J.F. COSSUTTA

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

ECRICOME 2013

EXERCICE 1

Nous supposerons dans cet exercice que k est supérieur ou égal à deux...

1. ${}^tB = {}^t\big({}^tAA\big) = {}^tA\,{}^t\big({}^tA\big) = {}^tAA = B$.

$$\boxed{{}^tB = B.\ B \text{ est une matrice symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $< BX, X >=< X, BX >= {}^tX(BX) = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < BX, X >= \|AX\|^2.}$$

2. B est une matrice symétrique à coefficients réels donc ses valeurs propres sont réelles.

Autrement dit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, B = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, B$.

Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $BX = \lambda\, X$.

$\|AX\|^2 =< BX, X >=< \lambda\, X, X >= \lambda\, < X, X >= \lambda\, \|X\|^2$. Or $\|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ donc λ est positif ou nuls.

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } B \text{ sont réelles et positives ou nulles.}}$$

3. Notons que $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ et que $B = {}^tAA = A^kA = A^{k+1}$. Alors :

$B^k = (A^{k+1})^k = (A^k)^{k+1} = ({}^tA)^{k+1} = {}^tA({}^tA)^k = {}^tAA = B$.

$$\boxed{B^k = B.}$$

$B^k - B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $X^k - X$ est un polynôme annulateur de B. Alors les valeurs propres de B, qui sont des réels positifs ou nul , appartiennent à l'ensemble des racines réelles positives ou nulle du polynôme $X^k - X$.

Or les racines réelles positives ou nulle du polynôme $X^k - X$ sont 0 et 1 ($k \geqslant 2$...).

Ainsi les valeurs propres de B sont des éléments de $\{0, 1\}$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } B \text{ sont 0 et 1.}}$$

4. B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc B est diagonalisable. Mieux, il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPBP = P^{-1}BP = D$. Notons que $B = PDP^{-1}$.

Posons $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. D est semblable à B donc $\mathrm{Sp}\, D = \mathrm{Sp}\, B$. Or $\mathrm{Sp}\, D = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Ainsi, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, α_k vaut 0 ou 1. Donc, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_k^2 = \alpha_k$.

$D^2 = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_n^2) = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = D$. Alors $B^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = B$.

$$\boxed{B^2 = B.}$$

5. • Soit X un élément de $\mathrm{Ker}(B)$. $BX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc, d'après **Q1**, $\|AX\|^2 =< BX, X >=< 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, X >= 0$.

Alors $\|AX\| = 0$ donc $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent X appartient à $\mathrm{Ker}(A)$.

• Réciproquement soit X un élément de $\mathrm{Ker}(A)$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $BX = {}^tAAX = {}^tA0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi X appartient à $\mathrm{Ker}(B)$.

Finalement $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \in \mathrm{Ker}(B) \Longleftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(A)$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A).}$$

Soit Y un élément de $\mathrm{Im}(B)$. Il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = BX$.

$Y = BX = {}^tAAX = A^kAX = A^{k+1}X = A(A^kX)$ donc Y apparient à $\mathrm{Im}(A)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$. Montrons alors que ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension.

Le concepteur s'autorise à parler de noyau et d'image d'une matrice, autorisons nous à utiliser le théorème du rang pour A et pour B.

$\dim \mathrm{Ker}(B) = \dim \mathrm{Ker}(A)$ car $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$. Alors $\dim \mathrm{Im}(B) = n - \dim \mathrm{Ker}(B) = n - \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Nous avons donc $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$ et $\dim \mathrm{Im}(B) = \dim \mathrm{Im}(A)$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A).}$$

6. Soit X un élément de $\mathrm{Im}(A)$. Alors X appartient à $\mathrm{Im}(B)$. Par conséquent il existe un élément Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = BZ$.

Donc $BX = B^2Z = BZ = X$ (ce qui n'est pas un scoop... pour une matrice de projection).

Alors, d'après **Q1**, $\|AX\|^2 =< BX, X >=< X, X >= \|X\|^2$.

Comme $\|AX\|$ et $\|X\|$ sont des réels positifs ou nuls : $\|AX\| = \|X\|$. Ainsi :

$$\boxed{\forall X \in \mathrm{Im}\, A,\ \|AX\| = \|X\|.}$$

Les nostalgiques pourront regarder sur le même thème ECRICOME 2000 exercice 1.

Remarque   Il est clair que ce qui précède ne vaut pas pour $k = 1$.

Supposons que $k = 1$. L'hypothèse $A^k = {}^tA$ devient $A = {}^tA$ ce qui signifie que la matrice A est symétrique.

On a alors $B = {}^tAA = A^2$ et, $B^2 = B$ équivaut à $A^4 = A^2$. Or A symétrique ne donne pas nécessairement $A^4 = A^2$!

Par exemple la matrice $2\,I_n$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais $(2\,I_n)^4$ n'est pas égal à $(2\,I_n)^2$.

