ECRICOME 2011 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

1. (a) Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k donc $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille d'éléments de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Mieux c'est une famille de polynômes non nuls de E de degrés échelonnés.

Ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de E de cardinal $n+1$ et E est de dimension $n+1$. C'est donc une base de E.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base de } E.}$$

(b) • $P_1(X) = X$ donc $P_1'(X) = 1$. Alors $P_1'(X+1) = 1 = P_0(X) = P_{1-1}(X)$.

• Soit k un élément de $[\![2,n]\!]$. $P_k(X) = \dfrac{1}{k!}\, X\,(X-k)^{k-1}$ donc $P_k'(X) = \dfrac{1}{k!}\,(X-k)^{k-1} + \dfrac{1}{k!}\, X\,(k-1)(X-k)^{k-2}$.

$P_k'(X) = \dfrac{1}{k!}\,(X-k)^{k-2}\Big(X - k + (k-1)\,X\Big) = \dfrac{1}{k!}\,(X-k)^{k-2}\,(k\,X - k) = \dfrac{k}{k!}\,(X-1)\,(X-k)^{k-2}$.

$P_k'(X) = \dfrac{1}{(k-1)!}\,(X-1)\,(X-k)^{k-2}$.

Alors $P_k'(X+1) = \dfrac{1}{(k-1)!}\, X\,(X+1-k)^{k-2} = \dfrac{1}{(k-1)!}\, X\,(X-(k-1))^{k-2} = P_{k-1}(X)$. Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ appartenant à } \{1,2,\dots,n\}, \text{ on a} : P_k'(X+1) = P_{k-1}(X).}$$

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. Montrons que $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$. C'est plus que ce que demande le texte mais c'est utile pour le (c) et pour Q3 b)...

La propriété est vraie pour $j=0$ car $P_k^{(0)}(X) = P_k(X) = P_{k-0}(X-0)$.

Supposons la propriété vraie pour un élément j de $[\![0,k-1]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

L'hypothèse de récurrence donne $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$. En dérivant on obtient : $P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-j}'(X-j)$.

$P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-j}'(X-j) = P_{k-j}'(X-(j+1)+1) = P_{(k-j)-1}(X-(j+1)$ car $k-j \geqslant 1$.

Ainsi $P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-(j+1)}(X-(j+1)$. La propriété est donc vraie pour $j+1$ ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tous les entiers } k \text{ et } j \text{ vérifiant } \mathbf{0} \leqslant j \leqslant k \leqslant n \text{ on a} : P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j).}$$

Remarque Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. $\deg P_k = k$ donc $\boxed{\forall j \in [\![k+1,+\infty[\![,\ P_k^{(j)} = 0_E.}$

(c) Soit P un élément de E. $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E donc il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de réels tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, P_k$.

Soit j un élément de $[\![0,n]\!]$. $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, P_k$ donc $P^{(j)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, P_k^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k\, P_k^{(j)}$ (d'après la remarque).

Le dernier résultat du (b) donne alors $P^{(j)}(X) = \displaystyle\sum_{k=j}^{n} a_k\, P_{k-j}(X-j)$.

• Supposons que $j < n$. $P^{(j)}(X) = a_j\,P_0(X-j) + \sum_{k=j+1}^{n} a_k\,P_{k-j}(X-j)$.

Ainsi $P^{(j)}(j) = a_j\,P_0(j-j) + \sum_{k=j+1}^{n} a_k\,P_{k-j}(j-j) = a_j\,P_0(0) + \sum_{k=j+1}^{n} a_k\,P_{k-j}(0) = a_j + \sum_{k=j+1}^{n} a_k\,P_{k-j}(0)$.

Or P_1, P_2, ..., P_n admettent 0 pour racine. Donc pour tout k dans $[\![j+1, n]\!]$, $P_{k-j}(0) = 0$. Alors $P^{(j)}(j) = a_j$.

• Supposons maintenant que $j = n$. $P^{(n)}(X) = a_n\,P_0(X-n) = a_n \times 1 = a_n$ donc $P^n(n) = a_n$.

Soit P un élément de E. Il existe un $(n+1)$-uplet de réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\,P_k$.

$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\},\ P_j^{(j)} = a_j$ et $P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)\,P_k$.

2. (a) • Soit P un élément de E. P' appartient encore à E. Donc $P'(X+1)$ appartient également à E. Ainsi $u(P)$ est un élément de E.

$\forall P \in E,\ u(P) \in E$. u est alors une application de E dans E.

• Soit λ un élément de $\mathbb{R}$. Soient P et Q deux éléments de E.

$u(\lambda\,P + Q) = (\lambda\,P + Q)'(X+1) = (\lambda\,P' + Q')(X+1) = \lambda\,P'(X+1) + Q'(X+1) = \lambda\,u(P) + u(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q) \in E^2,\ u(\lambda\,P + Q) = \lambda\,u(P) + u(Q)$. u est linéaire. Ceci achève de montrer que :

u est un endomorphisme de E.

(b) $U(P_0) = P_0'(X+1) = 0_E$ (car $P_0 = 1$) et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u(P_k) = P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.

$U(P_0) = 0_E$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u(P_k) = P_{k-1}$, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Notons $(E_1, E_2, \ldots, E_{n+1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Notons pour tout j dans $[\![1, n+1]\!]$, $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

$C_1(A) = 0_{\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}$ et pour tout j dans $[\![2, n+1]\!]$, $C_j(A) = E_{j-1}$.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_{n+1}(A)) = \dim \operatorname{Vect}(E_1, E_2, \cdots, E_n)$.

