(1-\cos\theta')\big)\, f^2 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \big(\sin\theta\, \cos\theta' + \cos\theta\, \sin\theta'\big)\, f + \big(1 - (\cos\theta\, \cos\theta' - \sin\theta\, \sin\theta')\big)\, f^2$.

$g_\theta \circ g_{\theta'} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(\theta+\theta')\, f + \big(1 - \cos(\theta+\theta')\big)\, f^2 = g_{\theta+\theta'}$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall \theta' \in \mathbb{R},\ g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}.}$$

b. Notons que $g_0 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Alors $g_\theta \circ g_{(-\theta)} = g_{\theta+(-\theta)} = g_0 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. De même $g_{(-\theta)} \circ g_\theta = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi :

$$\boxed{g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{(-\theta)}.}$$

EXERCICE 2

1. a. Soit x un réel positif. $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n\,(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}\cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{x}{n^2}$ converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $f_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x, \text{ la série de terme général } f_n(x) \text{ converge.}}$$

b. $F(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$. $F(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{r\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{r} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{r\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = 1.$

$$\boxed{F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}\cdot$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+\,*}$. $f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}\cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $f_n'(x)$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x, \text{ la série de terme général } f_n'(x) \text{ converge.}}$$

3. a. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\,*}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{+\,*},\ \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \dfrac{2}{t^3}\cdot$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soient x et x_0 deux éléments de $[n, +\infty[$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\,\varphi'(x_0)| \leqslant \dfrac{|x - x_0|^2}{2\,!} \underset{t\in[x_0,x] \text{ ou } [x,x_0]}{\operatorname{Max}} |\varphi''(t)|.$

Notons que $\forall t \in [n, +\infty[,\ |\varphi''(t)| = \dfrac{2}{t^3} \leqslant \dfrac{2}{n^3}\cdot$ Alors $\underset{t\in[x_0,x] \text{ou } [x,x_0]}{\operatorname{Max}} |\varphi''(t)| \leqslant \dfrac{2}{n^3}\cdot$

Par conséquent : $|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\,\varphi'(x_0)| \leqslant \dfrac{(x - x_0)^2}{n^3}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x, x_0) \in ([n, +\infty[)^2,\ |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\,\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}\cdot}$$

b. x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x + h \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| = \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x+h} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+x} - h\,\dfrac{1}{(n+x)^2}\right|\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| = |-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + h\,\varphi'(n+x)| = |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\,\varphi'(n+x)|.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| = |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - \big(n+x+h - (n+x)\big)\,\varphi'(n+x)|.$

Or $n + x + h$ et $n + x$ sont deux éléments de $[n, +\infty[$. b. donne alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)| \leqslant \dfrac{(n+x+h-n-x)^2}{n^3} = \dfrac{h^2}{n^3}\cdot$

La convergence de la série de terme général $\dfrac{h^2}{n^3}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)|$.

> Si x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$ alors la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)|$ est convergente.

c. x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{n^3}\cdot$ De plus la série de terme général $f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)$ est absolument convergente et la série de terme général $\dfrac{h^2}{n^3}$ converge. Alors :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \big(f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)\big)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \big|f_n(x+h) - f_n(x) - h\, f_n'(x)\big| \leqslant h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot$$

Les séries de termes généraux $f_n(x+h)$, $f_n(x)$ et $f_n'(x)$ étant convergentes on a encore :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - h \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leqslant h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ ou } |F(x+h) - F(x) - h\, G(x)| \leqslant h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot$$

En divisant par $|h|$ on obtient : $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant |h| \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot$

> Si x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}^+$ alors : $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K\,|h|$ où $K = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot$

d. Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. $\forall h \in]-x, 0[\cup]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K\,|h|$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \big(K\,|h|\big) = 0$.

Alors, par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = G(x)$. Ainsi F est dérivable en x et $F'(x) = G(x)$.

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } F' = G.}$$

4. a. Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$ et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall t \in]0, +\infty[,\ \varphi_x(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\cdot$

$\forall t \in]0, +\infty[,\ \varphi_x(t) = \dfrac{x}{t\,(t+x)}\cdot$ φ_x est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall t \in]0, +\infty[,\ \varphi_x'(t) = -\dfrac{x(2t+x)}{\big(t\,(t+x)\big)^2}\cdot$

$\forall t \in]0, +\infty[,\ \varphi_x'(t) \leqslant 0$. φ_x est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

Ainsi $\forall t \in [k, k+1],\ f_{k+1}(x) = \varphi_x(k+1) \leqslant \varphi_x(t) \leqslant \varphi_x(k) = f_k(x)$.

En intégrant il vient : $f_{k+1}(x) = \displaystyle\int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}t = f_k(x)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x).}$$

b. Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

a. donne : $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

a. donne encore : $\displaystyle\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_1(x).$

Ainsi : $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant f_1(x) + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.$ Or $f_1(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{x+1}\cdot$ Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

c. Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$.

