ECRICOME 2012 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

1. Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*$. $t \to e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^z e^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\,e^{-at}\right]_0^z = \frac{1}{a}\left(1-e^{-az}\right).$

Alors $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}\int_0^z e^{-at}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\left(1-e^{-az}\right)\right) = \frac{1}{a}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{a}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } a \text{ de } \mathbb{R}_+^*,\ I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}\cdot}$$

Remarque On pouvait obtenir ce résultat en faisant intervenir "la densité usuelle" d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

Qui peut le plus peut le moins. Montrons donc que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r}$ converge. Soit r dans $\mathbb{N}^*$.

- $t \to (x+e^t)^r$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $t \to \dfrac{1}{(x+e^t)^r}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in [0,+\infty[,\ x+e^t \geqslant e^t > 0$ et la fonction $z \to z^r$ est croissante sur $[0,+\infty[$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ (x+e^t)^r \geqslant e^{rt} > 0$. Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 < \dfrac{1}{(1+e^t)^r} \leqslant \dfrac{1}{e^{rt}} = e^{-rt}$ par décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0,+\infty[$.

De plus, d'après le début de la question, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-rt}\,\mathrm{d}t$ converge car r est strictement positif. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ et pour tout élément } r \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r} \text{ converge.}}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } \mathbb{R}_+,\ f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2} \text{ convergent.}}$$

♣ *Exercice Trouver le domaine de définition de* $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^r}$ *pour tout élément* r *de* $\mathbb{N}^*$.

2. Soient x et t deux éléments de $\mathbb{R}_+$.

$0 \leqslant \left(\sqrt{x} - e^{\frac{t}{2}}\right)^2 = x - 2\sqrt{x}\,e^{\frac{t}{2}} + e^t = x - 2\sqrt{x\,e^t} + e^t$ donc $2\sqrt{x\,e^t} \leqslant x + e^t$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{x\,e^t} \leqslant x + e^t.}$$

Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 < 2\sqrt{x\,e^t} \leqslant x + e^t$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x+e^t} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x\,e^t}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{-\frac{t}{2}}$ par décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0, +\infty[$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ converge et vaut $f(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ donc 2.

Alors par croissance de l'intégrale il vient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ (car $0 \leqslant +\infty$).

Donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times 2 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

3. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Soit t un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\dfrac{1}{x+e^t} - \dfrac{1}{y+e^t} = \dfrac{y+e^t-x-e^t}{(x+e^t)(y+e^t)} = \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}$.

$0 < e^t \leqslant x + e^t$ et $0 < e^t \leqslant y + e^t$ donc $0 < e^{2t} = e^t\,e^t \leqslant (x+e^t)(y+e^t)$. Alors :

$0 < \dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leqslant \dfrac{1}{e^{2t}} = e^{-2t}$ et $y - x > 0$. Ainsi : $0 < \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} \leqslant (y-x)\,e^{-2t}$.

Par conséquent : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 < \dfrac{1}{x+e^t} - \dfrac{1}{y+e^t} \leqslant (y-x)\,e^{-2t}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ converge et vaut $f(x)$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y+e^t}$ converge et vaut $f(y)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Alors par stricte croissance de l'intégrale il vient : $0 < \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y+e^t} \leqslant (y-x) \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ (car $0 < +\infty$).

Donc $0 < f(x) - f(y) \leqslant (y-x) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{y-x}{2}$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Rightarrow 0 < f(x) - f(y) \leqslant \frac{y-x}{2}.}$$

4. Montrons d'abord que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|x-y\right|$. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$.

Si $x = y$ on a clairement $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|x-y\right|$ car $0 \leqslant 0$!

Supposons $x < y$. D'après **Q3** : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}$.

Donc $|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2} = \dfrac{1}{2}\left|y-x\right| = \dfrac{1}{2}\left|x-y\right|$.

Supposons $y < x$. D'après **Q3** : $0 < f(y) - f(x) \leqslant \dfrac{x-y}{2}$.

Donc $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \leqslant \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}\left|x-y\right|$. Finalement :

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\left|x-y\right|.}$$

- Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|x-y\right|$ et $\displaystyle\lim_{x \to y} \left(\frac{1}{2}\left|x-y\right|\right) = 0$.

Alors par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$ et ainsi f est continue en y, ceci pour tout y dans $\mathbb{R}_+$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• D'après **Q3**, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Rightarrow 0 < f(x) - f(y)$. Donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

• $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = I_1 = 1$ d'après **Q1**.

D'après **Q2**, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ il vient par encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Le théorème de la bijection et les trois points précédents montrent que :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection continue strictement décroissante de } \mathbb{R}_+ \text{ sur }]0,1].}$$

5. Posons $\forall x \in [0,+\infty[,\ h(x) = f(x) - x$.

• f et $x \to -x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc par somme h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• f et $x \to -x$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$.

• $h(0) = f(0) - 0 = 1$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

Le théorème de la bijection et les trois points précédents montrent que h réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty,1]$.

Or 0 est élément de $]-\infty,1]$ donc il existe un unique élément α de $\mathbb{R}_+$ tel que $h(\alpha) = 0$ ou tel que $f(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

Nous avons vu dans **Q4** que f prend ses valeurs dans $]0,1]$. Donc $\alpha = f(\alpha) \in]0,1]$.

$$\boxed{\alpha \text{ appartient à }]0,1].}$$

6. (a) Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n existe, u_n appartient à $\mathbb{R}_+$ et $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

• u_0 existe et vaut 0. Alors u_0 appartient à $\mathbb{R}_+$ et $|\alpha - u_0| = \alpha \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}\cdot$ La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

u_n existe et appartient à $\mathbb{R}_+$ donc $f(u_n)$ existe et appartient à $]0,1]$. Alors u_{n+1} existe et appartient à $\mathbb{R}_+$.

u_n et α sont deux éléments de $\mathbb{R}_+$ donc : $|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}\cdot$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \text{ est un élément de } \mathbb{R}_+ \text{ et } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \alpha.}$$

6. (b) Nous écrirons une fonction et une procédure donnant N (ce qui est plus que ce qui est demandé) et u_N.

Profitons de l'occasion pour dire que cette fonction f se calcule en une ligne (c'est dire l'intérêt de l'exercice...).

En effet $f(0)=1$ et pour x dans $]0,+\infty[$:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x\,e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t=\lim_{z\to+\infty}\int_0^{z}\frac{e^{-t}}{x\,e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t=\lim_{z\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\,\ln(x\,e^{-t}+1)\right]_0^z=\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot$$

```
function Ecricome_2012(epsi:real;var N:integer):real;

var u,stop:real;

begin

N:=0;u:=0;stop:=1;

while stop>epsi do
      begin
      N:=N+1;
      stop:=stop/2;
      u:=f(u);
      end;

Ecricome_2012:=u;
end;
```

Remarque *Cette fonction permet d'obtenir* $\alpha\simeq 0.74688$.

La même chose en utilisant une procédure :

```
procedure Ecricome_2012b(epsi:real;var N:integer;var u:real);

var stop:real;

begin

N:=0;u:=0;stop:=1;

while stop>epsi do
      begin
      N:=N+1;
      stop:=stop/2;
      u:=f(u);
      end;
end;
```

7. Ici encore nous ferons un peu plus que demandé en montrant le résultat pour x dans $\mathbb{R}^+$ à la place de x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soient x un réel positif et h un réel tel que $x+h>0$ ou tel que $x+h\geqslant 0$...