EXERCICE 2

1. Étude de f.

(a) Notons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.

De plus $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{5}\left(2x-4x^3+2y\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{5}\left(2y-4y^3+2x\right)$.

Soit (a,b) un élément de $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2}\iff \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0\iff \begin{cases}\dfrac{1}{5}\left(2a-4a^3+2b\right)=0\\ \dfrac{1}{5}\left(2b-4b^3+2a\right)=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+b-2a^3=0\\ a+b-2b^3=0\end{cases}.$$

En remplaçant la deuxième ligne par la différence de la deuxième et de la première on obtient :

$$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2}\iff\begin{cases}a+b-2a^3=0\\ 2a^3-2b^3=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+b-2a^3=0\\ a^3=b^3\end{cases}\iff\begin{cases}a+b-2a^3=0\\ a=b\end{cases}.$$

On peut donc déja dire, avant de continuer que :

$$\boxed{\text{si } (a,b) \text{ est un point critique de } f,\ a=b\,!}$$

$$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2}\iff\begin{cases}a+b-2a^3=0\\ a=b\end{cases}\iff\begin{cases}a=b\\ 0=2a-2a^3=2a(1-a^2)=2a(1-a)(1+a)\end{cases}\iff\begin{cases}a=b\\ a\in\{0,1,-1\}\end{cases}.$$

$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2}\iff (a,b)=(0,0)$ ou $(a,b)=(1,1)$ ou $(a,b)=(-1,-1)$.

Notons que $f(0,0)=0$ et $f(1,1)=f(-1,-1)=\dfrac{2}{5}\cdot$

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont } (0,0),\ (1,1) \text{ et } (-1,-1).\ \text{De plus } f(0,0)=0 \text{ et } f(1,1)=f(-1,-1)=\frac{2}{5}\cdot}$$

Tu rigoles coco, nous on admet rien. On montre !

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{R}^2$. Posons $D(x,y)=f(x,y)-\dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2$ et montrons que $D(x,y)\leqslant 0$.

$D(x,y)=\dfrac{1}{5}\left(x^2\,(1-x^2)+y^2\,(1-y^2)+2\,xy\right)-\dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2.$

$D(x,y)=\dfrac{1}{10}\left(2x^2\,(1-x^2)+2y^2\,(1-y^2)+4\,xy-4x^2-4y^2+(x^2+y^2)^2\right).$

$D(x,y)=\dfrac{1}{10}\left(2x^2-2x^4+2y^2-2y^4+4\,xy-4x^2-4y^2+x^4+y^4+2x^2y^2\right)=-\dfrac{1}{10}\left(x^4+y^4-2x^2y^2+2x^2+2y^2-4xy\right).$

$D(x,y)=-\dfrac{1}{10}\Big((x^2-y^2)^2+2(x-y)^2\Big)$. Donc $D(x,y)\leqslant 0$.

Alors $f(x,y)-\dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2\leqslant 0$ et ainsi $f(x,y)\leqslant\dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)-\dfrac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2.$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\leqslant \frac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2\ .}$$

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ g'(t)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{t}{5}=\dfrac{1}{5}\big(2-t\big)$.

$\forall t\in[0,2[,\ g'(t)>0,\ g'(2)=0$ et $\forall t\in]2,+\infty[,\ g'(t)<0$.

Alors g est strictement croissante sur $[0,2]$ et strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

De plus $g(2)=\dfrac{2}{5}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=-\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{g \text{ n'admet pas de minimum sur } \mathbb{R}_+.\ g \text{ admet un maximum global sur } \mathbb{R}_+ \text{ qui vaut } \frac{2}{5} \text{ et atteint en le seul point } 2.}$$

(c) $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ g(t)\leqslant\dfrac{2}{5}\cdot$ Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\leqslant\dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)-\dfrac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2=g(x^2+y^2)\leqslant\dfrac{2}{5}=g(1,1)=g(-1,-1)$.

Alors f possède un maximum qui vaut $\dfrac{2}{5}$ et qui est réalisé en $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Notons que $f(0,0)=0$ et que, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ son maximum ne peut ête réalisé que pour un point critique. Alors :

$$\boxed{f \text{ possède un maximum qui vaut } \frac{2}{5} \text{ et qui est atteint en les seuls points } (1,1) \text{ et } (-1,-1).}$$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x,-x)=\dfrac{1}{5}\big(2x^2(1-x^2)-2x^2\big)=-\dfrac{2}{5}\,x^4$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,-x)=-\infty$. Pas de doute :

$$\boxed{f \text{ n'est pas minorée sur } \mathbb{R}^2.}$$

2. Programmation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Pas de difficulté mais ne pas oublier la variable "tampon" et penser aux cas où N vaut 0 ou 1...

```
program Ecricome_2013;

var k,N:integer;a,b,t:real;

begin

write('Donner N. N=');readln(N);

write('Donner u_0. u_0=');readln(a);

write('Donner u_1. u_1=');readln(b);

for k:=2 to N do
    begin
    t:=(a*a*(1-a*a)+b*b*(1-b*b)+2*a*b)/5;
    a:=b;b:=t;
    end;

if N=0 then b:=a;
writeln('u(',N,')=',b);

end.
```

3. Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

(a) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1})\leqslant \dfrac{2}{5}\leqslant 1$. De plus u_0 et u_1 appartiennent à $[0,1]$. Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant 1$.