$\displaystyle\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \Big[\ln|t| - \ln|t+x|\Big]_1^n = \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x}\right).$

Notons également que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) = 0.$ Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(1+x).$

On a encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) = \ln(1+x).$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement de b. il vient : $\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x).$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

d. $\forall x \in]1, +\infty[,\ \ln x > 0$ donc $\displaystyle\forall x \in]1, +\infty[,\ \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \leqslant \frac{F(x)}{\ln x} \leqslant \frac{x}{x+1}\,\frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(x+1)}{\ln x}\cdot$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = 1.$

De plus : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\,\frac{1}{\ln x}\right) = 1 \times 0 = 0.$ On obtient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln x} = 1.$ Finalement :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.}$$

PROBLÈME

3. 1. Méthode de Monte-carlo.

1. a. $\boxed{\text{La fonction } f_U \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } U.}$

b. Utilisons le théorème de transfert.

- U prend ses valeurs dans l'intervalle $I = [0,1]$... d'extrémités 0 et 1 ;
- g est définie et continue sur I.

Alors $g(U)$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, f_U(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

En cas d'existence : $E\big(g(U)\big) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\, f_U(t)\, \mathrm{d}t$ donc $E\big(g(U)\big) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\, \mathrm{d}t = J$.

$\forall t \in [0,1],\ |g(t)\, f_U(t)| = |g(t)|$ et $|g|$ est continue sur $[0,1]$. Alors $\displaystyle\int_0^1 |g(t)\, f_U(t)|\, \mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $E\big(g(U)\big)$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, f_U(t)\, \mathrm{d}t$ c'est à dire J.

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } g(U) \text{ admet une espérance égale à } J.}$$

2. Dans la suite **nous supposerons** que σ est positif donc strictement positif...

Tous les variables aléatoires de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ayant même loi, **nous admettrons** qu'il en est de même pour les variables aléatoires de la suite $\big(g(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$

a. Utilisons la loi faible des grands nombres.

• $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes donc $\big(g(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ;

• Toutes les variables aléatoires de la suite $\big(g(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi, possèdent une espérance égale à J et une même variance.

Alors la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{g(U_1) + g(U_2) + \cdots + g(U_n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J.

$$\boxed{\text{La suite de variables aléatoires } \left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } J.}$$

b. i. Utilisons le théorème de la limite centrée.

• $\big(g(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

• Toutes les variables aléatoires de la suite $\big(g(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi, possèdent une espérance égale à J et une variance non nulle égale à σ^2.

Dans ces conditions, la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Il en est alors clairement de même pour la suite $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n}-E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Notons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\,E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}g(U_i)\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}E\left(g(U_i)\right)=\dfrac{1}{n}\,n\,J=J.$

Les variables aléatoires de la suite $\big(g(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant indépendantes on a encore :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ V\left(\dfrac{S_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}\,V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}g(U_i)\right)=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}V\left(g(U_i)\right)=\dfrac{1}{n^2}\,n\,\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{\frac{S_n}{n}-E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}}=\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\cdot$ Finalement :

La suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. Supposons n assez grand. Alors $\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale centrée réduite... Donc :

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ P\left(\left|\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\leqslant\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant\varepsilon\right)=\Phi(\varepsilon)-\Phi(-\varepsilon)=\Phi(\varepsilon)-\big(1-\Phi(\varepsilon)\big)=2\,\Phi(\varepsilon)-1.$

En particulier : $P\left(\left|\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant 1,96\right)=2\,\Phi(1,96)-1=2\times 0,975-1=0,95.$ Notons alors que :

$$P\left(\left|\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant 1,96\right)=P\left(-1,96\leqslant\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant 1,96\right)=P\left(\dfrac{S_n}{n}-1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant J\leqslant\dfrac{S_n}{n}+1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi $P\left(\dfrac{S_n}{n}-1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant J\leqslant\dfrac{S_n}{n}+1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0,95.$

$\left[\dfrac{S_n}{n}-1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\dfrac{S_n}{n}+1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95 %.

3. a sin définit une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ et (strictement) croissante.

Ceci justifie largement le changement de variable $t=\sin u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 u\,\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))\,\mathrm{d}t=2\left[u+\frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=2\times\frac{\pi}{2}=\pi.$$

$$\boxed{\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\pi.}$$

b. i. Rien à signaler.

```
function G(t:real):real;
begin
G:=4*sqrt(1-t*t);
end;
```

ii. Notons qu'ici la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $J=\pi$.

Notons aussi que l'on nous demande simplement de simuler la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}\cdot$

```
begin
 randomize;
 write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
 J:=0;
 for i:= 1 to n do J:=J+G(random);
 J:=J/n;
 writeln('Une valeur approche de pi est : ',J);
end.
```

3. 2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Posons $T=1-U$. T est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Notons F_T sa fonction de répartition et F_U celle de U.

$\forall x\in]-\infty,0],\ F_T(x)=0$ et $\forall x\in[1,+\infty[,\ F_T(x)=1$. Soit x un élément de $[0,1[$. Notons que $1-x\in[0,1]$. Ainsi :

$F_T(x)=P(1-U\leqslant x)=P(1-x\leqslant U)=1-P(U<1-x)=1-P(U\leqslant 1-x)=1-F_U(1-x)=1-(1-x)=x.$

Finalement $\forall x\in]-\infty,0],\ F_T(x)=0$, $\forall x\in[0,1[,\ F_T(x)=x$ et $\forall x\in[1,+\infty[,\ F_T(x)=1$.

Donc T suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

$$\boxed{1-U \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1].}$$

Dans ces conditions U et $1-U$ ont même loi. Il en est alors de même pour $g(U)$ et $g(1-U)$.