Posons $\Delta(h)=f(x+h)-f(x)+h\,g(x)$. $\Delta(h)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+h+e^t}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}+h\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}$.

$$\Delta(h)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+h+e^t}-\frac{1}{x+e^t}+\frac{h}{(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\frac{(x+e^t)^2-(x+h+e^t)(x+e^t)+h(x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\Delta(h)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{(x+e^t)^2-(x+e^t)^2-h\,(x+e^t)+h\,(x+e^t)+h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t=h^2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}.$$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ x+h+e^t\geqslant e^t>0$ et $(x+e^t)^2\geqslant e^{2t}>0$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ (x+h+e^t)(x+e^t)^2\geqslant e^{3t}>0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leqslant \dfrac{1}{e^{3t}} = e^{-3t}$ par décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0,+\infty[$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{3}$ d'après **Q1**. Ainsi :

$0 \leqslant \Delta(h) = h^2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leqslant h^2 \int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{3}$ car $h^2 \geqslant 0$ et $0 \leqslant +\infty$!

Donc $0 \leqslant \Delta(h) \leqslant \dfrac{h^2}{3}\cdot$ Ce qui donne encore $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{h^2}{3}$ ou $|f(x+h) - f(x) + h\,g(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{3}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall h \in \mathbb{R},\ x+h \geqslant 0 \Rightarrow |f(x+h) - f(x) + h\,g(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}\cdot}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\forall h \in [-x,+\infty[,\ |f(x+h) - f(x) + h\,g(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{3} = \dfrac{|h|^2}{3}\cdot$

Alors $\forall h \in [-x,+\infty[-\{0\},\ \left|\dfrac{f(x+h) - f(x) + h\,g(x)}{h}\right| \leqslant \dfrac{|h|}{3}\cdot$

Donc $\forall h \in [-x,+\infty[-\{0\},\ 0 \leqslant \left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \big(-g(x)\big)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{3}$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{3} = 0$.

Ainsi par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -g(x)$.

Ce qui montre que f est dérivable en x et que $f'(x) = -g(x)$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -g(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}\cdot}$$

8. Ici encore nous travaillerons sur $\mathbb{R}_+$. Nous poserons donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = x\,f(x)$.

f et $x \to x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc par produit T est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$$T'(x) = f(x) + x\,f'(x) = f(x) - x\,g(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{x}{(x+e^t)^2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x+e^t-x}{(x+e^t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$T'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty} \int_0^{z} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{z\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+e^t}\right]_0^z = \lim_{z\to+\infty} \left(-\frac{1}{x+e^z} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}\cdot$$

$$\boxed{T \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ T'(x) = \frac{1}{x+1}\cdot}$$

Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle il existe une constante c telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = \ln|x+1| + c$.

Alors $c = 0 + c = \ln|0+1| + c = T(0) = 0 \times f(0) = 0 \times 1 = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = \ln|x+1| = \ln(x+1)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(x) = \ln(x+1).}$$

Remarque *En étant conforme au texte et en travaillant sur* $]0,+\infty[$ *on montrait que* $c = 0$ *en faisant tendre* x *vers* 0 *et en utilisant la continuité de* f *en* 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x\,f(x) = T(x) = \ln(x+1)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.}$$

Remarque *Résultat que nous avons obtenu en une ligne dans Q6. b. Mais pourquoi faire simple lorsque l'on peut faire compliqué ?!*

♣ *Exercice* *Retrouver la dérivabilité de f en 0.*

EXERCICE 2

---

1. Deux résultats préliminaires.

(a) $(I_n - U)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} U^k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=0}^{q-1} U^{k+1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=1}^{q} U^k = U^0 - U^q = I_n - 0_n = I_n$.

$(I_n - U)\left(\sum_{k=0}^{q-1} U^k\right) = I_n$. Cela suffit pour dire que :

$$\boxed{U \text{ est inversible et } U^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k.}$$

(b) $A(A - I_n) = 0_n$ donc $f \circ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$. $f^2 - f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ ou $f^2 = f$. Alors f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$. Ainsi f est une projection. Mieux c'est la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$. Le cours indique alors que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ non ?? Mais faisons semblant de ne pas avoir remarqué...

- Montrons que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$.

$0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = f \circ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = f^2 - f = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \circ f$. Alors $f\big((f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $f(x) - x = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ et $f(x) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Comme $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$: $x - f(x) = -\big(f(x) - x\big) \in \mathrm{Ker}\, f$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x - f(x) \in \mathrm{Ker}\, f \text{ et } f(x) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}).}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Notons que : $x = \big(x - f(x)\big) + f(x)$.

Comme $x - f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ et $f(x) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$: x appartient à $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Par conséquent $\mathbb{R}^n$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Mais $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ donc $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ est contenu dans $\mathbb{R}^n$.

Finalement $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

- Montrons que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ sont en somme directe. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

$f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $x = f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par conséquent $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Donc $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ sont en somme directe. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}).}$$

$f \circ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$. Don $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont 0 et 1. 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles de f.

Rappelons que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Notons alors que :

$\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \iff \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \iff f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \iff f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et

$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \iff \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \iff f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Longleftrightarrow f \neq \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Longleftrightarrow f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Si $f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}$ ou $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$, f est diagonalisable.

Supposons que $f \neq \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$. Alors $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Donc 0 et 1 sont valeurs propres de f. Mieux 0 et 1 sont les valeurs propres de f.

Or SEP $(f, 0) \oplus$ SEP $(f, 1) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$. Ainsi f est diagonalisable. Dans tous les cas :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable. La matrice } A \text{ est également diagonalisable.}}$$

2. Étude d'une suite de matrices.

Quelques résultats préliminaires, pour la route...

U et V sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **qui commutent**.

R1 Pour tout k dans $\mathbb{N}$, U^k (resp. V^k) et V (resp. U) commutent.

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ U^k V = V U^k$.

La propriété est vraie pour $k = 0$ car $U^0 = I_n$ et I_n commute avec V.

Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k + 1$.

$U^k V = V U^k$ donc $U^{k+1} V = U V U^k$. Or $UV = VU$. Alors $U^{k+1} V = V U U^k = V U^{k+1}$.

Donc $U^{k+1} V = V U^{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

De même : $\forall k \in \mathbb{N},\ V^k U = U V^k$.

R2 Pour tout k dans $\mathbb{N}$ et pour tout q dans $\mathbb{N}$, U^k et V^q commutent.

Soient k et q deux éléments de $\mathbb{N}$. U et V commutent donc d'après R1, U^k et V commutent.

Alors, toujours d'après R1, U^k commute avec toute puissance de V donc avec V^q.

R3 Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $P(U)$ (resp. $P(V)$) et V (resp. U) commutent.

Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k\, X^k$.

U et V commutent donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, U^k et V commutent d'après R1.

Alors $P(U)\, V = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, U^k \right) V = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, U^k\, V = \sum_{k=0}^{r} a_k\, V\, U^k = V \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, U^k \right) = V\, P(U)$.

Donc $P(U)$ et V commutent. De même $P(V)$ et U commutent.

R3' Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, $P(U)$ et $Q(V)$ commutent.

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.

U et V commutent donc d'après R3, $P(U)$ et V commutent.

Alors, toujours d'après R3, $P(U)$ commute avec tout polynôme de V donc avec $Q(V)$.

R4 $\forall k \in \mathbb{N},\ (UV)^k = U^k V^k$ et en particulier $(UV)^2 = U^2\, V^2$.

Montrons ce résultat par récurrence sur k.

$(UV)^0 = I_n = I_n \times I_n = U^0\,V^0$. Donc la propriété est vraie pour $k=0$.

Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$(UV)^{k+1} = UV\,(UV)^k = UV\,U^k\,V^k$. Or U et V commutent donc U^k et V commutent d'après R1.

Alors $(UV)^{k+1} = UU^k\,VV^k = U^{k+1}\,V^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

R5 Si U est inversible, U^{-1} commute avec V et avec V^q pour tout q dans $\mathbb{N}$.

$UV = VU$ en multipliant à droite et à gauche par U^{-1} il vient $U^{-1}UVU^{-1} = U^{-1}VUU^{-1}$ donc $VU^{-1} = U^{-1}V$.

Alors U^{-1} et V commutent. Ainsi U^{-1} et V^q commutent pour tout q dans $\mathbb{N}$ d'après R1.

R5' Si U est inversible, U^{-1} commute avec $Q(V)$ pour tout Q dans $\mathbb{R}[X]$.

U^{-1} commute avec V (d'après R5) et donc U^{-1} commute avec $Q(V)$ pour tout élément Q de $\mathbb{R}[X]$ d'après R3.

R6 Si W est une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec U, U commute avec toute combinaison linéaire de V et de W.

Soit W est une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec U. Soient α et β deux réels.

$U(\alpha V + \beta W) = \alpha UV + \beta UW = \alpha VU + \beta WU = (\alpha V + \beta W)\,U$. U commute avec $\alpha V + \beta W$.

R7 Si W est une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec U, U commute avec le produit VW.

Soit W est une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec U. $UVW = VUW = VWU$. U commute avec VW !

R8 $(U+V)^2 = U^2 + 2UV + V^2$ et $(U-V)^2 = U^2 - 2UV + V^2$.

Résulte du cours (formule du binôme) !

(a) $2B$ et I_n commutent donc d'après $\boxed{\text{R8}}$ $(2B - I_n)^2 = (2B)^2 - 2(2B)\,I_n + I_n^2 = 4B^2 - 4B + I_n$

Alors $I_n - (2B - I_n)^2 = I_n - 4B^2 + 4B - I_n = -4B^2 + 4B = -4B(B - I_n)$.

Ainsi $\big(I_n - (2B - I_n)^2\big)^N = \big(-4B(B - I_n)\big)^N = (-4)^N\,\big(B(B - I_n)\big)^N$.

Comme $\big(B(B - I_n)\big)^N = 0_n$, $\big(I_n - (2B - I_n)^2\big)^N = 0_n$. N étant un élément de $\mathbb{N}^*$ on peut dire que :

$$\boxed{I_n - (2B - I_n)^2 \text{ est nilpotente.}}$$

$I_n - (2B - I_n)^2$ étant une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, **Q1. (a)** montre que $I_n - \big(I_n - (2B - I_n)^2\big)$ est inversible.

Donc $(2B - I_n)^2$ est inversible. Montrons alors que $2B - I_n$ est inversible.

Soit X un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(2B - I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$(2B - I_n)^2 X = (2B - I_n)(2B - I_n)X = (2B - I_n)\,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $(2B - I_n)^2 X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $(2B - I_n)^2$ est inversible donc $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (2B - I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $2B - I_n$ est inversible.

$$\boxed{2B - I_n \text{ est inversible.}}$$

Montrons alors que $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

- $\boxed{\blacktriangle 1}$ $2B_0 - I_n = 2B - I_n$ donc $2B_0 - I_n$ est inversible.
- $\boxed{\blacktriangle 2}$ $B_0 - B = 0_n$. Posons alors $C_0 = 0_n$.

C_0 est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_0 - B = 0_n = \big[B(B-I_n)\big] \times 0_n = \big[B(B-I_n)\big]\, C_0$.

Donc il existe une matrice C_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_0 - B = \big[B(B-I_n)\big]\, C_0$.

$\boxed{\blacktriangle 3}$ $B_0(B_0 - I_n) = B(B-I_n) = \big[B(B-I_n)\big]^{2^0} = \big[B(B-I_n)\big]^{2^0} I_n$.

Posons $D_0 = I_n$. D_0 est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_0(B_0 - I_n) = \big[B(B-I_n)\big]^{2^0} D_0$.

Il existe une matrice D_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_0(B_0 - I_n) = \big[B(B-I_n)\big]^{2^0} D_0$.

$\boxed{\blacktriangle 4}$ $B_0 B = B^2 = BB_0$. $B_0 B = BB_0$.

$\boxed{\blacktriangle 5}$ $C_0 B = 0_n B = 0_n = B\, 0_n = BC_0$. $C_0 B = BC_0$.

$\boxed{\blacktriangle 6}$ $D_0 B = I_n B = B = BI_n = BD_0$. $D_0 B = BD_0$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{H}_0) \text{ est vraie.}}$$

(b) On suppose que la propriété $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$. Alors

$\boxed{\blacktriangle 1}$ $2B_k - I_n$ est inversible.

$\boxed{\blacktriangle 2}$ Il existe une matrice C_k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_k - B = \big[B(B-I_n)\big]\, C_k$.

$\boxed{\blacktriangle 3}$ Il existe une matrice D_k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_k(B_k - I_n) = \big[B(B-I_n)\big]^{2^k} D_k$.

$\boxed{\blacktriangle 4}$ $B_k B = BB_k$.

$\boxed{\blacktriangle 5}$ $C_k B = BC_k$.

$\boxed{\blacktriangle 6}$ $D_k B = BD_k$.

Notons que B_{k+1} est définie car la matrice $2B_k - I_n$ est inversible.

► $2B_{k+1} - I_n = 2B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} - I_n = 2B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} - (2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1} = \big[2B_k^2 - (2B_k - I_n)\big](2B_k - I_n)^{-1}$.

$2B_{k+1} - I_n = \big[I_n + 2B_k^2 - 2B_k\big] \times (2B_k - I_n)^{-1} = \big[I_n + 2B_k(B_k - I_n)\big] \times (2B_k - I_n)^{-1}$.

$$\boxed{2B_{k+1} - I_n = \big[I_n + 2B_k(B_k - I_n)\big] \times (2B_k - I_n)^{-1}.}$$

► $B_{k+1} - B = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} - B = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} - B(2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1} = \big[B_k^2 - B(2B_k - I_n)\big](2B_k - I_n)^{-1}$.

$B_{k+1} - B = \big[B_k^2 - 2BB_k + B)\big](2B_k - I_n)^{-1} = \big[B_k^2 - 2BB_k + B^2 - (B^2 - B)\big](2B_k - I_n)^{-1}$.

Or B_k et B commutent donc d'après $\boxed{\text{R8}}$ $B_k^2 - 2BB_k + B^2 = B_k^2 - 2B_k B + B^2 = (B_k - B)^2$. Ainsi :

$$\boxed{B_{k+1} - B = \big[(B_k - B)^2 - (B^2 - B)\big] \times (2B_k - I_n)^{-1}.}$$

► $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1}\big[B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} - I_n\big] = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1}\big[B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} - (2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}\big]$.

$B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1}\big[B_k^2 - (2B_k - I_n)\big](2B_k - I_n)^{-1} = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1}\big[B_k^2 - 2B_k + I_n\big](2B_k - I_n)^{-1}$.

B_k et I_n commutent donc $\boxed{\text{R8}}$ donne : $B_k^2 - 2B_k + I_n = B_k^2 - 2B_k + I_n^2 = (B_k - I_n)^2$.

Alors $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1}(B_k - I_n)^2(2B_k - I_n)^{-1}$.