Montrons à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2" que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$.

• La propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$ car u_0 et u_1 sont deux éléments de $[0,1]$.

• Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$, avec n dans $\mathbb{N}$, et montrons la pour $n+2$.

$u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1})=\dfrac{1}{5}\left(u_n^2\,(1-u_n^2)+u_{n+1}^2\,(1-u_{n+1}^2)+2\,u_nu_{n+1}\right)$.

L'hypothèse de récurrence indique que $u_n\geqslant 0$ et $u_{n+1}\geqslant 0$. De plus nous savons que $u_n\leqslant 1$ et $u_{n+1}\leqslant 1$.

Alors u_n et u_{n+1} sont deux éléments de $[0,1]$. Donc u_n^2, $1-u_n^2$, u_{n+1}^2 et $1-u_{n+1}^2$ sont des réels positifs ou nuls.

Par produit $u_n^2\,(1-u_n^2)$, $u_{n+1}^2\,(1-u_{n+1}^2)$ et $2\,u_nu_{n+1}$ sont également des réels positifs ou nuls.

Alors u_{n+2} qui vaut $\dfrac{1}{5}\left(u_n^2\,(1-u_n^2)+u_{n+1}^2\,(1-u_{n+1}^2)+2\,u_nu_{n+1}\right)$ est positif ou nul. Ceci achève la récurrence.

Ceci achève également de montrer que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant u_n\leqslant 1.}$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\leqslant \dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)-\dfrac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2\leqslant \dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)$ et $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ x^2\leqslant x$ et $y^2\leqslant y$.

Alors $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ f(x,y)\leqslant \dfrac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)\leqslant \dfrac{2}{5}\left(x+y\right)$.

Soit n dans $\mathbb{N}$. u_n et u_{n+1} sont dans $[0,1]$ donc $u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1})\leqslant \dfrac{2}{5}\left(u_n+u_{n+1}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}\leqslant \frac{2}{5}\left(u_n+u_{n+1}\right).}$$

(b) Montrons à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2" que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n\leqslant a_n$.

• La propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$ car $u_0=a_0$ et $u_1=a_1$.

• Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$, avec n dans $\mathbb{N}$, et montrons la pour $n+2$.

L'hypothèse de récurrence indique que $u_n\leqslant a_n$ et $u_{n+1}\leqslant a_{n+1}$. Alors $u_{n+2}\leqslant \dfrac{2}{5}\left(u_n+u_{n+1}\right)\leqslant \dfrac{2}{5}\left(a_n+a_{n+1}\right)=a_{n+2}$.

Ceci achève la récurrence. Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant a_n.}$$

(c) La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est :

$z\in\mathbb{C}$ et $z^2=\dfrac{2}{5}\left(z+1\right)$.

Soit z un élément de $\mathbb{C}$. $z^2-\dfrac{2}{5}\left(z+1\right)=z^2-\dfrac{2}{5}\,z-\dfrac{2}{5}=\left(z-\dfrac{1}{5}\right)^2-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2-\dfrac{2}{5}=\left(z-\dfrac{1}{5}\right)^2-\dfrac{1}{25}-\dfrac{10}{25}=\left(z-\dfrac{1}{5}\right)^2-\dfrac{11}{25}$.

$z^2-\dfrac{2}{5}\left(z+1\right)=\left(z-\dfrac{1}{5}+\dfrac{\sqrt{11}}{5}\right)\left(z-\dfrac{1}{5}-\dfrac{\sqrt{11}}{5}\right)$. Par conséquent :

$z^2=\dfrac{2}{5}\left(z+1\right)\Longleftrightarrow z^2-\dfrac{2}{5}\left(z+1\right)=0\Longleftrightarrow \left(z-\dfrac{1}{5}+\dfrac{\sqrt{11}}{5}\right)\left(z-\dfrac{1}{5}-\dfrac{\sqrt{11}}{5}\right)=0\Longleftrightarrow z=\dfrac{1}{5}-\dfrac{\sqrt{11}}{5}$ ou $z=\dfrac{1}{5}+\dfrac{\sqrt{11}}{5}$.