$(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ comme sous-famille de la base $(E_1, E_2, \ldots, E_{n+1})$.

$(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est donc une base de $\operatorname{Vect}(E_1, E_2, \ldots, E_n)$. Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_1, E_2, \cdots, E_n) = n$.

Le rang de A est n.

A est triangulaire supérieure donc le spectre de A est l'ensemble de ses coefficients diagonaux. Alors $\operatorname{Sp} A = \{0\}$.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } A.}$$

(d) 0 est la seule valeur propre de A et $\dim \mathrm{SEP}\ (A,0) = n+1-\operatorname{rg} A = n+1-n = 1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est donc 1 ! Comme 1 est différent de $n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), A n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

3. (a) • $< .,. >$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel. Soient P, Q et R trois éléments de E.

$< \lambda P + Q, R >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)^{(k)}(k)\, R^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P^{(k)} + Q^{(k)})(k)\, R^{(k)}(k).$

$< \lambda P + Q, R >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)}(k)\, R^{(k)}(k) + Q^{(k)}(k)\, R^{(k)}(k)\right) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)\, R^{(k)}(k) + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)\, R^{(k)}(k).$

Donc $< \lambda P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q,R) \in E^3,\ < \lambda P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >.$

• Soient P et Q deux éléments de E. $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)\, Q^{(k)}(k) = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)\, P^{(k)}(k) =< Q, P >$.

$\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q >=< Q, P >.$

• Soit P un élément de E. $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0$ donc $< P, P >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0$.

$\forall P \in E,\ < P, P > \geqslant 0.$

• Soit P un élément de E tel que $< P, P >= 0$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(k)\right)^2 = 0$ et $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0$.

Par conséquent $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left(P^{(k)}(k)\right)^2 = 0$ donc $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P^{(k)}(k) = 0$.

Alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)\, P_k = \sum_{k=0}^{n} 0.P_k = 0_E$.

$\forall P \in E,\ < P, P >= 0 \Rightarrow P = 0_E.$

Les cinq points précédents montrent que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

(b) ▶ *Version 1*

Notons $(.\,|\,.)$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Observons que si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, P_k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\, P_k$ sont deux éléments de E de matrices U et V dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E alors : $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_k\ = (U\,|\,V)$.

Rappelons que la base canonique $(E_1, E_2, \ldots, E_{n+1})$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique $(.\,|\,.)$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Soient i et j deux éléments de $[\![0,n]\!]$. Les matrices de P_i et P_j dans la base $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ sont E_{i+1} et E_{j+1}.

Alors $< P_i,P_j >= (E_{i+1}\,|\,E_{j+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Finalement $\forall i\in[\![0,n]\!],\ \forall j\in[\![0,n]\!],\ < P_i,P_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une famille orthonormée de E et une base de E. $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base orthonormée de E.

► *Version 2*

Soient i et k deux éléments de $[\![0,n]\!]$. Calculons $P_i^{(k)}(k)$.

Si $k>i$, $P_i^{(k)}=0_E$ donc $P_i^{(k)}(k)=0$.

Supposons $k\leqslant i$. Alors $P_i^{(k)}(k)=P_{i-k}(k-k)=P_{i-k}(0)$. Donc $P_i^{(k)}(k)=1$ si $i-k=0$ et $P_i^{(k)}(k)=0$ si $i-k>0$.

Ainsi $P_i^{(k)}(k)=1$ si $k=i$ et $P_i^{(k)}(k)=0$ si $k<i$.

Finalement $\forall i\in[\![0,n]\!],\ \forall k\in[\![0,n]\!],\ P_i^{(k)}(k)=\begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit i un élément de $[\![0,n]\!]$. Soit j un élément de $[\![0,n]\!]$ distinct de i.

• Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$, ou k est différent de i ou k est différent de j.

Donc $P_i^{(k)}(k)=0$ ou $P_j^{(k)}(k)=0$. Alors $P_i^{(k)}(k)\,P_j^{(k)}(k)=0$.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P_i^{(k)}(k)\,P_j^{(k)}(k)=0$. Donc $< P_i,P_j >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_i^{(k)}(k)\,P_j^{(k)}(k)=0$.

• $\forall i\in[\![0,n]\!],\ \forall k\in[\![0,n]\!],\ P_i^{(k)}(k)=\begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $< P_i,P_i >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(P_i^{(k)}(k)\right)^2=\left(P_i^{(i)}(i)\right)^2=1$.

Alors $\forall i\in[\![0,n]\!],\ \forall j\in[\![0,n]\!],\ < P_i,P_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une famille orthonormée de E et une base de E.

$$\boxed{(P_0,P_1,\dots,P_n) \text{ est une base orthonormée ou orthonormale de } E.}$$

Exercice Montrer que $<.,.>$ est l'unique produit scalaire de E qui rend la base $(P_0,P_1,\dots,P_n)$. orthonormée.

EXERCICE 2

1. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{t^2}\left(t^2 + 1 - t\right) = \dfrac{1}{t^2}\left(\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right) > 0.$

$$\boxed{\psi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

$\psi(1) = 1 - \dfrac{1}{1} - \ln 1 = 1 - 1 - 0 = 0.$

Comme ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ψ est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\forall t \in]0,1[,\ \psi(t) < 0.}\ \boxed{\psi(1) = 0.}\ \boxed{\forall t \in]1,+\infty[,\ \psi(t) > 0.}$$

2. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = 1 - \frac{1}{p!}$ par "télescopage".