Par conséquent $g(1-U)$ possède une espérance qui vaut J.

Alors $Y=\dfrac{1}{2}\Big[g(U)+g(1-U)\Big]$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{2}\Big[E\big[g(1-U)\big]+E\big[g(U)\big]\Big]$ donc J.

$$\boxed{E(Y)=J.}$$

2. a. Soit u et w deux éléments de $[0,1]$. g est (strictement) croissante sur $[0,1]$ donc $g(u)-g(w)$ est du signe de $u-w$ et $g(1-u)-g(1-w)$ est du signe de $(1-u)-(1-w)$ donc du signe de $-(u-w)$.

Alors $g(u)-g(w)$ et $g(1-u)-g(1-w)$ sont de signes opposés. Donc $\big(g(u)-g(w)\big)\big(g(1-u)-g(1-w)\big)\leqslant 0$.

$$\boxed{\forall(u,w)\in[0,1]^2,\ \big(g(u)-g(w)\big)\big(g(1-u)-g(1-w)\big)\leqslant 0.}$$

► *Remarque Ceci vaut encore si g est (strictement) décroissante.*

b. *Version light* U et W prennent leurs valeurs dans $[0,1]$.

Donc d'après ce qui précède $\forall\omega\in\Omega,\ \big(g(U(\omega))-g(W(\omega))\big)\big(g(1-U(\omega))-g(1-W(\omega))\big)\leqslant 0$.

Ceci donne : $\big(g(U)-g(W)\big)\big(g(1-U)-g(1-W)\big)\leqslant 0$.

La croissance de l'espérance donne alors $E\left[\big(g(U)-g(W)\big)\big(g(1-U)-g(1-W)\big)\right]\leqslant 0$.

Seconde version U et W prennent presque sûrement leurs valeurs dans $[0,1]$.

Notons S l'événement $\{U\in[0,1]\}\cap\{W\in[0,1]\}$ et S' l'événement $\{\big(g(U)-g(W)\big)\big(g(1-U)-g(1-W)\big)\leqslant 0\}$.

D'après ce qui précède $\forall\omega\in S,\ \big(g(U(\omega))-g(W(\omega))\big)\big(g(1-U(\omega))-g(1-W(\omega))\big)\leqslant 0$.

Ainsi $S \subset S'$ donc $P(S) \leqslant P(S')$.

Par indépendance : $P(S) = P\big(\{U \in [0,1]\} \cap \{W \in [0,1]\}\big) = P(U \in [0,1])\, P(W \in [0,1]) = 1 \times 1 = 1$.

Par conséquent $1 = P(S) \leqslant P(S') \leqslant 1$, donc $P(S') = 1$.

Alors presque sûrement $\big(g(U) - g(W)\big)\big(g(1-U) - g(1-W)\big)$ prend des valeurs négatives ou nulles.

Grace au cours on retrouve ainsi :

$$\boxed{E\left[\big(g(U) - g(W)\big)\big(g(1-U) - g(1-W)\big)\right] \leqslant 0.}$$

Dans ces conditions, par linéarité de l'espérance et grace à l'espérance (! !) de l'existence de toutes les espérances (... voir plus bas) on a :

$E\big(g(U)\, g(1-U)\big) - E\big(g(U)\, g(1-W)\big) - E\big(g(W)\, g(1-U)\big) + E\big(g(W)\, g(1-W)\big) \leqslant 0.$

U et W sont indépendantes donc U et $1-W$ le sont également. Alors $g(U)$ et $g(1-W)$ sont indépendantes.

De plus U et $1-W$ ont même loi donc $g(U)$ et $g(1-W)$ aussi. Alors $E\big(g(1-W)\big)$ existe et vaut $E\big(g(U)\big)$.

Ce qui précède donne alors : $E\big(g(U)\, g(1-W)\big) = E\big(g(U)\big)\, E\big(g(1-W)\big) = \big(E\big(g(U)\big)\big)^2$.

On montre de même que : $E\big(g(W)\, g(1-U)\big) = \big(E\big(g(U)\big)\big)^2$.

U et W ayant même loi il en est de même de $g(U)\, g(1-U)$ et de $g(W)\, g(1-W)$.

Alors $E\big(g(U)\, g(1-U)\big) = E\big(g(W)\, g(1-W)\big)$.

Dans ces conditions l'inégalité $E\big(g(U)\, g(1-U)\big) - E\big(g(U)\, g(1-W)\big) - E\big(g(W)\, g(1-U)\big) + E\big(g(W)\, g(1-W)\big) \leqslant 0$ devient : $2\, E\big(g(U)\, g(1-U)\big) - 2\, \big(E\big(g(U)\big)\big)^2 \leqslant 0$. Finalement :

$$\boxed{E\big[g(U)\, g(1-U)\big] \leqslant \big(E\big[g(U)\big]\big)^2.}$$

► *Remarque* *Un peu d'existence...*

Posons $\forall x \in [0,1], \breve{g}(x) = g(x)\, g(1-x)$. $\breve{g}$ *est continue sur* $[0,1]$. *On montre alors comme dans 3.1.1 que* $E\big(\breve{g}(U)\big)$ *existe.*