Posons $r = \dfrac{1}{5} - \dfrac{\sqrt{11}}{5}$ et $s = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{11}}{5}\cdot$ L'équation caractéristique admet donc deux racine réelles distinctes r et s. Le cours montre alors qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda\, r^n + \mu\, s^n$.

$$\boxed{\text{Il existe quatre réels } \lambda,\ \mu,\ r,\ s \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda\, r^n + \mu\, s^n.}$$

$0 \leqslant s = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{11}}{5} < \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{16}}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = 1$. Alors $|s| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s^n = 0$.

$3 = \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4\,;\ -3 > -\sqrt{11} > -4\,;\ -2 > 1 - \sqrt{11} > -3\,;\ -\dfrac{2}{5} > \dfrac{1-\sqrt{11}}{5} > -\dfrac{3}{5}\cdot\ -\dfrac{3}{5} < r < -\dfrac{2}{5}\cdot$

Alors $|r| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = \lim\limits_{n\to+\infty} s^n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda\, r^n + \mu s^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda\, r^n + \mu s^n) = 0$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0.}$$

PROBLÈME

Dans tout ce problème, si $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $\mathbf{r} \leqslant \mathbf{s}$, on notera $[\![\mathbf{r}, \mathbf{s}]\!]$ l'ensemble $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{s}\}$.

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. Notons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à $[0,1[$ (et pas $[0,1]$) et que **floor** ne semble pas faire partie de Turbo-Pascal.

Notons encore que $t \to at$ définit une bijection de $[0,1]$ sur $[0,a]$ ou de $[0,1[$ sur $[0,a[$.

```
function pipo(a:real):integer;
begin
pipo:=floor(a*random);
end;
```

2. Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.

$P(X_d = k) = P(k \leqslant X < k+1) = P(k < X \leqslant k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ car X est une variable aléatoire à densité de densité f.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

3. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{si } x \in [0,N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_X est une densité de X.

$X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$ (on pourrait presque sûrement dire que $X_d(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$...).

$\forall k \in [\![0, N-1]\!],\ P(X_d = k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \frac{1}{N}\,\mathrm{d}x = \big(k+1-k\big) \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N}.$

$P(X_d = N) = \displaystyle\int_k^{k+1} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car f_X est nulle sur $]N, N+1]$.

$$\boxed{X_d(\Omega) = [\![0, N]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, N]\!],\ P(X_d = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{si } k < N \\ 0 & \text{si } k = N \end{cases}.}$$

$$\boxed{\text{On peut sans doute dire que } X_d \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0, N-1]\!]...}$$

4. Posons $\forall k \in [\![1, 9]\!],\ L(k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$.

- $[\![1, 9]\!]$ est fini.
- $\forall k \in [\![1, 9]\!],\ L(k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \geqslant 0.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} L(k) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \frac{1}{\ln(10)} \big(\ln(10) - \ln(1)\big) = 1$

Ceci suffit pour dire que L est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Remarque *Notons que les points deux et trois donnent* $\forall k \in [\![1,9]\!],\ L(k) \in [0,1]$. *Il n'est donc pas utile de vérifier que* $\forall k \in [\![1,9]\!],\ L(k) \leqslant 1$.

> Pour ne pas contrarier le concepteur nous dirons alors que l'on définit bien (sic) une variable aléatoire discrète Y en posant $Y(\Omega) = [\![1,9]\!]$ et $\forall k \in [\![1,9]\!],\ P(Y=k) = \dfrac{1}{\ln(10)}\ \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\big(\ln(10)\big)\,x} & \text{si } x \in [1,10[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrons que f est une densité de probabilité.

- f est de toute évidence positive sur $\mathbb{R}$.
- $x \to 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Alors f est continue sur $]-\infty,1[$, $[1,10[$ et $[10,+\infty[$.

Ceci suffit pour dire que f est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{1,10\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

- f est nulle sur $]-\infty,1[$ et sur $[10,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

$\forall x \in [1,10[,\ \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(10)}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{\ln(10)}\Big[\ln(t)\Big]_1^x = \frac{1}{\ln(10)}\,(\ln(x) - \ln(1)) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 10^-}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 10^-}\frac{\ln(x)}{\ln(10)} = 1$. Donc $\displaystyle\int_1^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ admettant f pour densité. X prend ses valeurs dans $[1,10[$ donc X_d prend ses valeurs dans $[\![1,9]\!]$.

$\forall k \in [\![1,9]\!],\ P(X_d = k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(10)}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{\ln(10)}\Big[\ln(t)\Big]_k^{k+1} = \frac{1}{\ln(10)}\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$.

Donc $\forall k \in [\![1,9]\!],\ P(X_d = k) = \dfrac{1}{\ln(10)}\ \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$. Ceci achève de montrer que X_d suit la loi de Y.