Alors $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{n-1}{n!} = \lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{p!}\right) = 1.$ Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{n-1}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = 1.}$$

3. Soit t un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \dfrac{1}{n!}\left(t^{n-1} - \dfrac{1}{t^{n-1}} - \ln t^{n-1}\right) = t\,\dfrac{t^n}{n!} - t\,\dfrac{(1/t)^n}{n!} - \ln t\,\dfrac{n-1}{n!}\cdot$

Rappelons que les séries de termes généraux $\dfrac{t^n}{n!}$ et $\dfrac{(1/t)^n}{n!}$ convergent. De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t - 1$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/t)^n}{n!} = e^{1/t} - 1.$

Q2 nous permet alors de dire que la série de terme général $\dfrac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ converge comme combinaison linéaire de trois séries convergentes (*ce qui n'était pas demandé mais ce qui est indispensable pour scinder la somme...*). De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/t)^n}{n!} - \ln t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) - t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - \ln t \times 1 = \frac{e^t - 1}{t} - t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - \ln t.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln t.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } t \text{ de } \mathbb{R}_+^*, \text{ la série de terme général } \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln t.}$$

4. Rappelons que ψ est strictement négative sur $]0,1[$, nulle en 1 et strictement positive sur $]1,+\infty[$.

Soit t un élément de $\mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\varphi(t) - \ln t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}\cdot$

Observons que $\dfrac{\psi(t^{1-1})}{1!} = \psi(1) = 0$. Alors $\varphi(t) - \ln t = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$.

• Soit t un élément de $]0,1[$. Alors pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$, t^{n-1} appartient à $]0,1[$ et $\dfrac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est strictement négatif.

Donc $\varphi(t) - \ln t = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} < 0$. $\varphi(t) < \ln t$.

• Soit t un élément de $]1,+\infty[$. Alors pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$, t^{n-1} appartient à $]1,+\infty[$ et $\dfrac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est strictement positif.

Donc $\varphi(t) - \ln t = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} > 0$. $\varphi(t) > \ln t$.

Pour être complet notons que $\varphi(1) = \dfrac{e^1 - 1}{1} - 1\,(e^{\frac{1}{1}} - 1) = (e-1) - (e-1) = 0 = \ln 1$.

$$\boxed{\forall t \in]0,1[,\ \varphi(t) < \ln t,\ \varphi(1) = \ln 1 \text{ et } \forall t \in]1,+\infty[,\ \varphi(t) > \ln t.}$$

5. Nous allons justifier deux points admis dans le texte.

• $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

• $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = x^y - y^x = e^{y\,\ln x} - e^{x\,\ln y}$.

$(x,y) \to x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (fonction polynôme) et est strictement positive sur U. Comme $t \to \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition $(x,y) \to \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. $(x,y) \to y$ étant également de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (fonction polynôme), par produit $(x,y) \to y\,\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. En remarquant que $t \to e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par composition on peut affirmer que $(x,y) \to e^{y\,\ln x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

On montre de la même manière que $(x,y) \to e^{x\,\ln y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Alors par différence, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

• $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = x^y - e^{x\,\ln y}$ donc $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1} - (\ln y)\,e^{x\,\ln y} = y\,x^{y-1} - (\ln y)\,y^x$.

$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = e^{y\,\ln x} - y^x$ donc $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\ln x)\,e^{y\,\ln x} - x\,y^{x-1} = (\ln x)\,x^y - x\,y^{x-1}$.

Soit (x,y) un élément de U. $\nabla f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y\,x^{y-1} - (\ln y)\,y^x = 0 \\ (\ln x)\,x^y - x\,y^{x-1} = 0 \end{cases}$.

Notons que x et y sont non nuls. En divisant la première ligne du système par y et la seconde par x il vient :

$\nabla f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x^{y-1} - (\ln y)\,y^{x-1} = 0 \\ (\ln x)\,x^{y-1} - y^{x-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{y-1} = (\ln y)\,y^{x-1} \\ (\ln x)\,x^{y-1} = y^{x-1} \end{cases}$. En inversant les deux lignes et les deux égalités il vient :

$$\nabla f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y^{x-1} = (\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln y)\,y^{x-1} = x^{y-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y^{x-1} = (\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln y)\,(\ln x)\,x^{y-1} = x^{y-1} \end{cases}.$$

Notons que x^{y-1} n'est pas nul. En divisant la seconde ligne du système par x^{y-1} il vient :

$\nabla f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y^{x-1} = (\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y) = 1 \end{cases}$. Montrons alors le résultats demandé en deux implications.

Il est clair que si $\begin{cases} x>1,\ y>1 \\ y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \end{cases}$ et ainsi $\nabla f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}$.

Réciproquement supposons que $\nabla f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}$. Alors $\begin{cases} y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \end{cases}$.

Ainsi $\ln x=\dfrac{y^{x-1}}{x^{y-1}}>0$ donc $x>1$.

Mais alors $\ln x>0$ et $(\ln x)\,(\ln y)=1>0$ donc $\ln y>0$ et ainsi $y>1$. On a bien $\begin{cases} x>1,\ y>1 \\ y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \end{cases}$.

Finalement : $\nabla f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x>1,\ y>1 \\ y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1,\ y>1 \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \\ y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Soit } (x,y) \text{ un élément de } U,\ (x,y) \text{ est un point critique de } f \text{ si et seulement si } \begin{cases} x>1,\ y>1 \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \\ y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \end{cases}.}$$

6. Soit (x,y) un élément de U point critique de f. $\begin{cases} x>1,\ y>1 \\ y^{x-1}=(\ln x)\,x^{y-1} \\ (\ln x)\,(\ln y)=1 \end{cases}$.

x est un réel strictement supérieur à 1 donc il existe un élément t de $\mathbb{R}_+^*$ (et un seul) tel que $x=e^t$. $t=\ln x$.