B_k commute avec B_k et I_n donc B_k commute avec $2B_k - I_n$ d'après $\boxed{\text{R6}}$.

$\boxed{\text{R5'}}$ permet alors de dire que $(2B_k - I_n)^{-1}$ commute avec tout polynôme de B_k donc avec $B_k^2 - 2B_k + I_n$ c'est dire avec $(B_k - I_n)^2$.

Ainsi $B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=B_k^2\,(2B_k-I_n)^{-1}(B_k-I_n)^2(2B_k-I_n)^{-1}=B_k^2\,(B_k-I_n)^2\big[(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2$.

B_k et B_k-I_n commutent donc, d'après $\boxed{\text{R4}}$ $B_k^2\,(B_k-I_n)^2=\big[B_k\,(B_k-I_n)\big]^2$. Ainsi :

$B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\big[B_k(B_k-I_n)\big]^2\,\big[(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2$.

Notons que cette égalité est indispensable pour la suite et est largement suffisante. Mais le concepteur en veut "plus" !

Nous avons vu plus haut que $(2B_k-I_n)^{-1}$ commute avec tout polynôme de B_k donc $(2B_k-I_n)^{-1}$ commute avec $B_k^2-B_k$ donc avec $B_k(B_k-I_n)$.

Alors d'après $\boxed{\text{R4}}$ $B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\big[B_k(B_k-I_n)\big]^2\,\big[(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2=\big[B_k(B_k-I_n)(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2$.

$$\boxed{B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\big[B_k(B_k-I_n)\big]^2\,\big[(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2=\big[B_k(B_k-I_n)(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2.}$$

► Montrons que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

$\boxed{\blacktriangle 1}$ Montrons que $2B_{k+1}-I_n$ est inversible.

$2B_{k+1}-I_n=\big[I_n+2B_k(B_k-I_n)\big]\times(2B_k-I_n)^{-1}$. Comme $(2B_k-I_n)^{-1}$ est inversible, pour montrer que $2B_{k+1}-I_n$ est inversible il suffit de montrer que $I_n+2B_k(B_k-I_n)$ est inversible car le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible.

Notons que $I_n+2B_k(B_k-I_n)=I_n-\big(-2B_k(B_k-I_n)\big)$. Alors **Q1. (a)** montre que $I_n+2B_k(B_k-I_n)$ est inversible dès que $-2B_k(B_k-I_n)$ est nilpotente.

Pour montrer que $-2B_k(B_k-I_n)$ est nilpotente il suffit de montrer que $B_k(B_k-I_n)$ est nilpotente.

Or $B_k(B_k-I_n)=\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}\,D_k$ donc $\big(B_k(B_k-I_n)\big)^N=\left(\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}\,D_k\right)^N$.

D_k commute avec B donc D_k commute avec tout polynôme de B d'après $\boxed{\text{R3}}$. Or $\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}=(B^2-B)^{2^k}$ est un polynôme de B car B^2 et B commutent donc $(B^2-B)^{2^k}=\displaystyle\sum_{i=0}^{2^k}\binom{2^k}{i}B^{2i}(-B)^{2^k-i}$.

Donc D_k commute avec $\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}$. Résultat qu'il convient de retenir car il sera réutilisé dans $\boxed{\blacktriangle 3}$.

$\boxed{\text{R4}}$ permet alors d'écrire que $\big(B_k(B_k-I_n)\big)^N=\left(\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}\,D_k\right)^N=\left(\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}\right)^N\,D_k^N$.

$\big(B_k(B_k-I_n)\big)^N=\left(\big[B(B-I_n)\big]^{2^k}\right)^N\,D_k^N=\left(\big[B(B-I_n)\big]^N\right)^{2^k}\,D_k^N=0_n^{2^k}\,D_k=0_n$ car $\big(B(B-I_n)\big)^N=0_n$.

Ainsi $B_k(B_k-I_n)$ est nilpotente, $I_n+2\,B_k(B_k-I_n)$ est inversible et $\big[I_n+2B_k(B_k-I_n)\big]\times(2B_k-I_n)^{-1}$ est inversible.

Donc $2B_{k+1}-I_n$ est inversible.

$\boxed{\blacktriangle 2}$ $B_{k+1}-B=\big[(B_k-B)^2-(B^2-B)\big]\times(2B_k-I_n)^{-1}=\Big[\big(B(B-I_n)\,C_k\big)^2-B(B-I_n)\Big]\times(2B_k-I_n)^{-1}$.

C_k commute avec B donc avec $B^2-B=B(B-I_n)$ d'après $\boxed{\text{R3}}$.

Alors $\boxed{\text{R4}}$ donne $\big(B(B-I_n)\,C_k\big)^2=\big(B(B-I_n)\big)^2\,C_k^2=B(B-I_n)\,B(B-I_n)\,C_k^2$.

Ainsi $B_{k+1}-B=\Big[\big(B(B-I_n)\,B(B-I_n)\,C_k^2-B(B-I_n)\Big]\times(2B_k-I_n)^{-1}$.

Donc $B_{k+1}-B=B(B-I_n)\,\Big[\big(B(B-I_n)\,C_k^2-I_n\big)\Big]\times(2B_k-I_n)^{-1}$.

Posons $C_{k+1}=\Big[\big(B(B-I_n)\,C_k^2-I_n\big)\Big]\times(2B_k-I_n)^{-1}$.

C_{k+1} est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_{k+1}-B=\big[B(B-I_n)\big]\,C_{k+1}$.

$\boxed{\blacktriangle 3}$ Nous avons vu que : $B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\big[B_k(B_k-I_n)\big]^2\,\big[(2B_k-I_n)^{-1}\big]^2$.

Alors $B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\left(\left[B(B-I_n)\right]^{2^k}D_k\right)^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$.

Rappelons que D_k commute avec $\left[B(B-I_n)\right]^{2^k}$.

Alors $\boxed{\text{R4}}$ donne $\left(\left[B(B-I_n)\right]^{2^k}D_k\right)^2=\left(\left[B(B-I_n)\right]^{2^k}\right)^2D_k^2=\left[B(B-I_n)\right]^{2^k\times 2}D_k^2=\left[B(B-I_n)\right]^{2^{k+1}}D_k^2$.

$B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\left[B(B-I_n)\right]^{2^{k+1}}D_k^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$. Posons $D_{k+1}=D_k^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$.

D_{k+1} est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_{k+1}(B_{k+1}-I_n)=\left[B(B-I_n)\right]^{2^{k+1}}D_{k+1}$.

$\boxed{▲4}$ B commute avec B_k et I_n donc B commute avec $2B_k-I_n$ d'après $\boxed{\text{R6}}$.

Alors $\boxed{\text{R5}}$ montre que B commute avec $(2B_k-I_n)^{-1}$. Résultat à retenir car nous l'utiliserons encore dans $\boxed{▲5}$.

B commute avec B_k donc avec B_k^2 d'après $\boxed{\text{R1}}$.

Finalement B commute avec le produit $B_k^2\,(2B_k-I_n)^{-1}$ d'après $\boxed{\text{R7}}$ donc avec B_{k+1}.

$B_{k+1}B=BB_{k+1}$.

$\boxed{▲5}$ $C_{k+1}=\left[\left(B(B-I_n)\,C_k^2-I_n\right)\right]\times(2B_k-I_n)^{-1}$.

B commute avec C_k donc avec C_k^2 d'après $\boxed{\text{R1}}$.

B commute avec B donc avec $B(B-I_n)$ qui est un polynôme de B d'après $\boxed{\text{R3}}$.