> La fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\big(\ln(10)\big)\,x} & \text{si } x \in [1,10[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité et si X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ de densité f, sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. (a) Notons F_n la fonction de répartition de nX et F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$. $F_n(x) = P(nX \leqslant x) = P\left(X \leqslant \dfrac{x}{n}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{x}{n}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda}{n} x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$ Finalement :

1. nX suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$

2. La fonction f_n définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{n}\, e^{-\frac{\lambda}{n}\, x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

(b) nX prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ donc $\lfloor nX \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit k dans $\mathbb{N}$.

$P\big(\lfloor nX \rfloor = k\big) = P(k \leqslant nX < k+1) = P(k < nX \leqslant k+1) = F_n(k+1) - F_n(k) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}\,(k+1)} - 1 + e^{-\frac{\lambda}{n}\, k}$.

$P\big(\lfloor nX \rfloor = k\big) = e^{-\frac{\lambda}{n}\, k} - e^{-\frac{\lambda}{n}\,(k+1)} = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\, e^{-\frac{\lambda}{n}\, k} = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\,\big(e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)^k$. Ainsi :

$$\boxed{\lfloor nX \rfloor(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P\big(\lfloor nX \rfloor = k\big) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\,\big(e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)^k.}$$

$\big(\lfloor nX \rfloor + 1\big)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\big(\lfloor nX \rfloor + 1 = k\big) = P\big(\lfloor nX \rfloor = k-1\big) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\,\big(e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)^{k-1} = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\,\Big(1 - \big(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)\Big)^{k-1}$.

Notons que $1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}$ appartient à $]0,1[$ car $-\dfrac{\lambda}{n}$ est strictement négatif. Alors plus de doute :

$$\boxed{\lfloor nX \rfloor + 1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}.}$$

(c) Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

Version 1

$P(Y_n \leqslant x) = P\left(\dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n} \leqslant x\right) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant nx) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor) = P(\lfloor nX \rfloor < \lfloor nx \rfloor + 1) = P(nX < \lfloor nx \rfloor + 1)$.

Remarque On est prié de méditer sur les égalités précédentes et de se souvenir que $\lfloor a \rfloor \leqslant b \Longleftrightarrow a < \lfloor b \rfloor + 1$.

$P(Y_n \leqslant x) = F_n(\lfloor nx \rfloor + 1) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}\,\big(\lfloor nx \rfloor + 1\big)} = 1 - e^{-\frac{\lambda\,(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}}$.

Version 2

$P(Y_n \leqslant x) = P\left(\dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n} \leqslant x\right) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant nx) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant nx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(\lfloor nX \rfloor = k)$.

$P(Y_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \Big((1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\,\big(e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)^k\Big) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}) \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \big(e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)^k = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})\, \frac{1 - \big(e^{-\frac{\lambda}{n}}\big)^{\lfloor nx \rfloor + 1}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}} = 1 - e^{-\frac{\lambda\,(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } \mathbb{R}_+,\ P(Y_n \leqslant x) = 1 - e^{-\frac{\lambda\,(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}} = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda\,(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).}$$

(d) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$. Comme $n > 0$, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\cdot$

Alors $x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Ajoutons que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right) = x$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = 0.}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{\lambda\,(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\lambda\,\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} - \dfrac{\lambda}{n}\right) = -\lambda\,x.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \exp\left(-\dfrac{\lambda\,(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right)\right) = 1 - e^{-\lambda\,x}$ (par continuité de la fonction exponentielle).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda\,x} = P(X \leqslant x)$ et ceci pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$.

Soit x un élément de $]-\infty, 0[$. $P(Y_n \leqslant x) = 0$ car Y_n prend ses valeurs dans R_+.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant x) = 0 = P(X \leqslant x)$.

Finalement, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant x) = P(X \leqslant x)$. Ainsi

$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire X donc vers une variable alétoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Remarque *Généralisons ! Soit Z une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_Z.*

Montrons que la suite de terme général $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$ converge en loi vers Z... sans utiliser les lois de nX et de $\lfloor nX \rfloor$.

Soit x un réel.

$$P(Z_n \leqslant x) = P\left(\frac{\lfloor nZ \rfloor}{n} \leqslant x\right) = P(\lfloor nZ \rfloor \leqslant nx) = P(\lfloor nZ \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor) = P(\lfloor nZ \rfloor < \lfloor nx \rfloor + 1) = P(nZ < \lfloor nx \rfloor + 1).$$

$$P(Z_n \leqslant x) = P\left(Z < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = F_Z\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\right) = x$ *et F_Z est continue en x.*

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leqslant x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_Z\left(\dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = F_Z(x)$ *et ceci pour tout réel x.*

Ainsi la suite de terme général $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$ converge en loi vers Z.

PARTIE II : Discrétisées et lois "polynômiales".