Alors $1=(\ln x)(\ln y)=t\,\ln y$ donc $\ln y=\dfrac{1}{t}$ et ainsi $y=e^{\frac{1}{t}}$.

$y^{x-1}=x^{y-1}\,\ln x=x^{y-1}\,t$. Donc $(x-1)\ln y=\ln y^{x-1}=\ln\left(x^{y-1}\,t\right)=(y-1)\,\ln x+\ln t$.

Donc $(e^t-1)\,\dfrac{1}{t}=(x-1)\ln y=(y-1)\,\ln x+\ln t=(e^{\frac{1}{t}}-1)\,t+\ln t$.

Alors $\dfrac{e^t-1}{t}-t\,(e^{\frac{1}{t}}-1)=\ln t$ c'est à dire $\varphi(t)=\ln t$.

$$\boxed{\text{Si } (x,y) \text{ un élément de } U \text{ point critique de } f, \text{ il existe un élément } t \text{ de } \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \begin{cases} x=e^t \\ y=e^{\frac{1}{t}} \\ \varphi(t)=\ln t \end{cases}.}$$

7. Procédons en deux étapes.

• Soit (x,y) un élément de U point critique de f. Alors il existe un réel t strictement positif tel que $x=e^t$, $y=e^{\frac{1}{t}}$ et $\varphi(t)=\ln t$.

Q4 montre que nécessairement $t=1$. Alors $(x,y)=(e,e)$.

• Réciproquement posons $(x,y)=(e,e)$. Alors (x,y) est un élément de U car $x>0$ et $y>0$.

De plus $x>1$, $y>1$, $(\ln x)\,(\ln y)=1\times 1=1$ et $y^{x-1}=e^{e-1}=x^{y-1}=x^{y-1}\times 1=x^{y-1}\ln x$.

Le tout suffit pour dire que $(x,y)=(e,e)$ est un point critique de f (d'après Q5).

$$\boxed{(e,e) \text{ est l'unique point critique de } f.}$$

8. U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U donc si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f donc nécessairement ce point est (e,e).

Montrons que f n'admet pas d'extremum local en (e,e). Cela montrera alors que f , n'admet aucun extremum sur U.

Posons $C=(e,e)$. $f(C)=e^{e-1}-e^{e-1}=0$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f(e,e+t)=e^{e+t}-(e+t)^e=-((e+t)^e-e^{e+t})=-f(e+t,e)$.

Ainsi $t\to f(e,e+t)$ et $t\to f(e+t,e)$ sont de signe contraire sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit t dans $\mathbb{R}_+^*$. $f(e,e+t)=e^{e+t}-(e+t)^e=(e+t)^e\left(\dfrac{e^{e+t}}{(e+t)^e}-1\right)=(e+t)^e\left(e^{(e+t)-e\ \ln(e+t)}-1\right)$.

Notons que $(e+t)-e\ \ln(e+t)=e+t-e\left(\ln e+\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)\right)=e+t-e-e\ \ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)=e\left(\dfrac{t}{e}-\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)\right)$.

Rappelons que $\forall z\in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ \ln z<z-1$. Alors $\forall y\in]0,+\infty[, \ln(1+y)<y$ ou $y-\ln(1+y)>0$.

Donc $(e+t)-e\ \ln(e+t)=e\left(\dfrac{t}{e}-\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)\right)>0$.

On a alors $e^{(e+t)-e\ \ln(e+t)}-1>0$. Donc $f(e,e+t)=(e+t)^e\left(e^{(e+t)-e\ \ln(e+t)}-1\right)>0$.

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f(e,e+t)-f(C)=f(e,e+t)>0$ et $f(e+t,e)-f(C)=f(e+t,t)<0$.

Ce qui suffit pour dire $X\to f(X)-f(C)$ ne garde pas un signe constant au voisinage de C et donc que f n'a pas d'extremum local en C.

Mais enfonçons le clou. Soit r un réel strictement positif. Montrons qu'il existe deux éléments X_1 et X_2 dans la boule ouverte de centre C et de rayon r qui vérifient $f(X_1)-f(C)>0$ et $f(X_2)-f(C)<0$.

Posons $X_1=(e,e+(r/2))$ et $X_2=(e+(r/2),e)$. X_1 et X_2 sont deux éléments de U.

Comme $r/2$ est strictement positif : $f(X_1)-f(C)>0$ et $f(X_2)-f(C)<0$, d'après ce qui précède.

De plus $\|X_1-C\|=\|(0,r/2)\|=r/2<r$ et $\|X_2-C\|=\|(r/2,0)\|=r/2<r$. Donc X_1 et X_2 sont deux éléments de $B(C,r)$.

Finalement pour tout réel r strictement positif il existe deux éléments X_1 et X_2 de $B(C,r)$ tels que $f(X_1)-f(C)>0$ et $f(X_2)-f(C)<0$. Donc f n'admet pas d'extremum local en C. Mieux :

$$\boxed{f \text{ n'admet aucun extremum sur } U.}$$

PROBLÈME

PARTIE I : Étude des variables Y_n et Z_n.