Alors B commute avec le produit $B(B-I_n)\,C_k^2$ d'après $\boxed{\text{R7}}$ et avec I_n.

Donc B commute avec $B(B-I_n)\,C_k^2-I_n$ d'après $\boxed{\text{R6}}$. Mais nous avons vu que B commute avec $(2B_k-I_n)^{-1}$.

Alors B commute avec $\left[\left(B(B-I_n)\,C_k^2-I_n\right)\right]\times(2B_k-I_n)^{-1}$ d'après $\boxed{\text{R7}}$ donc avec C_{k+1}.

$C_{k+1}B=BC_{k+1}$.

$\boxed{▲6}$ $D_{k+1}=D_k^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$.

B commute avec D_k donc avec D_k^2 d'après $\boxed{\text{R1}}$.

Nous avons vu que B commute avec $(2B_k-I_n)^{-1}$ donc B commute avec $\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$ d'après $\boxed{\text{R1}}$.

Alors B commute avec le produit $D_k^2\left[(2B_k-I_n)^{-1}\right]^2$ d'après $\boxed{\text{R7}}$ donc avec D_{k+1}.

$D_{k+1}B=BD_{k+1}$.

$$\boxed{\text{La propriété } (\mathcal{H}_{k+1}) \text{ est vraie.}}$$

Nous avons vu que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie et que si pour k dans $\mathbb{N}$ la propriété $(\mathcal{H}_k)$ est vraie alors la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{H}_k) \text{ est vraie pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}.}$$

(c) $\lim\limits_{k\to+\infty}2^k=+\infty$. Alors il existe un élément p de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ 2^k\geqslant N$.

$\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ \left(B(B-I_n)\right)^{2^k}=\left(B(B-I_n)\right)^N\left(B(B-I_n)\right)^{2^k-N}=0_n\times\left(B(B-I_n)\right)^{2^k-N}=0_n$.

Retenons pour la suite que $\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ \left(B(B-I_n)\right)^{2^k}=0_n$.

Donc $\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ B_k(B_k-I_n)=\left[B(B-I_n)\right]^{2^k}D_k=0_n\times D_k=0_n$. En particulier $B_p(B_p-I_n)=0_n$.

$$\boxed{\text{Il existe un élément } p \text{ de } \mathbb{N} \text{ tel que } B_p(B_p - I_n) = 0_n.}$$

Mieux $\boxed{\text{il existe un élément } p \text{ de } \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ B_k(B_k - I_n) = 0_n \text{ ou } B_k^2 = B_k.}$

$B_p(B_p - I_n) = 0_n$ donc d'après **Q1 (b)** :

$$\boxed{B_p \text{ est diagonalisable. Mieux, pour tout élément } k \text{ de } [\![p, +\infty[\![,\ B_k \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $Bk - B = B(B - I_n)\, C_k$ donc $\big(Bk - B\big)^N = \big(B(B - I_n)\, C_k\big)^N$.

C_k commute avec B donc avec $B^2 - B$ d'après $\boxed{\text{R3}}$. C_k commute avec $B(B - I_n)$.

Alors, d'après $\boxed{\text{R4}}$, $\big(Bk - B\big)^N = \big(B(B - I_n)\, C_k\big)^N = \big(B(B - I_n)\big)^N C_k^N = 0_n \times C_k^N = 0_n$.

Ainsi $B_k - B$ est nilpotente. Clairement $B - B_k$ est également nilpotente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ B - B_k \text{ est nilpotente. En particulier } B - B_p \text{ est nilpotente.}}$$

Soit k un élément de $[\![p, +\infty[\![$. Nous avons déjà vu que $\big(B(B - I_n)\big)^{2^k} = 0_n$.

Alors $B_k(B_k - I_n) = \big[B(B - I_n)\big]^{2^k} D_k = 0_n \times D_k = 0_n$. Donc $B_k^2 - B_k = 0_n$. Ainsi $B_k^2 = B_k$.

$2B_k$ et I_n commutent donc $(2B_k - I_n)^2 = 4B_k^2 - 4B_k + I_n = 4(B_k^2 - B_k) + I_n = I_n$.

Alors $(2B_k - I_n)(2B_k - I_n) = I_n$. Par conséquent l'inverse de $2B_k - I_n$ est $2B_k - I_n$.

Dans ces conditions : $B_{k+1} = B_k^2\,(2B_k - I_n)^{-1} = B_k^2\,(2B_k - I_n) = B_k\,(2B_k - I_n) = 2B_k^2 - B_k = 2B_k - B_k = B_k$ car $B_k^2 = B_k$.

$$\boxed{\forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ B_{k+1} = B_k.}$$

La suite $(B_k)_{k \geqslant p}$ est constante. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ B_k = B_p.}$$

PROBLÈME

PARTIE I : Étude de deux endomorphismes.

Dans la suite nous utiliserons le plus possible la notion de polynôme.

1. • Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

$X-1$ est un élément de $\mathbb{R}_1[X]$ donc $(X-1)P$ est un élément de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Alors $\big((X-1)P\big)'$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et ainsi $g(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Finalement : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. g est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.

$g(\lambda P+Q) = \big((X-1)(\lambda\, P+Q)\big)' = \big(\lambda\,(X-1)P+(X-1)Q)\big)' = \lambda\,\big((X-1)P\big)' + \big((X-1)Q)\big)' = \lambda\, g(P)+g(Q).$

$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(\lambda P+Q) = \lambda\, g(P)+g(Q)$. g est linéaire.

$$\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Posons $Q=g(P)$ et calculons $f(Q)$. $Q=g(P)=\big((X-1)P\big)' = (X-1)\,P'+P$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, f(Q)(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x Q(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x-1}\Big[(t-1)\,P(t)\Big]_1^x = \dfrac{(x-1)\,P(x)}{x-1} = P(x).$

$f(Q)(1) = Q(1) = g(P)(1) = (1-1)\,P'(1)+P(1) = P(1).$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(Q)(x) = P(x)$. Alors $f(Q)=P$ et ainsi $f\big(g(P)\big)=P$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } P \text{ de } \mathbb{R}_n[X],\ f\big(g(P)\big)=P.}$$

Soit P un élément de $\operatorname{Ker} g$. $g(P)=0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors $P=f\big(g(P)\big)=f(0_{\mathbb{R}_n[X]})$.

Calculons $f(0_{\mathbb{R}_n[X]})$ car n'oublions pas que f n'est pas encore un endomorphisme.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, f(0_{\mathbb{R}_n[X]})(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 0$ et $f(0_{\mathbb{R}_n[X]})(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}(1)=0$. Finalement $\forall x \in \mathbb{R}, f(0_{\mathbb{R}_n[X]})(x)=0$.

Donc $f(0_{\mathbb{R}_n[X]}) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors $P = f(0_{\mathbb{R}_n[X]}) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}.}$$

3. $\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ donc g est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension finie.

Le cours indique alors que g est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$ donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

$$\boxed{\text{Pour faire plaisir au concepteur nous dirons aussi que } g \text{ est un isomorphisme.}}$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = f\big(g\,(g^{-1}(P))\big) = g^{-1}(P)$ d'après **Q2**. $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P)=g^{-1}(P)$.