1. Soit k un élément de $[\![0, n]\!]$ et soit x un réel.

$$u(e_k)(x) = \int_x^{x+1} e_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} t^k\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^{x+1} = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i - x^{k+1}\right).$$

$$u(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} x^i + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} - x^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} x^i.$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(e_k)(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} x^i.}$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} x^i = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} e_i(x) = \left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} e_i\right)(x).$$

Donc $u(e_k) = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} e_i$ et ceci pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ u(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} e_i.}$$

Remarque *Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, e_k est combinaison linéaire de la famille $(e_0,e_1,\dots,e_k)$.*

Donc pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, e_k appartient à $\mathbb{R}_k[X]$ donc à $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit λ un réel et soit (Q_1,Q_2) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ u(\lambda\,Q_1+Q_2)(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(\lambda\,Q_1+Q_2)(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+1}\big(\lambda\,Q_1(t)+Q_2(t)\big)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_x^{x+1}Q_1(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+1}Q_2(t)\,\mathrm{d}t.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ u(\lambda\,Q_1+Q_2)(x)=\lambda\,u(Q_1)(x)+u(Q_2)(x)=\big(\lambda\,u(Q_1)+u(Q_2)\big)(x)$. Donc $u(\lambda\,Q_1+Q_2)=\lambda\,u(Q_1)+u(Q_2)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(Q_1,Q_2)\in\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X],\ u(\lambda\,Q_1+Q_2)=\lambda\,u(Q_1)+u(Q_2)$. Ainsi :

$$\boxed{u\text{ est linéaire.}}$$

Rappelons que $(e_0,e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il existe un élément r de $[\![0,n]\!]$ et un élément $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}a_k\,e_k$.

u étant linéaire, $u(Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}a_k\,u(e_k)$. Or nous avons vu que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $u(e_k)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors $u(Q)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $u(Q)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et ceci pour tout Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\forall Q\in\mathbb{R}_n[X],\ u(Q)\in\mathbb{R}_n[X].}$$

Ainsi u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\boxed{u\text{ est endomorphisme de }\mathbb{R}_n[X].}$$

3. Notons que cette question est avant tout au service de Q4. Nous donnerons donc deux versions. La première est plus dans la logique du texte mais la seconde conduit plus rapidement au résultat de Q4.

Version 1 Pour pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $u(e_k)=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}e_i$ donc $u(e_k)$ est de degré k.

Alors $\big(u(e_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

Ainsi $\big(u(e_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le cours permet alors de dire que :

$$\boxed{\big(u(e_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}\text{ est une base de }\mathbb{R}_n[X].}$$

Version 2 Pour pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $u(e_k)=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}e_i\in\mathrm{Vect}(e_0,e_1,\dots,e_k)$.

Alors la matrice A de u dans la base $\big(u(e_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est triangulaires supérieure.

Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, la $k^{\text{ème}}$ composante de $u(e_k)$ sur la base $(e_0,e_1,\dots,e_n)$ est $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{k+1}{k}$ donc 1.

Ainsi tous les éléments diagonaux de A sont égaux à 1.

Alors A est triangulaire supérieure sans zéro sur sa diagonale. Donc A est inversible et u est alors un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il transforme donc la base $\big(u(e_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en une base de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est ce qu'il fallait prouver.

Remarque *Notons que cette seconde version montre aussi que* 1 *est la seule valeur propre de* A *et de* u.

Exercice 1. *Montrer que* u *est diagonalisable si et seulement si* $n = 0$.
2. *Trouver* SEP $(u, 1)$.

4. La question précédente a montré que u transforme la base $\big(u(e_k)\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en une base de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ possède un antécédent et un un seul par u dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc si R est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ il existe un élément Q_R de $\mathbb{R}_n[X]$, et un seul, tel que $R = u(Q_R)$ donc tel que

$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} Q_R(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } R \text{ de } \mathbb{R}_n[X], \text{ il existe un unique polynôme } Q_R \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,\mathrm{d}t.}$$

5. Supposons un instant que $n = 1$ et posons $R = \dfrac{1}{6}\,X$. R appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ donc il existe un unique polynôme Q_R dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} Q_R(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $n = 1$, il existe deux réels a et b tels que $Q_R = a\,e_0 + b\,e_1$.

$$\frac{1}{6}\,e_1 = R = u(Q_R) = a\,u(e_0) + b\,u(e_1) = a\,e_0 + b\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}\binom{2}{i}\,e_i\right)) = a\,e_0 + \frac{b}{2}\,e_0 + b\,e_1.$$

Comme la famille (e_0, e_1) est libre $a + \dfrac{b}{2} = 0$ et $b = \dfrac{1}{6}\cdot$ Donc $a = -\dfrac{1}{12}$ et $b = \dfrac{1}{6}\cdot$ $Q_R = -\dfrac{1}{12}\,e_0 + \dfrac{1}{6}\,e_1 = \dfrac{1}{6}\,X - \dfrac{1}{12}\cdot$

$$\boxed{\text{Si } R = \frac{1}{6}\,e_1 = \frac{1}{6}\,X \text{ et si } n = 1 \text{ alors } Q_R = -\frac{1}{12}\,e_0 + \frac{1}{6}\,e_1 = \frac{1}{6}\,X - \frac{1}{12}\cdot}$$

6. (a) posons $R = u(Q)$. R appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ donc à $\mathbb{R}[X]$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} Q(t)\,\mathrm{d}t$.