1. Tout cela n'est pas très sérieux. Nous ne traiterons que (b) et nous écrirons une procédure EntreTableau pour remplir le tableau et une fonction Max pour trouver le maximum des éléments du tableau. Nous terminerons par un petit programme principal. Le tout nécessite bien évidemment une déclaration de type.

```
program ECRICOME_2011;

const DimMax=200;

type Tableau=array[1..DimMax] of real;

function Max(n:integer;X:Tableau):real;

var i:integer;c:real;

begin

c:=X[1];

for i:=2 to n do if X[i]>c then c:=X[i];

Max:=c;

end;

Procedure EntreTableau(n:integer;var X:Tableau);

var i : integer;

begin

write('Donner la longueur n du tableau (n<=',DimMax,'). n=');
readln(n);

for i:=1 to n do
    begin
    write('Donner l''élément d''indice ',i,' du tableau. '); readln(X[i]);
    end;

end;

var n:integer; X:Tableau;

begin

EntreTableau(n,X);

writeln('Le maximum des éléments du tableau est : ',Max(n,X));

end.

```

Dans les questions 2, 3 et 4 nous supposerons que n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

2. (a) Soit t un réel.

$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leqslant t) = P(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant t) = P(\{X_1 \leqslant t\} \cap \{X_2 \leqslant t\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant t\})$.

Comme les variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont indépendantes on obtient :

$F_{Y_n}(t) = P(X_1 \leqslant t)\, P(X_2 \leqslant t) \cdots P(X_n \leqslant t) = F_{X_1}(t)\, F_{X_2}(t) \cdots F_{X_n}(t)$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(t) = F_{X_1}(t)\, F_{X_2}(t) \cdots F_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t).}$$

(b) Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ F_{X_k}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

(c) $(1 - e^{-0})^n = 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$). Cela permet d'écrire que $\forall t \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \end{cases}$.

Remarque *Bien noter que les deux intervalles sont fermés en* 0.

$t \to 0$ et $t \to (1 - e^{-t})^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

$$\boxed{Y_n \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall t \in]-\infty, 0[,\ F'_{Y_n}(t) = 0 = f_n(t)$ et $\forall t \in]0, +\infty[,\ F'_{Y_n}(t) = n\, e^{-t}\, (1 - e^{-t})^{n-1} = f_n(t)$.

f_n est alors une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, qui coïncide avec F'_{Y_n} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Donc :

$$\boxed{f_n \text{ est une densité de probabilité de la variable aléatoire } Y_n.}$$

Remarque *Supposons* $n \geqslant 2$. f_n *est alors continue sur* $\mathbb{R}$. *Cela permet de dire que* F_{Y_n} *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\forall t \in \mathbb{R},\ F'_{Y_n}(t) = f_n(t)$.

3. (a) • *Version 1* X_{n+1} est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 donc, d'après le programme (VI 4) e)), $\dfrac{1}{n+1} X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$.

Version 2 Retrouvons ce résultat en utilisant deux fois le rappel fait au début de la partie I.

Posons $T_{n+1} = \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. Notons $F_{T_{n+1}}$ la fonction de répartition de T_{n+1}.

$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{T_{n+1}}(t) = P(T_{n+1} \leqslant t) = P\left(\dfrac{1}{n+1} X_{n+1} \leqslant t\right) = P(X_{n+1} \leqslant (n+1)\, t) = F_{X_{n+1}}((n+1)\, t)$.

Or $\forall t \in \mathbb{R},\ F_{X_{n+1}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (le rappel !). $\forall t \in \mathbb{R},\ F_{T_{n+1}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(n+1)\,t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Le rappel du début de la partie I nous aide (encore ! ?) à reconnaître la fonction de répartition d'une variable alé atoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$.

$\boxed{T_{n+1} = \dfrac{X_{n+1}}{n+1} \text{ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre } n+1.}$

La fonction de répartition de $T_{n+1} = \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est la fonction $F_{T_{n+1}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{T_{n+1}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(n+1)\,t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(b) Nous avons déjà dit que T_{n+1} est une variable aléatoire à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$.

Utilisons de nouveau le cours. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ d_{n+1}(t) = \begin{cases} (n+1)\,e^{-(n+1)\,t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

d_{n+1} est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$, donc d_{n+1} est une densité de $T_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\,X_{n+1}$.

$\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction d_{n+1} définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ d_{n+1}(t) = \begin{cases} (n+1)\,e^{-(n+1)\,t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Soit x un réel.

$\forall t \in \mathbb{R},\ n\,e^{nt}\,(1 - e^{-t})^{n-1} = n\,e^t\,e^{(n-1)t}\,(1 - e^{-t})^{n-1} = n\,e^t\,\big(e^t\,(1 - e^{-t})\big)^{n-1} = n\,e^t\,(e^t - 1)^{n-1}$.

Notons que $t \to n\,e^t\,(e^t - 1)^{n-1}$ est la dérivée de $t \to (e^t - 1)^n$.

Alors : $\displaystyle\int_0^x n\,e^{nt}\,(1 - e^{-t})^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x n\,e^t\,(e^t - 1)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \big[(e^t - 1)^n\big]_0^x = (e^x - 1)^n$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x n\,e^{nt}\,(1 - e^{-t})^{n-1}\,\mathrm{d}t = (e^x - 1)^n.}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité admettant f_n pour densité.

• $Z_1 = X_1 = Y_1$ et Y_1 est une variable aléatoire à densité admettant f_1 pour densité.

Alors Z_1 est une variable aléatoire à densité admettant f_1 pour densité.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$. Notons que $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{1}{n+1}\,X_{n+1}$.

▲ Par hypothèse de récurrence Z_n est une variable aléatoire à densité de densité f_n.