Alors nous pouvons maintenant considérer f comme une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et de plus $f=g^{-1}$.

$$\boxed{g^{-1} = f.}$$

g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc g^{-1} est également un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

$$\boxed{\text{Pour encore faire plaisir au concepteur nous dirons aussi que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

4. • Soit k un élément de $[\![0, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f(e_k)(x) = \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x t^k \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x-1} \left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1} \right]_1^x = \dfrac{1}{k+1} \, \dfrac{x^{k+1} - 1}{x-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f(e_k)(x) = \dfrac{1}{k+1} \, \dfrac{(x-1)(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1)}{x-1} = \dfrac{1}{k+1}(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1)$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f(e_k)(x) = \dfrac{1}{k+1} \, (1 + x + \cdots + x^{k-1} + x^k) = \dfrac{1}{k+1} \, (e_0 + e_1 + \cdots + e_{k-1} + e_k)(x) = \left(\dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i \right)(x)$.

$f(e_k)(1) = e_k(1) = 1^k = 1 = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} 1 = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} 1^i = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i(1) = \left(\dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i \right)(1)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ f(e_k)(x) = \left(\dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i \right)(x)$. Donc : $f(e_k) = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0, n]\!],\ f(e_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} e_i = \frac{1}{k+1} \big(e_0 + e_1 + \cdots + e_k\big).}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ de } f \text{ dans la base } (e_0, e_1, \ldots, e_n) \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{k+1} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{k+1} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{k+1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.}$$

• Soit k un élément de $[\![0, n]\!]$. $g(e_k) = (X-1)\, e_k' + e_k$.

$g(e_0) = (X-1)\, 0_{\mathbb{R}_n[X]} + e_0 = e_0$.

Supposons que k n'est pas nul. $g(e_k) = (X-1)\, k\, X^{k-1} + e_k = k\, X^k - k\, X^{k-1} + e_k$.

Donc $g(e_k) = k\, e_k - k\, e_{k-1} + e_k = (k+1)\, e_k - k\, e_{k-1}$.

$$\boxed{g(e_0) = e_0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ g(e_k) = (k+1)\, e_k - k\, e_{k-1}.}$$

$$\boxed{\text{La matrice } B \text{ de } g \text{ dans la base } (e_0, e_1, \ldots, e_n) \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.}$$

5. A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Le spectre de A (resp. B) est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Donc $\operatorname{Sp} A = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right\}$ et $\operatorname{Sp} B = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$.

De plus $1 > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ et $1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1$.

Alors A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ ayant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes donc A et B sont diagonalisables. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont deux endomophismes diagonalisables de } \mathbb{R}_n[X].}$$

PARTIE II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

1. Soit k un élément de $\mathbb{N}$ et soit r un élément de $[\![0,n]\!]$.

Dans un premier temps supposons k non nul.

$\big(\{Z_k=i\}\big)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne : $P(Z_{k+1}=r)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)$.

Soit i un élément de $[\![0,n]\!]$. Calculons $P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)$.

- Supposons $i<r$.

Si $\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}$ est réalisé le $(k+1)^{\text{ème}}$ se fait dans l'urne U_i qui contient $i+1$ boules numérotées de 0 à i et il donne une boule numérotée r avec $r>i$! Ceci est impossible.

Donc $\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}$ est vide et $P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=0$.

- Supposons $i\geqslant r$ et $P(Z_k=i)\neq 0$.

$P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=P(Z_k=i)\,P_{\{Z_k=i\}}(Z_{k+1}=r)$.

Supposons $\{Z_k=i\}$ réalisé. Le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne U_i qui contient $i+1$ boules numérotées de 0 à i ; il donne alors la boule numéro r avec la probabilité $\dfrac{1}{i+1}$ car $r\leqslant i$.

Donc $P_{\{Z_k=i\}}(Z_{k+1}=r)=\dfrac{1}{i+1}\cdot$ Alors $P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=P(Z_k=i)\,P_{\{Z_k=i\}}(Z_{k+1}=r)=\dfrac{P(Z_k=i)}{i+1}\cdot$

- Supposons $i\geqslant r$ et $P(Z_k=i)=0$.

L'inclusion $\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\subset\{Z_k=i\}$ et la croissance de P donne :

$0\leqslant P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)\leqslant P(Z_k=i)=0$. Ainsi $P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=P(Z_k=i)=0$.

Alors on a encore $P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=\dfrac{P(Z_k=i)}{i+1}\cdot$

En conclusion : $P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=\begin{cases}\dfrac{P(Z_k=i)}{i+1} & \text{si } i\geqslant r\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $P(Z_{k+1}=r)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P\big(\{Z_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=r\}\big)=\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}\cdot$

Montrons que ceci vaut encore pour $k=0$.

$P(Z_1=r)=\dfrac{1}{n+1}$ car le premier tirage se fait dans U_n.

Rappelons que Z_0 est la variable certaine égale à n. Alors $\displaystyle\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_0=i)}{i+1}=\frac{P(Z_0=n)}{n+1}=\frac{1}{n+1}=P(Z_1=r)$.

Plus de doute :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \forall r\in[\![0,n]\!],\ P(Z_{k+1}=r)=\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}\cdot}$$

Remarque *Le cas particulier $k=0$ n'était pas franchement utile sinon pour s'éviter d'écrire le* $1^{\text{ème}}$ *tirage ! !*

2. Soit k un élément de $\mathbb{N}$ et r un élément de $[\![0,n-1]\!]$.

- $(n+1)\,P(Z_{k+1}=n)=(n+1)\displaystyle\sum_{i=n}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}=(n+1)\,\frac{P(Z_k=n)}{n+1}=P(Z_k=n).$

- $(r+1)\,P(Z_{k+1}=r)-(r+1)\,P(Z_{k+1}=r+1)=(r+1)\left[\displaystyle\sum_{i=r}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}-\sum_{i=r+1}^{n}\frac{P(Z_k=i)}{i+1}\right]=(r+1)\,\frac{P(Z_k=r)}{r+1}\cdot$

Donc $(r+1)\,P(Z_{k+1}=r)-(r+1)\,P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r)$. Ce qui achève de montrer $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ (n+1)\,P(Z_{k+1}=n)=P(Z_k=n)\quad(\mathcal{R}_1).}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \forall r\in[\![0,n-1]\!],\ (r+1)\,P(Z_{k+1}=r)-(r+1)\,P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r)\quad(\mathcal{R}_2).}$$

Observons que $P(Z_{k+1}=n+1)=0$.

Alors $(n+1)\,P(Z_{k+1}=n)-(n+1)\,P(Z_{k+1}=n+1)=(n+1)\,P(Z_{k+1}=n)=P(Z_k=n)$.

Ainsi $(\mathcal{R}_2)$ vaut pour $r=n$ et coïncide dans ce cas avec $(\mathcal{R}_1)$.

Ceci permet de rassembler les deux formules en une seule.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \forall r\in[\![0,n]\!],\ (r+1)\,P(Z_{k+1}=r)-(r+1)\,P(Z_{k+1}=r+1)=P(Z_k=r)\quad(\mathcal{R}).}$$

3. • $\forall k\in\mathbb{N},\ (n+1)\,P(Z_{k+1}=n)=P(Z_k=n)$ d'après $(\mathcal{R}1)$.

En sommant il vient $(n+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_{k+1}=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_k=n)$ car les deux sommes existent. Alors :

$$S_n=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_k=n)=(n+1)\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_{k+1}=n)=(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_k=n)=(n+1)\big(S_n-P(Z_0=n)\big)=(n+1)\,\big(S_n-1\big).$$

Ainsi $(n+1-1)\,S_n=n+1$. Donc :

$$\boxed{S_n=\frac{n+1}{n}\cdot}$$

- Pour parler de S_{n-1} supposons $n\geqslant 2$.