Ainsi $E\big(g(U)\, g(1-U)\big)$ *existe. Alors* $E\big(g(W)\, g(1-W)\big)$ *existe également car* $\breve{g}(U)$ *et* $\breve{g}(W)$ *ont même loi puisque* U *et* W *ont même loi.*

$g(U)$ *et* $g(1-W)$ *ont même loi sont indépendantes et possèdent la même espérance. Ceci suffit pour dire que* $E\big(g(U)\, g(1-W)\big)$ *existe (et vaut* $\big(E\big(g(U)\big)\big)^2$*). De même* $E\big(g(W)\, g(1-U)\big)$ *existe (et vaut* $\big(E\big(g(U)\big)\big)^2$*).*

Ceci donne alors l'existence de $E\left[\big(g(U) - g(W)\big)\big(g(1-U) - g(1-W)\big)\right]$ *et permet de dire que cette espérance vaut :* $E\big(g(U)\, g(1-U)\big) - E\big(g(U)\, g(1-W)\big) - E\big(g(W)\, g(1-U)\big) + E\big(g(W)\, g(1-W)\big)$*, non ?)*

c. $Y - E(Y) = \dfrac{1}{2}\Big[\big(g(U) - J\big) + \big(g(1-U) - J\big)\Big]$. Alors :

$\big(Y - E(Y)\big)^2 = \dfrac{1}{4}\Big[\big(g(U) - J\big)^2 + \big(g(1-U) - J\big)^2 + 2\,\big(g(U) - J\big)\,\big(g(1-U) - J\big)\Big]$.

$\big(Y - E(Y)\big)^2 = \dfrac{1}{4}\Big[\big(g(U) - E\big(g(U)\big)\big)^2 + \big(g(1-U) - E\big(g(1-U)\big)\big)^2 + 2\, g(U)\, g(1-U) - 2\, J\, g(U) - 2\, J\, g(1-U) + 2\, J^2\Big]$.

$\big(g(U) - E\big(g(U)\big)\big)^2$ et $\big(g(1-U) - E\big(g(1-U)\big)\big)^2$ possèdent une espérance qui vaut σ^2.

$g(U)$ et $g(1-U)$ possèdent une espérance qui vaut J.

Notons pour finir que $g(U)\, g(1-U)$ possède également une espérance.

Alors $\big(Y - E(Y)\big)^2$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{4}\Big[\sigma^2 + \sigma^2 + 2\,E\big(g(U)\,g(1-U)\big) - 2\,J^2 - 2\,J^2 + 2\,J^2\Big]$.

Donc Y possède une variance qui vaut $\dfrac{1}{2}\Big[\sigma^2 + E\big(g(U)\,g(1-U)\big) - J^2\Big]$.

Alors d'après b, $V(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big[\sigma^2 + \big(E\big(g(U)\big)\big)^2 - J^2\Big] = \dfrac{1}{2}\,\sigma^2 = \dfrac{1}{2}\,V\big(g(U)\big)$. Finalement :

$$\boxed{Y \text{ possède une variance et } V(Y) \leqslant \frac{1}{2}\,V\big(g(U)\big).}$$

3. Reprenons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \dfrac{1}{2}\Big(g(U_n) + g(1-U_n)\Big)$.

Considérons la fonction $\widehat{g} : x \to \dfrac{1}{2}\Big(g(x) + g(1-x)\Big)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \widehat{g}(U_n)$.

► *Remarque A partir d'ici nous pourrions passer directement à la conclusion. En effet $\widehat{g}$ étant définie et continue sur $[0,1]$ nous pouvons utiliser 3.1.2.b.ii. en remplaçant g par $\widehat{g}$. L'intervalle de confiance est alors celui de 3.1.2.b.ii. en remplaçant σ par σ'.*

Pour les incrédules, ramons ! Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n a même loi que Y. En particulier pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n possède une espérance qui vaut J et une variance qui vaut $V(Y)$.

Dans la suite nous poserons $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$ et **nous supposerons** σ' non nul (ce n'est pas le cas lorsque $\forall x \in [0,1],\ g(x) = x$...).

• $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes donc $\big(\widehat{g}(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

• Toutes les variables aléatoires de la suite $\big(\widehat{g}(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi, possèdent une espérance égale à J et une variance égale à σ'^2.

Dans ces conditions, la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S'_n}{n} - E\left(\frac{S'_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S'_n}{n}\right)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Un calcul simple donne $E\left(\dfrac{S'_n}{n}\right) = J$ et $\sqrt{V\left(\dfrac{S'_n}{n}\right)} = \dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}$.

Alors la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S'_n}{n} - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Ici encore nous supposerons que pour n assez grand $\dfrac{\frac{S'_n}{n} - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale centrée réduite.

On montre alors comme dans 3.1.2 que $P\left(\left|\dfrac{\frac{S'_n}{n} - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right| \leqslant 1,96\right) = 2\,\Phi(1,96) - 1 = 0,95$ et que

$P\left(\left|\dfrac{\frac{S'_n}{n} - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right| \leqslant 1,96\right) = P\left(\dfrac{S'_n}{n} - 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leqslant J \leqslant \dfrac{S'_n}{n} + 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right)$ tout ceci pour n assez grand.

Ainsi $P\left(\dfrac{S'_n}{n} - 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leqslant J \leqslant \dfrac{S'_n}{n} + 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$ pour n assez grand.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Big(g(U_i) + g(1-U_i)\Big)$ et $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$. Pour n assez grand $\left[\dfrac{S'_n}{n} - 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \dfrac{S'_n}{n} + 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95 %.