X prend ses valeurs dans $[0, N+1[$ donc $X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$. Soit k un élément de $X_d(\Omega)$.

Comme f coïncide avec Q sur $[0, N+1[$, $P(X_d = k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} Q(t)\,\mathrm{d}t = R(k)$.

Ainsi $X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $\forall k \in X_d(\Omega),\ P(X_d = k) = R(k)$.

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } R \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ (et même de } \mathbb{R}_n[X]) \text{ tel que } X_d(\Omega) = [\![0, N]\!] \text{ et } \forall k \in X_d(\Omega),\ P(X_d = k) = R(k).}$$

(b) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, 4[,\ f(x) = Q(x)$ et tel que Y soit la discrétisée de X.

$$0 = \frac{0}{6} = P(Y = 0) = P(X_d = 0) = \int_0^{0+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t. \text{ Donc } \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or Q est continue sur $[0, 1]$ et Q prend des valeurs positives ou nulles sur $[0, 1]$ car Q coïncide sur cet intervalle avec la densité f. Dans ces condition Q est nul sur $[0, 1]$ donc a une infinité de racines. Alors Q est le polynôme nul.

Alors $\dfrac{1}{6} = P(Y = 1) = P(X_d = 1) = \displaystyle\int_1^{1+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ce qui induit une légère contradiction.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucun polynôme } Q \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in [0, 4[,\ f(x) = Q(x) \text{ et tel que } Y \text{ soit la discrétisée de } X.}$$

Remarque *On aurait pu pour faire plaisir au concepteur montrer, par exemple, que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *et ainsi constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.*

PARTIE III : Variables dénombrables et discrétisées.

1. Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

Soit k dans $\mathbb{N}^*$. $0 \leqslant |g'(x+k)| \leqslant \dfrac{C}{(1+x+k)^2}$.

$1+x+k \geqslant k > 0$ donc $(1+x+k)^2 \geqslant k^2 > 0$ et $0 < \dfrac{1}{(1+x+k)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.

Comme C est positif ou nul : $\dfrac{C}{(1+x+k)^2} \leqslant \dfrac{C}{k^2}$. Ainsi $0 \leqslant |g'(x+k)| \leqslant \dfrac{C}{k^2}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |g'(x+k)| \leqslant \dfrac{C}{k^2}$ et la série de terme général $\dfrac{C}{k^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|g'(x+k)|$ est convergente. Alors la série de terme général $g'(x+k)$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ positif ou nul la série } \sum_{k\geqslant 0} g'(x+k) \text{ converge.}}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $[0,+\infty[$ donc g' est négative ou nulle sur $[0,+\infty[$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N},\ g'(x+k) \leqslant 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \leqslant 0$ et alors $f(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \geqslant 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[,\ f(x) = 0$. Alors :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) \geqslant 0. \quad \textbf{(P1)}}$$

2. (a) Soit (x,a) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Soit k dans $\mathbb{N}$.

- Si $x = a$ on a clairement $\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \dfrac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}$ car $0 \leqslant 0$!
- Supposons $x > a$. g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a+k, x+k]$.

si u apparient à $\in [a+k, x+k]$, $1+u \geqslant 1+a+k \geqslant 1+k > 0$ donc $(1+u)^2 \geqslant (k+1)^2 > 0$ et ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^2} \leqslant \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

Comme C est positif ou nul : $\forall u \in [a+k, x+k],\ |g''(u)| \leqslant \dfrac{C}{(1+u)^2} \leqslant \dfrac{C}{(k+1)^2}$.

L'inégalité des accroissements finis donne alors $\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \dfrac{C}{(k+1)^2}\left|(x+k)-(a+k)\right| = \dfrac{C}{(k+1)^2}\,|x-a|$.

Par conséquent $\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \dfrac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}$.

- Si $x < a$ avec ce que nous venons de montrer nous pouvons écrire $\left|g'(a+k) - g'(x+k)\right| \leqslant \dfrac{C\,|a-x|}{(k+1)^2}$ (non ?), ce qui donne encore $\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \dfrac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}$.

$$\boxed{\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \dfrac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}.}$$

(b) Soit (x,a) un couple d'éléments de $[0,+\infty[$.

$$|f(x)-f(a)| = \left| -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) - \left(-\sum_{k=0}^{+\infty} g'(a+k) \right) \right| = \left| -\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) - \sum_{k=0}^{+\infty} g'(a+k) \right) \right|.$$

$$|f(x)-f(a)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) - \sum_{k=0}^{+\infty} g'(a+k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big) \right|.$$

Soit r un élément de $\mathbb{N}$. $\displaystyle \left| \sum_{k=0}^{r} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{r} \Big| g'(x+k) - g'(a+k) \Big| \leqslant \sum_{k=0}^{r} \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}$.

$$\left| \sum_{k=0}^{r} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big) \right| \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{(k+1)^2} \right) |x-a|.$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ converge et est à termes positifs donc $\displaystyle \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

Comme C et $|x-a|$ sont des réels positifs ou nuls : $\displaystyle \left| \sum_{k=0}^{r} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big] \right| \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \right) |x-a|$.