D'après $(\mathcal{R}_2)$, $\forall k\in\mathbb{N},\ (n-1+1)\,P(Z_{k+1}=n-1)-(n-1+1)\,P(Z_{k+1}=n-1+1)=P(Z_k=n-1)$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N},\ n\,P(Z_{k+1}=n-1)-n\,P(Z_{k+1}=n)=P(Z_k=n-1)$.

En sommant il vient $n\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_{k+1}=n-1)-n\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_{k+1}=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_k=n-1)$ car toutes les sommes existent.

Ainsi : $n\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_k=n-1)-n\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_k=n)=S_{n-1}$.

Donc $n\,\big(S_{n-1}-P(Z_0=n-1)\big)-n\,\big(S_n-P(Z_0=n)\big)=S_{n-1}$.

Or $P(Z_0=n-1)=0$ et $P(Z_0=n)=1$ donc $S_{n-1}=n\,\big(S_{n-1}-0\big)-n\,\big(S_n-1\big)=n\,S_{n-1}-n\,S_n+n$.

Or $S_n=\dfrac{n+1}{n}$ donc $S_{n-1}=n\,S_{n-1}-(n+1)+n=n\,S_{n-1}-1$. Ainsi $S_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2,+\infty[\![,\ S_{n-1}=\frac{1}{n-1}\cdot}$$

- Ici encore nous supposerons $n\geqslant 2$.

Si $n=2$ la suite $(r\,S_r)_{1\leqslant r\leqslant n-1}$ n'a qu'un terme donc elle est constante.

Supposons $n \geqslant 3$. Soit r un élément de $[\![1, n-2]\!]$. Montrons que $(r+1)\, S_{r+1} = r\, S_r$.

$(\mathcal{R}_2)$ donne $\forall k \in \mathbb{N},\ (r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r)$.

En sommant il vient $(r+1) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r) - (r+1) \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ car toutes les sommes existent. Donc :

$$S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r) = (r+1) \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r) - (r+1) \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r+1).$$

$$S_r = (r+1) \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = r) - (r+1) \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = r+1) = (r+1)\big(S_r - P(Z_0 = r)\big) - (r+1)\big(S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)\big).$$

$$S_r = (r+1)\big(S_r - P(Z_0 = r)\big) - (r+1)\big(S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)\big). \quad (\bigstar)$$

Or $r \in [\![0, n-2]\!]$ donc $r < n$ et $r+1 < n$. Ainsi $P(Z_0 = r) = P(Z_0 = r+1) = 0$.

Alors $S_r = (r+1)\, S_r - (r+1)\, S_{r+1}$ ou $r\, S_r = (r+1)\, S_{r+1}$.

Finalement $\forall r \in [\![1, n-2]\!],\ (r+1)\, S_{r+1} = r\, S_r$ donc la suite $(r\, S_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2, +\infty[\![, \text{ la suite } (r\, S_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1} \text{ est constante.}}$$

Remarques *Supposons $n \geqslant 2$. La suite $(r\, S_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante. Alors $\forall r \in [\![1, n-1]\!],\ r\, S_r = (n-1)\, S_{n-1} = 1$.*

Donc $\boxed{\forall r \in [\![1, n-1]\!],\ S_r = \dfrac{1}{r}\cdot}$

2. Notons que la relation $S_r = (r+1)\big(S_r - P(Z_0 = r)\big) - (r+1)\big(S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)\big)$ $(\bigstar)$ aurait pu être établie (à l'aide de $(\mathcal{R})$) dès le départ et ceci pour tout r dans $[\![1, n]\!]$ en posant $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n+1)$ (somme qui existe et qui vaut 0). Cela nous aurait alors évité de faire trois fois la même chose pour traiter Q3...

4. Soit k un élément de $\mathbb{N}$ et soit x un réel.

$(\mathcal{R})$ donne : $\forall r \in [\![0, n]\!],\ P(Z_k = r) = (r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1)$.

Alors $F_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r = \sum_{r=0}^{n} \Big[(r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1)\Big]\, x^r$.

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, P(Z_{k+1} = r)\, x^r - \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1)\, x^r.$$

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, P(Z_{k+1} = r)\, x^r - \sum_{r=1}^{n+1} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^{r-1}.$$

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, P(Z_{k+1} = r)\, x^r - \sum_{r=1}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^{r-1} \text{ car } P(Z_{k+1} = n+1) = 0.$$

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^r + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1} = r)\, x^r - F'_{k+1}(x) = \sum_{r=1}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^r + F_{k+1}(x) - F'_{k+1}(x).$$

$$F_k(x) = x \sum_{r=1}^{n} r\, P(Z_{k+1} = r)\, x^{r-1} + F_{k+1}(x) - F'_{k+1}(x) = x\, F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) - F'_{k+1}(x) = (x-1)\, F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x).$$

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = (x-1)\, F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x).}$$

Remarque *Notons que pour tout élément k de $\mathbb{N}$, F_k et F_{k+1} sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et* $\boxed{g(F_{k+1}) = F_k}$.

5. (a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

Notons que Z_k et $Z_k\,(Z_k-1)$ sont des variables aléatoires finies donc elles possèdent une espérance.

F_k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car F_k est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F_k'(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, r\, x^{r-1}$ et $F_k''(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, r\,(r-1)\, x^{r-2}$.

Donc $F_k'(1) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} r\, P(Z_k = r) = E(Z_r)$ et $F_k''(1) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} r\,(r-1)\, P(Z_k = r) = E(\, Z_r\,(Z_r - 1))$ d'après le théorème de transfert.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F_k'(1) = E(Z_r) \text{ et } F_k''(1) = E(\, Z_r\,(Z_r-1)).}$$

(b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. F_k et F_{k+1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car ce sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = (x-1)\, F_{k+1}'(x) + F_{k+1}(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_k'(x) = F_{k+1}'(x) + (x-1)\, F_{k+1}''(x) + F_{k+1}'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k'(x) = 2\, F_{k+1}'(x) + (x-1)\, F_{k+1}''(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_k''(x) = 2\, F_{k+1}''(x) + F_{k+1}''(x) + (x-1)\, F_{k+1}'''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k''(x) = 3\, F_{k+1}''(x) + (x-1)\, F_{k+1}'''(x)$.

Alors $F_k'(1) = 2\, F_{k+1}'(1) + (1-1)\, F_{k+1}''(1) = 2\, F_{k+1}'(1)$ et $F_k''(1) = 3\, F_{k+1}''(1) + (1-1)\, F_{k+1}'''(1) = 3\, F_{k+1}''(1)$. Alors :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F_{k+1}'(1) = \frac{1}{2}\, F_k'(1) \text{ et } F_{k+1}''(1) = \frac{1}{3}\, F_k''(1).}$$

(c) $\forall k \in \mathbb{N},\ F_{k+1}'(1) = \dfrac{1}{2}\, F_k'(1)$ et $F_{k+1}''(1) = \dfrac{1}{3}\, F_k''(1)$.