▲ $\dfrac{1}{n+1}\,X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité de densité d_{n+1}.

▲ Les variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ sont indépendantes. Il en est de même des variables aléatoires de la suite $\left(X_1, \frac{1}{2}\,X_2, \dots, \frac{1}{n}\,X_n, \frac{1}{n+1}\,X_{n+1}\right)$. Donc $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,X_i$ et $\frac{1}{n+1}\,X_{n+1}$ sont indépendantes.

▲ d_{n+1} est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant d_{n+1}(t) = (n+1)\,e^{-(n+1)t} \leqslant n+1$.

Donc d_{n+1} est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ceci suffit pour dire que $Z_n + \frac{1}{n+1}\,X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et que $\hat{h} : x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,d_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Z_{n+1} est donc une variable aléatoire à densité de densité $\hat{h}$. Déterminons $\hat{h}$.

Soit x un réel. $\hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,d_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f_n(t)\,d_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t$ car f_n est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Si x est strictement négatif, pour tout t dans $[0, +\infty[$, $x-t$ est strictement négatif et ainsi $d_{n+1}(x-t) = 0$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[,\ \hat{h}(x) = 0 = f_{n+1}(x)$. Supposons x dans $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, x], x - t \geqslant 0$ et $d_{n+1}(x-t) = (n+1)\,e^{-(n+1)(x-t)}$. $\forall t \in]x, +\infty[, x - t < 0$ et $d_{n+1}(x-t) = 0$.

Alors $\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,d_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_n(t)\,(n+1)\,e^{-(n+1)(x-t)}\,\mathrm{d}t = (n+1)\,e^{-(n+1)x} \int_0^x f_n(t)\,e^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t$.

$\hat{h}(x) = (n+1)\,e^{-(n+1)x} \int_0^x n\,e^{-t}\,(1-e^{-t})^{n-1}\,e^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = (n+1)\,e^{-(n+1)x} \int_0^x n\,e^{n\,t}\,(1-e^{-t})^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

En utilisant Q4 on obtient alors : $\hat{h}(x) = (n+1)\,e^{-(n+1)x}\,(e^x - 1)^n = (n+1)\,e^{-x}\left(e^{-x}\,(e^x - 1)\right)^n = (n+1)\,e^{-x}\,(1-e^{-x})^n$.

Résumons. $\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{h}(x) = \begin{cases} (n+1)\,e^{-x}\,(1-e^{-x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$.

Finalement $\hat{h} = f_{n+1}$ donc Z_{n+1} est une variable aléatoire à densité de densité f_{n+1}. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } Z_n \text{ est une variable aléatoire à densité admettant } f_n \text{ pour densité.}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,X_i \text{ a même loi que } Y_n = \mathrm{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n).}$$

Remarque *Le passage par Q4 laisse perplexe car on détricote dans Q5 ce que l'on a tricoté dans Q4 non ?*

On peut sans doute obtenir $\hat{h}$ sur $[0, +\infty[$ sans passer par Q4. Essayons.

Soit x dans $[0, +\infty[$ notons que $\hat{h}(x)$ vaut encore $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)\,d_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors $\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(x-t)\,d_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_n(x-t)\,d_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x n\,e^{-(x-t)}\,(1-e^{-(x-t)})^{n-1}\,(n+1)\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$.

$\hat{h}(x) = (n+1)\,e^{-x} \int_0^x n\,e^{-t}\,e^{-(n-1)t}\,(1-e^{-x+t})^{n-1}\,\mathrm{d}t = (n+1)\,e^{-x} \int_0^x n\,e^{-t}\,(e^{-t}-e^{-x})^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

$\hat{h}(x) = (n+1)\,e^{-x}\left[-(e^{-t}-e^{-x})^n\right]_0^x = (n+1)\,e^{-x}\,(1-e^{-x})^n$.

PARTIE II : Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposerons que les fonctions considérées sont des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Notons que φ et ψ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Alors $\varphi - \psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Comme $x \to e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, par produit h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = (\varphi'(x) - \psi'(x))\, e^{-x} + (\varphi(x) - \psi(x))\,(-e^{-x}) = \Big(\big(\psi(x) - \psi'(x)\big) - \big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big)\Big)\, e^{-x}.$

Comme φ et ψ vérifient l'équation $(\mathcal{D}_f)$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = \big(f(x) - f(x)\big)\, e^{-x} = 0.$

h' est nulle sur **l'intervalle** $[0, +\infty[$ donc h est constante sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{h \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+.}$$

(b) φ et ψ sont deux éléments de l'espace vectoriel E donc $\varphi - \psi$ est un élément de E.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\varphi(t) - \psi(t)\big)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

h est constante sur $\mathbb{R}_+$ donc il existe un réel c tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \big(\varphi(x) - \psi(x)\big)\, e^{-x} = h(x) = c.$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) - \psi(x) = c\, e^x$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\varphi(t) - \psi(t)\big)\, \mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} c\, e^t\, \mathrm{d}t$ converge.

Supposons c non nul. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^t\, \mathrm{d}t$ converge. Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^t\, \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} (e^A - 1) = +\infty$! !