$l_n = 2 \times 1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et le nouvel intervalle de confiance a pour longueur $l'_n = 2 \times 1,96\,\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}\cdot$

Pour avoir $l'_N = l_n$ il faut et il suffit que $N = n\,\dfrac{{\sigma'}^2}{\sigma^2}$! Oublions un peu la question (il semble difficile de trouver un N solution surtout lorsque l'on ne connaît ni σ ni σ' et que l'on veut N entier).

Contentons nous de dire que $l'_N \leqslant l_n$ si et seulement si $N \geqslant n\,\dfrac{{\sigma'}^2}{\sigma^2}\cdot$ Remarquons alors que $\dfrac{{\sigma'}^2}{\sigma^2} = \dfrac{V(Y)}{V\big(g(U)\big)} \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$

Donc dès que $N \geqslant \dfrac{n}{2}$, on a $N \geqslant n\,\dfrac{{\sigma'}^2}{\sigma^2}$ et $l'_N \leqslant l_n$.

Avec cette nouvelle méthode, il suffit donc de faire $\text{Ent}\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ tirages de la variable aléatoire uniforme pour obtenir un intervalle de confiance de longueur au plus ℓ_n.

3. 3. Réduction de la variance par stratification.

3. 3. 1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

1. f est une fonction rationnelle (ou la restriction à $(]0,+\infty[)^3$ d'une fonction rationnelle...) donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0,+\infty[)^3.}$$

Sans difficulté on obtient :

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{4x_1^2},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{x_2^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{9x_3^2}\cdot}$$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2x_1^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_2^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{9x_3^3}\cdot}$$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = 0.}$$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = 0.}$$

2. Ce qui précède donne :

$$\boxed{\forall A = (a_1,a_2,a_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2x_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{x_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{9x_3^3} \end{pmatrix}.}$$

Soit $A = (a_1,a_2,a_3)$ un élément de $(]0,+\infty[)^3$ et soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Un calcul simple donne : ${}^t H\nabla^2 f(A)H = \dfrac{h_1^2}{2a_1^3} + \dfrac{h_2^2}{a_2^3} + \dfrac{2\,h_3^2}{9a_3^3}$. Alors ${}^t H\nabla^2 f(A)H \geqslant 0$ car $\dfrac{h_1^2}{2a_1^3}$, $\dfrac{h_2^2}{a_2^3}$ et $\dfrac{2\,h_3^2}{9a_3^3}$ sont positifs.

Mieux, comme H n'est pas nulle, l'un de ces trois réels est strictement positif et ainsi ${}^t H\nabla^2 f(A)H > 0$.

$$\boxed{\forall A \in (]0,+\infty[)^3,\ \forall H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\},\ {}^t H\nabla^2 f(A)H > 0.}$$

De toute évidence on a aussi :

$$\boxed{\forall X \in (]0,+\infty[)^3,\ \forall H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^t H\nabla^2 f(X)H \geqslant 0, \text{ non ?}}$$

3. $(]0,+\infty[)^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ comme produit de trois ouverts de $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(]0,+\infty[)^3$.

Ainsi si f admet en un point $A = (a_1, a_2, a_3)$ de $(]0,+\infty[)^3$ un extremum, alors le gradient de f en A s'annule donc $\left(-\dfrac{1}{4a_1^2}, -\dfrac{1}{a_2^2}, -\dfrac{1}{9a_3^2}\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$. C'est hautement improbable !

$$\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum sur } (]0,+\infty[)^3.}$$

4. Posons $\mathcal{C} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 110\}$ et $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ h(X) = x_1 + x_2 + x_3$.

Notons que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et que : $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ \nabla h(X) = (1, 1, 1)$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(]0,+\infty[)^3$ et h est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Le cours indique alors que si f admet en un point A un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors $\nabla f(A)$ appartient à l'orthogonal de $\operatorname{Ker} h$.

Rappelons que $(\operatorname{Ker} h)^\perp$ est encore $\operatorname{Vect}(\nabla h(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Donc $(\operatorname{Ker} h)^\perp = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$.

Cherchons alors les points A de $\mathcal{C} \cap (]0,+\infty[)^3$ tels que $\nabla f(A)$ appartienne à $\operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$, c'est à dire les points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

• Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$A \in (]0,+\infty[)^3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 110$ et $\nabla f(A) \in \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$.

$\nabla f(A) = \left(-\dfrac{1}{4a_1^2}, -\dfrac{1}{a_2^2}, -\dfrac{1}{9a_3^2}\right) \in \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$. Donc $-\dfrac{1}{4a_1^2} = -\dfrac{1}{a_2^2} = -\dfrac{1}{9a_3^2}$.

Ceci donne $4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2$ puis $2a_1 = a_2 = 3a_3$ car a_1, a_2 et a_3 sont positifs.

Alors $110 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 2a_1 + \dfrac{2}{3}a_1 = \dfrac{11}{3}\,a_1$. Ainsi $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ et $a_3 = 20$. Finalement $A = (30, 60, 20)$.

• Réciproquement posons $A = (30, 60, 20)$. A appartient à $(]0,+\infty[)^3$. $30 + 60 + 20 = 110$ donc A appartient à $\mathcal{C}$.