Alors $\big(F_k'(1)\big)_{k\geqslant 0}$ et $\big(F_k''(1)\big)_{k\geqslant 0}$ sont des suites géométriques de raisons $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ F_k'(1) = F_0'(1)\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ et $F_k''(1) = F_0''(1)\, \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_0(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_0 = r)\, x^r = P(Z_0 = n)\, x^n = x^n$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F_0'(x) = n\, x^{n-1}$ et $F_0''(x) = n(n-1)\, x^{n-2}$. Ainsi $F_0'(1) = n$ et $F_0''(1) = n(n-1)$. Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F_k'(1) = n\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n}{2^k} \text{ et } F_k''(1) = n(n-1)\, \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{n(n-1)}{3^k}.}$$

Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $E(Z_k) = F_k'(1) = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Z_k possède une variance car c'est une variable aléatoire finie.

$$V(Z_k) = E\big(Z_k\,(Z_k-1)\big) + E(Z_k) - \big(E(Z_k)\big)^2 = F_k''(1) + n\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2 = n(n-1)\,\left(\frac{1}{3}\right)^k + n\left(\frac{1}{2}\right)^k - n^2\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(Z_k) = n\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ et } V(Z_k) = n(n-1)\,\left(\frac{1}{3}\right)^k + n\left(\frac{1}{2}\right)^k - n^2\left(\frac{1}{4}\right)^k.}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(Z_k) = \frac{n}{2^k} \text{ et } V(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.}$$

PARTIE III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

1. $\forall k \in \mathbb{N},\ g(F_{k+1}) = F_k$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ F_{k+1} = g^{-1}(F_k) = f(F_k)$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ F_k = f^k(e_n)$.

- Nous avons vu que $\forall x \in \mathbb{R}, F_0(x) = x^n$. Ainsi $F_0 = e_n$. Alors $F_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}(e_n) = f^0(e_n)$.

La propriété est vraie pour $k = 0$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$F_{k+1} = f(F_k) = f\big(f^k(e_n)\big) = f^{k+1}(e_n)$ ce qui achève la récurrence.

Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r(x) = \left(\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r\right)(x)$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ F_k = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r = F_k = f^k(e_n).}$$

2. Pour tout r dans $[\![0, n]\!]$, $u_r = (X-1)^r$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré r.

$(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est donc une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$\boxed{(u_0, u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. Soit r un élément de $[\![0, n]\!]$. Soit x un réel.

Supposons x différent de 1. $f(u_r)(x) = \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x (t-1)^r\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x-1} \left[\dfrac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \dfrac{1}{x-1}\, \dfrac{(x-1)^{r+1}}{r+1}$.

$f(u_r)(x) = \dfrac{1}{r+1}\,(x-1)^r = \left(\dfrac{1}{r+1}\, u_r\right)(x)$.

De plus $f(u_r)(1) = u_r(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$. Or : $\dfrac{1}{r+1}\, u_r(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$. Donc $f(u_r)(1) = \left(\dfrac{1}{r+1}\, u_r\right)(1)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ f(u_r)(x) = \left(\dfrac{1}{r+1}\, u_r\right)(x)$. Ce qui donne $f(u_r) = \dfrac{1}{r+1}\, u_r$.

$$\boxed{\forall r \in [\![0, n]\!],\ f(u_r) = \frac{1}{r+1}\, u_r.}$$

Pour tout r dans $[\![0, n]\!]$, $u_r \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $f(u_r) = \dfrac{1}{r+1}\, u_r$. Donc pour tout r dans $[\![0, n]\!]$, u_r est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\dfrac{1}{r+1}$.

$(u_0, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de f et nous retrouvons ainsi que f est diagonalisable.

Remarque *Nous retrouvons aussi que* $\mathrm{Sp}\, f = \left\{\dfrac{1}{r+1}\ ;\ r \in [\![0, n]\!]\right\}$.

4. $e_n = X^n = (X - 1 + 1)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (X-1)^r \times 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ grâce à la formule du binôme.

$$\boxed{e_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r.}$$

La formule du binôme donne encore : $\forall r \in [\![0, n]\!],\ u_r = (X-1)^r = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} X^j (-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$

$$\boxed{\forall r \in [\![0, n]\!],\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.}$$

5. $\forall r \in [\![0, n]\!],\ f(u_r) = \dfrac{1}{r+1}\, u_r$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall r \in [\![0, n]\!],\ f^k(u_r) = \left(\dfrac{1}{r+1}\right)^k u_r$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(e_n) = f^k\left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r\right) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^k(u_r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(\frac{1}{r+1}\right)^k u_r = \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\, u_r.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\, u_r.}$$

6. Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$$F_k = f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\, u_r = \sum_{r=0}^{n} \left[\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} e_j\right] = \sum_{r=0}^{n} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\, e_j.$$

En commutant les deux sommes il vient : $F_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\, e_j$. Alors :

$F_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right] e_j$. Or $F_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j)\, e_j$ et $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in [\![0, n]\!],\ P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.}$$

♣ *Exercice* *Montrer que* $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in [\![0, n]\!],\ P(Z_k = j) = \dbinom{n}{j} \displaystyle\sum_{r=0}^{n-j} (-1)^r \frac{\binom{n-j}{r}}{(r+j+1)^k}.$

7. Application.

(a) Soit j un élément de $[\![0, n]\!]$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| = \left|\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right| \leqslant \sum_{r=j}^{n} \left|(-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right| = \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Or $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall r \in [\![j,n]\!],\ \dfrac{1}{(r+1)^k} \leqslant \dfrac{1}{(j+1)^k}$ et $\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{j} \geqslant 0$. Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall r \in [\![j,n]\!],\ \dfrac{\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{j}}{(r+1)^k} \leqslant \dfrac{\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{j}}{(j+1)^k}$.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leqslant \displaystyle\sum_{r=j}^{n} \frac{\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{j}}{(r+1)^k} \leqslant \sum_{r=j}^{n} \frac{\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{j}}{(j+1)^k} = \frac{1}{(j+1)^k}\sum_{r=j}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{j}$.

En posant $M_{n,j} = \sum_{r=j}^{n}\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{j}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leqslant \dfrac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$.

$$\boxed{\text{Soit } j \text{ un élément de } [\![0,n]\!].\ \forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k} \text{ où } M_{n,j} = \sum_{r=j}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{j}.}$$

Soit j un élément de $[\![1,n]\!]$. $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant P(Z_k = j) = |P(Z_k = j)| \leqslant \dfrac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$ et la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$ converge car $\left|\dfrac{1}{j+1}\right| < 1$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } j \text{ de } [\![1,n]\!], \text{ la série } \sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = j) \text{ converge.}}$$

♣ *Exercice* *Montrer que* $\forall j \in [\![1,n]\!],\ M_{n,j} = 2^{n-j}\dbinom{n}{j}$.

(b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $P(Z_k = 0) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\dbinom{n}{r}\dbinom{r}{0}}{(r+1)^k} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k}$.

$$|P(Z_k = 0) - 1| = \left|\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k}\right| \leqslant \sum_{r=1}^{n}\left|(-1)^r \frac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k}\right| = \sum_{r=1}^{n}\frac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

$\forall r \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{1}{(r+1)^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ et $\dbinom{n}{r} \geqslant 0$ donc $\forall r \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k} \leqslant \dfrac{\dbinom{n}{r}}{2^k}$.

$$|P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \sum_{r=1}^{n}\frac{\dbinom{n}{r}}{(r+1)^k} \leqslant \sum_{r=1}^{n}\frac{\dbinom{n}{r}}{2^k} = \frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r} \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = \frac{1}{2^k}2^n = \frac{2^n}{2^k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \frac{C_n}{2^k} \text{ où } C_n = 2^n.}$$

$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \dfrac{C_n}{2^k}$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{C_n}{2^k} = 0$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(Z_k = 0) = 1$.

Ainsi la suite de terme général $P(Z_k = 0)$ ne converge pas ver 0.

$$\boxed{\text{La série de terme général } P(Z_k = 0) \text{ diverge.}}$$

♣ *Exercice* *Montrer que presque sûrement on finira par tirer dans l'urne* U_0 *et ceci jusqu'à la fin des temps...*