Donc c est nul. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) - \psi(x) = c\, e^x = 0$. Par conséquent $\varphi - \psi = 0_E$ et ainsi $\varphi = \psi$.

$$\boxed{\varphi = \psi.}$$

$$\boxed{\text{L'équation } (\mathcal{D}_f) \text{ possède au plus une solution dans } E.}$$

2. Soit x un réel positif.

- $t \to e^{-t} f(t)$ est continue sur $[x, +\infty[$ comme produit de deux fonctions continues sur $[x, +\infty[$.
- $\forall t \in [x, +\infty[,\ 0 \leqslant |e^{-t} f(t)| = e^{-t}\, |f(t)| \leqslant |f(t)|.$
- $\displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} |e^{-t} f(t)|\, \mathrm{d}t$. Ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

3. Rappelons que $x \to e^{-x} f(x)$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Donc $L_f : x \to \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$ qui est la primitive de cette fonction sur **l'intervalle** $[0, +\infty[$ prenant la valeur 0 en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus $\forall x \in [0, +\infty[,\ L_f'(x) = e^{-x} f(x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ k_f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = e^x \left(\int_x^0 e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$

$\forall x \in [0,+\infty[,\ k_f(x) = e^x \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = e^x \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t - L_f(x)\right).$

L_f est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t - L_f(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Comme $x \to e^x$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, par produit k_f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ k_f(x) = e^x \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t - L_f(x)\right).$

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ k_f'(x) = e^x \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t - L_f(x)\right) + e^x \left(0 - e^{-x} f(x)\right) = k_f(x) - f(x).$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ k_f(x) - k_f'(x) = f(x)$.

$$\boxed{k_f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ k_f(x) - k_f'(x) = f(x).}$$

4. (a) (α) Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in [x,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$ et $f(t) \geqslant 0$. Donc $\forall t \in [x,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-t} f(t) \leqslant e^{-x} f(t)$.

Or $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $x \leqslant +\infty$ donc en intégrant il vient :

$0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$

En multipliant par e^x qui est strictement positif on obtient : $0 \leqslant e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant e^x\, e^{-x} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi $0 \leqslant k_f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Attention jusqu'à la fin de la partie II la variable d'intégration devient x...

(β) $k_f - k_f' = f$ donc $k_f = k_f' + f$. Soit A dans $\mathbb{R}_+$.

$\displaystyle\int_0^A k_f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \left(k_f'(x) + f(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^A k_f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A k_f(x)\,\mathrm{d}x = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ comme limite du reste d'une intégrale convergente.

Par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k_f(x) = 0$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^A k_f(x)\,\mathrm{d}x = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lim_{A\to+\infty} k_f(A) = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ car $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A k_f(x)\,\mathrm{d}x = -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\displaystyle -k_f(0)+\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{+\infty} k_f f(x)\,\mathrm{d}x = -k_f(0)+\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -e^0\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(1-e^{-x}\right) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} k_f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et } \int_0^{+\infty} k_f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(1-e^{-x}\right) f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

5. Le but de cette question est de montrer que k_f appartient à E.

- Notons que k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc k_f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\forall x\in\mathbb{R}_+,\ |k_f(x)| = e^x\left|\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant e^x\int_x^{+\infty} |e^{-t} f(t)|\,\mathrm{d}t$ car nous avons montré dans Q2 que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$. Donc :

$\displaystyle\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leqslant |k_f(x)| \leqslant e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$. Ainsi pour montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\,\mathrm{d}x$ il suffit de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$. C'est ce que nous allons faire en utilisant Q4.

▲ $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

▲ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big||f|(t)\Big|\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge !

Dans ces conditions $|f|$ est un élément de E prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. D'après Q4, $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_{|f|}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

▲ $\displaystyle\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leqslant |k_f(x)| \leqslant e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = k_{|f|}(x)$.

▲ $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_{|f|}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{k_f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} |k_f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ converge. } k_f \text{ est un élément de } E.}$$

$$\boxed{k_f \text{ est l'unique élément de } E, \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ qui vérifie } k_f - k_f' = f.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } E, \text{ l'équation } (\mathcal{D}_f) \text{ admet une solution et une seule dans } E.}$$

6. Bien évidemment il faut lire g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et il faut sans doute travailler avec la restriction de g à $\mathbb{R}_+$.

Supposons qu'il existe une densité de probabilité g dérivable sur $\mathbb{R}_+$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ telle que sa restriction $\widetilde{g}$ à $\mathbb{R}_+$ vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \widetilde{g}(x)-\widetilde{g}\,'(x) = f(x)$. Notons $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

$\widetilde{f}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\widetilde{f}(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\widetilde{f}$ est un élément de E. De même $\widetilde{g}$ appartient à E.

Alors $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont deux éléments de E tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \widetilde{g}(x) - \widetilde{g}\,'(x) = \widetilde{f}(x)$. Par conséquent $\widetilde{g} = k_{\widetilde{f}}$.

De plus $\widetilde{f}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Q4 donne alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_{\widetilde{f}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\,\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

$$1 = \int_0^{+\infty} \widetilde{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} k_{\widetilde{f}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\,\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

car toutes les intégrales convergent.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Comme $t \to e^{-t}\,\widetilde{f}(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+ : \forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-t}\,\widetilde{f}(t) = 0$.

Ceci donne $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \widetilde{f}(t) = 0$ ou $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = 0$.

Dans ces conditions f est nulle sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$! !

Il n'existe pas de densité de probabilité g, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et telle que sa restriction $\widetilde{g}$ à $\mathbb{R}_+$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \widetilde{g}(x) - \widetilde{g}\,'(x) = f(x)$.

PARTIE III : Étude de l'application $\mathbf{f \to k_f}$.

1. • D'après ce qui précède, pour tout élément f de E, k_f appartient à E. Donc φ est une application de E dans E.