De plus $\nabla f(A) = \left(-\dfrac{1}{4 \times 30^2}, -\dfrac{1}{60^2}, -\dfrac{1}{9 \times 20^2}\right) = \left(-\dfrac{1}{3600}, -\dfrac{1}{3600}, -\dfrac{1}{3600}\right) \in \operatorname{Vect}((1, 1, 1)) = (\operatorname{Ker} h)^\perp$.

Donc $A = (30, 60, 20)$ est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$$\boxed{A = (30, 60, 20) \text{ est l'unique point critique de } f \text{ sous la contrainte } \mathcal{C}.}$$

Soit X un élément de $(]0,+\infty[)^3 \cap \mathcal{C}$. Montrons que $f(X) \geqslant f(A)$. Posons $H = X - A$. $X = H + A$.

Attention ici H est un élément de $\mathbb{R}^3$.

Commençons par montrer que $[A, A + H] = [A, X]$ est dans $(]0,+\infty[)^3$.

Soit Y un élément de $[A, X]$. Il existe un réel λ appartenant à $[0, 1]$ tel que $Y = \lambda\, A + (1 - \lambda)\, X$.

Les composantes de A et X sont strictement positives et les réels λ et $1-\lambda$ sont positifs ou nuls sans être simultanément nuls. Alors les composantes de Y sont strictement positives. Y est donc un élément de $(]0,+\infty[)^3$.

$[A, A+H]$ est contenu dans $(]0,+\infty[)^3$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(]0,+\infty[)^3$.

Notons q_A la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice symétrique $\nabla^2 f(A)$.

La formule de Taylor appliquée à f à l'ordre 1 montre qu'il existe un élément θ de $]0,1[$ tel que :

$f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \dfrac{1}{2}\, q_{A+\theta\, H}(H)$.

A et X sont dans $\mathcal{C}$ donc $h(H) = h(X) - h(A) = 110 - 110 = 0$. Alors H appartient à $\operatorname{Ker} h$. Or $\nabla f(A) \in (\operatorname{Ker} h)^{\perp}$.

Alors $< \nabla f(A), H >= 0$ et ainsi $f(X) = f(A+H) = f(A) + \dfrac{1}{2}\, q_{A+\theta\, H}(H)$.

En posant $H = (h_1, h_2, h_3)$ on a $f(X) - f(A) = \dfrac{1}{2}\, q_{A+\theta\, H}(H) = \dfrac{1}{2}\,(h_1\, h_2\, h_3)\nabla^2 f(A+\theta\, H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

En utilisant 2. on obtient alors $f(X) - f(A) = \dfrac{1}{2}\,(h_1\, h_2\, h_3)\nabla^2 f(A+\theta\, H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \geqslant 0$.

Ainsi $\forall X \in (]0,+\infty[)^3 \cap \mathcal{C},\ f(X) \geqslant f(A)$.

$$\boxed{f \text{ admet en } A = (30, 60, 20) \text{ un minimum global sous la contrainte } \mathcal{C} \text{ qui vaut } \dfrac{11}{360}.}$$

3. 3. 2. Méthode de stratification.

1. $\big(\{T \in I_1\}, \{T \in I_2\}, \{T \in I_3\}\big)$ est un système complet (ou quasi-complet) d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P\big(g(\widetilde{U}) \leqslant x\big) = P\big(\{T \in I_1\} \cap \{g(\widetilde{U}) \leqslant x\}\big) + P\big(\{T \in I_2\} \cap \{g(\widetilde{U}) \leqslant x\}\big) + P\big(\{T \in I_3\} \cap \{g(\widetilde{U}) \leqslant x\}\big)$. Alors :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P\big(g(\widetilde{U}) \leqslant x\big) = P\big(\{T \in I_1\} \cap \{g(U_1) \leqslant x\}\big) + P\big(\{T \in I_2\} \cap \{g(U_2) \leqslant x\}\big) + P\big(\{T \in I_3\} \cap \{g(U_3) \leqslant x\}\big)$.

Rappelons que les variables aléatoires T, U_1, U_2 et U_3 sont indépendantes.

Alors les variables aléatoires T, $g(U_1)$, $g(U_2)$ et $g(U_3)$ le sont également. Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P\big(g(\widetilde{U}) \leqslant x\big) = P(T \in I_1)\, P\big(g(U_1) \leqslant x\big) + P(T \in I_2)\, P\big(g(U_2) \leqslant x\big) + P(T \in I_3)\, P\big(g(U_3) \leqslant x\big)$.

T suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et $0 < a < b < 1$. Alors :

$P(T \in I_1) = P(0 \leqslant T < a) = a$, $P(T \in I_2) = P(a \leqslant T < b) = b - a$ et $P(T \in I_3) = P(b \leqslant T \leqslant 1) = 1 - b$.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P\big(g(\widetilde{U}) \leqslant x\big) = a\, P\big(g(U_1) \leqslant x\big) + (b-a)\, P\big(g(U_2) \leqslant x\big) + (1-b)\, P\big(g(U_3) \leqslant x\big).}$$

Soient $F_{g(U_1)}$, $F_{g(U_1)}$, $F_{g(U_1)}$ et $F_{g(\widetilde{U})}$ les fonctions de répartition respectives de $g(U_1)$, $g(U_2)$, $g(U_3)$ et $g(\widetilde{U})$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{g(\widetilde{U})}(x) = a\, F_{g(U_1)}(x) + (b-a)\, F_{g(U_2)}(x) + (1-b)\, F_{g(U_3)}(x)$.

$F_{g(U_1)}$, $F_{g(U_1)}$ et $F_{g(U_1)}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, par combinaison linéaire, $F_{g(\widetilde{U})}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soient $f_{g(U_1)}$, $f_{g(U_1)}$ et $f_{g(U_1)}$ des densités respectives de $g(U_1)$, $g(U_2)$ et $g(U_3)$ définies sur $\mathbb{R}$.

$f_{g(U_1)}$, $f_{g(U_1)}$ et $f_{g(U_1)}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors on peut trouver une partie finie D de $\mathbb{R}$ telle que $f_{g(U_1)}$, $f_{g(U_1)}$ et $f_{g(U_1)}$ soient toutes les trois continues sur $\mathbb{R} - D$.

Dans ces conditions $F_{g(U_1)}$, $F_{g(U_1)}$ et $F_{g(U_1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} - D,\ F'_{g(U_1)}(x) = f_{g(U_1)}(x),\ F'_{g(U_2)}(x) = f_{g(U_2)}(x)$ et $F'_{g(U_3)}(x) = f_{g(U_3)}(x)$.

Alors $F_{g(\widetilde{U})}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$ où D est finie et continue sur $\mathbb{R}$. $g(\widetilde{U})$ est donc une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}-D,\ F'_{g(\widetilde{U})}(x) = a\, F'_{g(U_1)}(x)+(b-a)\, F'_{g(U_2)}(x)+(1-b)\, F'_{g(U_3)}(x) = a\, f_{g(U_1)}(x)+(b-a)\, f_{g(U_2)}(x)+(1-b)\, f_{g(U_3)}(x)$.

$a\, f_{g(U_1)} + (b-a)\, f_{g(U_2)} + (1-b)\, f_{g(U_3)}$ est une fonction définie et positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $F'_{g(\widetilde{U})}$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. C'est donc une densité de $g(\widetilde{U})$.

> Soient $f_{g(U_1)}$, $f_{g(U_1)}$ et $f_{g(U_1)}$ des densités respectives de $g(U_1)$, $g(U_2)$ et $g(U_3)$, définies sur $\mathbb{R}$.
>
> $g(\widetilde{U})$ est une variable alétaoire à densité admettant pour densité la fonction
>
> $$f_{g(\widetilde{U})} = a\, f_{g(U_1)} + (b-a)\, f_{g(U_2)} + (1-b)\, f_{g(U_3)}.$$

Supposons que : $\forall x \in [0,1],\ g(x) = x$. Alors $g(\widetilde{U}) = \widetilde{U}$, $g(U_1) = U_1$, $g(U_2) = U_2$ et $g(U_3) = U_3$.

$g(U_1)$, $g(U_2)$ et $g(U_3)$ sont bien des variables aléatoires à densité. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{U_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [0,a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{U_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{U_3}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-b} & \text{si } x \in [b,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout i dans $[\![1,3]\!]$, f_{U_i} est une densité de U_i ou de $g(U_i)$.

D'après ce précède $g(\widetilde{U})$ donc $\widetilde{U}$ est une variable aléatoire à densité admettant $a\, f_{U_1} + (b-a)\, f_{U_2} + (1-b)\, f_{U_3}$ pour densité.

Posons $f_{\widetilde{U}} = a\, f_{U_1} + (b-a)\, f_{U_2} + (1-b)\, f_{U_3}$.

$\forall x \in [0,a[,\ f_{\widetilde{U}}(x) = a\, f_{U_1}(x) + (b-a)\, f_{U_2}(x) + (1-b)\, f_{U_3}(x) = a\,\dfrac{1}{a} + (b-a)\times 0 + (1-b)\times 0 = 1.$

On montre de même que $\forall x \in [a,b[,\ f_{\widetilde{U}}(x) = 1$ et que $\forall x \in [b,1],\ f_{\widetilde{U}}(x) = 1$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R} - [0,1],\ f_{\widetilde{U}}(x) = a\times 0 + (b-a)\times 0 + (1-b)\times 0 = 0$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\widetilde{U}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi :

$$\boxed{\widetilde{U} \text{ suit une (la) loi uniforme sur } [0,1].}$$

2. U_1 prend ses valeurs dans $I_1 = [0,a[$ et g est continue sur cet intervalle. Alors le théorème de transfert montre que $g(U_1)$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^a g(t)\, f_{U_1}(t)\, dt$ est absolument convergente.

Ceci est clair car $\forall t \in [0,a[,\ |g(t)\, f_{U_1}(t)| = \dfrac{1}{a}\big|g(t)\big|$ et $|g|$ est continue sur $[0,1]$ (oui sur $[0,1]$!)

Finalement $E\big(g(U_1)\big)$ possède une espérance. On montre de même que $E\big(g(U_2)\big)$ et $E\big(g(U_3)\big)$ existent.

Ce qui précède donne aussi l'existence des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(U_1)}(t)\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(U_2)}(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(U_3)}(t)\, \mathrm{d}t$.