• Soit λ un réel et soient f et g deux éléments de E.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda\,f+g)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,(\lambda\,f+g)(t)\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} (\lambda\,e^{-t}\,f(t) + e^{-t}\,g(t))\,\mathrm{d}t.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda\,f+g)(x) = e^x \left(\lambda \int_x^{+\infty} e^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} e^{-t}\,g(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ car toutes les intégrales convergent.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda\,f+g)(x) = \lambda\,e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\,\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda\,\varphi(f)+\varphi(g))(x).$$

Donc : $\varphi(\lambda\,f+g) = \lambda\,\varphi(f) + \varphi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in E^2,\ \varphi(\lambda\,f+g) = \lambda\,\varphi(f) + \varphi(g)$. φ est linéaire. Finalement :

φ est un endomorphisme de E.

2. • f_a est continue sur $[0,+\infty[$.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_a(x) = \begin{cases} a\,e^{-ax} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_a(x) = \dfrac{1}{a}\,\ell_a(x)$.

ℓ_a est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de parmètre a.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{a}\cdot$

Comme f_a est positive sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Ceci achève de montrer que :

f_a est un élément de E.

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. $\displaystyle\varphi(f_a)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,e^{-at}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t}\,\mathrm{d}t = e^x \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{a+1}\,e^{-(a+1)t}\right]_x^A.$

$$\varphi(f_a)(x) = e^x \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{a+1}\, e^{-(a+1)x} - \frac{1}{a+1}\, e^{-(a+1)A} \right) = e^x\, \frac{1}{a+1}\, e^{-(a+1)x} = \frac{1}{a+1}\, e^{-ax} = \frac{1}{a+1}\, f_a(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(f_a)(x) = \dfrac{1}{a+1}\, f_a(x)$. $\varphi(f_a) = \dfrac{1}{a+1}\, f_a$. De plus f_a n'est pas la fonction nulle de E. Ainsi :

$$\boxed{f_a \text{ est un vecteur propre de } \varphi \text{ associé à la valeur propre } \frac{1}{a+1}\cdot}$$

3. (a) Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$. Soit f un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(f) = 0_E$.

Or $\varphi(f) = k_f$ donc $k_f = 0_E$ et alors k'_f est nulle. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = k_f(x) - k'_f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$. Par conséquent 0 n'est pas valeur propre de φ. Ainsi :

$$\boxed{\lambda \text{ n'est pas nul.}}$$

(b) λ n'est pas nul. $f = \dfrac{1}{\lambda}\,\varphi = \dfrac{1}{\lambda}\, k_f$ et kf est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $f' = \dfrac{1}{\lambda}\, k'_f = \dfrac{1}{\lambda}\,(k_f - f) = \dfrac{1}{\lambda}\,(\varphi(f) - f) = \dfrac{1}{\lambda}\,(\lambda\, f - f) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, f = \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) f$. Donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et vérifie l'équation différentielle } f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f.}$$

(c) $x \to \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $x \to 1 - \dfrac{1}{\lambda}\cdot$ L'unique résultat du programme sur les équations différentielles montre qu'il existe un réel c tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = c\, e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) x}$. f n'étant pas la fonction nulle, c n'est pas nul.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } c \text{ non nul tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = c\, e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) x}.}$$

(d) c n'est pas nul et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}\, dt$ converge. Posons $\gamma = 1 - \dfrac{1}{\lambda}\cdot$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\gamma t}\, dt$ converge.

$\forall A \in [0, +\infty[,\ \displaystyle\int_0^A e^{\gamma t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma A} - 1\right) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ A & \text{sinon} \end{cases}$. Alors : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{\gamma t}\, dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma > 0 \\ -\dfrac{1}{\gamma} & \text{si } \gamma < 0 \\ +\infty & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}\, dt$ converge, nécessairement $\gamma < 0$. Ainsi $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \dfrac{1}{\lambda} < 0$.

En observant que $\lambda\,(\lambda - 1) < 0$ et en utilisant le signe du trinôme on obtient que $\lambda \in]0, 1[$.

$$\boxed{\lambda \in]0, 1[.}$$

4. Montrons le résultat par double inclusion.

- Q3 a montré que $\operatorname{Sp}\varphi \subset]0, 1[$.
- Réciproquement soit λ un élément de $]0, 1[$. Posons $a = \dfrac{1 - \lambda}{\lambda}\cdot$

Alors $a > 0$ (car λ appartient à $]0, 1[$) et $\lambda = \dfrac{1}{1 + a}$ donc, d'après Q2, λ est valeur propre de φ et $f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre. $\lambda \in \operatorname{Sp}\varphi$.

Ceci achève de montrer que $]0,1[\subset \operatorname{Sp}\varphi$. Comme $\operatorname{Sp}\varphi \subset]0,1[$:

$$\boxed{\operatorname{Sp}\varphi =]0,1[.}$$

Soit λ une valeur propre de φ.

Nous avons montré dans Q3 que tout vecteur propre de φ associé à λ était dans $\operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

Comme 0_E appartient à $\operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$, le sous-espace propre SEP (φ,λ) de φ associé à λ est contenu dans $\operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

Or SEP (φ,λ) est de dimension supérieure ou égale à 1 et $\operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$ est de dimension 1 (car $f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ n'est pas 0_E).

Ainsi SEP $(\varphi,\lambda) \subset \operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$ et $\dim \text{SEP } (\varphi,\lambda) = \dim \operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = 1$ donc SEP $(\varphi,\lambda) = \operatorname{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

$$\boxed{\text{Pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } \varphi \text{ le sous-espace propre de } \varphi \text{ associé à } \lambda \text{ est la droite vectorielle engendrée par } f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.}$$