Or $\forall t \in \mathbb{R},\ t\, f_{g(\widetilde{U})}(t) = a\, t\, f_{g(U_1)}(t) + (b-a)\, t\, f_{g(U_2)}(t) + (1-b)\, t\, f_{g(U_3)}(t)$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(\widetilde{U})}(t)\, \mathrm{d}t$ existe et vaut : $a \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(U_1)}(t)\, \mathrm{d}t + (b-a) \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(U_2)}(t)\, \mathrm{d}t + (1-b) \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(U_3)}(t)\, \mathrm{d}t$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{g(\widetilde{U})}(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut : $a\,E\big(g(U_1)\big)+(b-a)\,E\big(g(U_2)\big)+(1-b)\,E\big(g(U_3)\big)$. Par conséquent :

$$\boxed{g(\widetilde{U}) \text{ possède une espérance qui vaut } a\,E\big(g(U_1)\big)+(b-a)\,E\big(g(U_2)\big)+(1-b)\,E\big(g(U_3)\big).}$$

3. Les variables aléatoires de la suite $(U_{1,1},\dots,U_{1,n_1},U_{2,1},\dots,U_{2,n_2},U_{3,1},\dots,U_{3,n_3})$ étant indépendantes il en est de même de celles de la suite $\big(g(U_{1,1}),\dots,g(U_{1,n_1}),g(U_{2,1}),\dots,g(U_{2,n_2}),g(U_{3,1}),\dots,g(U_{3,n_3})\big)$. De plus les variables aléatoires de cette suite possèdent une variance. Alors Z possède une variance et :

$V(Z)=\left(a\,\dfrac{1}{n_1}\right)^2\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}V\big(g(U_{1,i})\big)+\left((b-a)\,\dfrac{1}{n_2}\right)^2\sum_{i=1}^{n_2}V\big(g(U_{2,i})\big)+\left((1-b)\,\dfrac{1}{n_3}\right)^2\sum_{i=1}^{n_3}V\big(g(U_{3,i})\big)$. Notons que :

$\forall i\in[\![1,n_1]\!],\ V\big(g(U_{1,i})\big)=V\big(g(U_1)\big)$, $\forall i\in[\![1,n_2]\!],\ V\big(g(U_{2,i})\big)=V\big(g(U_2)\big)$ et $\forall i\in[\![1,n_3]\!],\ V\big(g(U_{3,i})\big)=V\big(g(U_3)\big)$.

Alors $V(Z)=\left(a\,\dfrac{1}{n_1}\right)^2 n_1\,V\big(g(U_1)\big)+\left((b-a)\,\dfrac{1}{n_2}\right)^2 n_2\,V\big(g(U_2)\big)+\left((1-b)\,\dfrac{1}{n_3}\right)^2 n_3\,V\big(g(U_3)\big)$. Finalement

$$\boxed{Z \text{ possède une variance et } V(Z)=a^2\,\frac{1}{n_1}\,V\big(g(U_1)\big)+(b-a)^2\,\frac{1}{n_2}\,V\big(g(U_2)\big)+(1-b)^2\,\frac{1}{n_3}\,V\big(g(U_3)\big).}$$

4. Dans ces conditions $V(Z)=\dfrac{1}{4\,n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{9\,n_3}\cdot$

On cherche donc (n_1,n_2,n_3) dans $(\mathbb{N}^*)^3$ tel que $n_1+n_2+n_3=110$ et tel que $V(Z)$ soit minimum.

3.3.1 indique que (30,60,20) est le seul triplet qui convient.

Remarquons alors que : $E(Z)=\left(a\,\dfrac{1}{n_1}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}E\big(g(U_{1,i})\big)+\left((b-a)\,\dfrac{1}{n_2}\right)\sum_{i=1}^{n_2}E\big(g(U_{2,i})\big)+\left((1-b)\,\dfrac{1}{n_3}\right)\sum_{i=1}^{n_3}E\big(g(U_{3,i})\big)$.

Notons que :

$\forall i\in[\![1,n_1]\!],\ E\big(g(U_{1,i})\big)=E\big(g(U_1)\big)$, $\forall i\in[\![1,n_2]\!],\ E\big(g(U_{2,i})\big)=E\big(g(U_2)\big)$ et $\forall i\in[\![1,n_3]\!],\ E\big(g(U_{3,i})\big)=E\big(g(U_3)\big)$.

Alors $E(Z)=\left(a\,\dfrac{1}{n_1}\right) n_1\,E\big(g(U_1)\big)+\left((b-a)\,\dfrac{1}{n_2}\right) n_2\,E\big(g(U_2)\big)+\left((1-b)\,\dfrac{1}{n_3}\right) n_3\,E\big(g(U_3)\big)$.

Donc $E(Z)=a\,E\big(g(U_1)\big)+(b-a)\,E\big(g(U_2)\big)+(1-b)\,E\big(g(U_3)\big)=E\big(g(\widetilde{U})\big)$. Finalement : $E(Z)=E\big(g(\widetilde{U})\big)$.

Or $\widetilde{U}$ a même loi que U donc $g(\widetilde{U})$ a même loi que $g(U)$ et ainsi $E\big(g(\widetilde{U})\big)=E\big(g(U)\big)=J$.

$$\boxed{E(Z)=J.}$$

Pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J (? ?) avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode il convient de donner à n_1, n_2, n_3 les valeurs 30, 60 et 20.