Posons $D = C \displaystyle \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \right)$.

$D \geqslant 0$, D ne dépend ni de x ni de a et $\forall r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle \left| \sum_{k=0}^{r} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big) \right| \leqslant D\,|x-a| \qquad (\bigstar)$.

Rappelons que $|f(x)-f(a)| = \displaystyle \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big) \right|$.

Donc en faisant tendre r vers $+\infty$ dans $(\bigstar)$ il vient $|f(x)-f(a)| = \displaystyle \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(g'(x+k) - g'(a+k) \Big) \right| \leqslant D\,|x-a|$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } D \text{ positif ou nul tel que} : \forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \big|f(x)-f(a)\big| \leqslant D\,|x-a|.}$$

• Soit a un réels strictement positif. Il existe un réel η strictement positif tel que $]a-\eta, a+\eta[$ soit contenu dans $[0,+\infty[$.

Ainsi $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[,\ 0 \leqslant \big|f(x)-f(a)\big| \leqslant D\,|x-a|$ et $\displaystyle \lim_{x\to a} \big(D\,|x-a|\big) = 0$.

Alors par encadrement on obtient $\displaystyle \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. f est continue en a.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \big|f(x)-f(0)\big| \leqslant D\,|x-0| = D\,|x|$ et $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \big(D\,|x|\big) = 0$.

Alors par encadrement on obtient $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. f est continue à droite en 0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[\text{ ou, } f \text{ est continue en tout point de }]0,+\infty[\text{ et continue à droite en } 0.}$$

Remarque *f est nulle sur* $]-\infty,0[$. *Donc f est continue en tout point de* $]-\infty,0[$ *et a pour limite* 0 *à gauche en* 0.

Notons alors que f est continue en 0 *si et seulement si* $f(0)=0$ *; autrement dit si et seulement si* $\forall k \in \mathbb{N},\ g'(k)=0$ *(g' est négative ou nulle sur $\mathbb{R}_+$)...*

$$\boxed{f \text{ est continue au moins sur } \mathbb{R}^* \text{ donc sur } \mathbb{R} \text{ privé d'un ensemble fini de points.} \quad \textbf{(P2)}}$$

3. (a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $\mathbb{R}_+$.

Notons que $\dfrac{1}{t+k} - \dfrac{1}{t+k+1} = \dfrac{(t+k+1)-(t+k)}{(t+k)\,(t+k+1)} = \dfrac{1}{(t+k)\,(t+k+1)}$.

$0 < t+k \leqslant t+k+1$ et $t+k+1 > 0$. Alors $0 < (t+k)\,(t+k+1) \leqslant (t+k+1)^2$.

Ainsi $\dfrac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{(t+k)\,(t+k+1)} = \dfrac{1}{t+k} - \dfrac{1}{t+k+1}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.}$$

Soit N un élément de $\mathbb{N}$, soit t un élément de $\mathbb{R}_+$ et soit r un élément de $[\![N+1, +\infty[\![$.

$\left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} |g'(t+k)|$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{C}{(x+1)^2}$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \ |g'(t+k)| \leqslant \dfrac{C}{(t+k+1)^2}$. Donc $\left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} \dfrac{C}{(t+k+1)^2}$.

Or si k appartient à $[\![N+1, +\infty[\![$, k est dans $\mathbb{N}^*$ donc $\dfrac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{t+k} - \dfrac{1}{t+k+1}$ et comme $C \geqslant 0$:

$\dfrac{C}{(t+k+1)^2} \leqslant \dfrac{C}{t+k} - \dfrac{C}{t+k+1}$.

Alors $\left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} \left(\dfrac{C}{t+k} - \dfrac{C}{t+k+1}\right) = \dfrac{C}{t+N+1} - \dfrac{C}{t+r+1} \leqslant \dfrac{C}{t+N+1}$.

On a encore $\left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leqslant \dfrac{C}{N+1}$ car $\dfrac{C}{t+N+1} \leqslant \dfrac{C}{N+1}$.

Finalement $\forall r \in [\![N+1, +\infty[\![,\ \left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leqslant \dfrac{C}{N+1}$.

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient : $\left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k)\right| \leqslant \dfrac{C}{N+1}$ c'est à dire $\big|R_N(t)\big| \leqslant \dfrac{C}{N+1}$.

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \big|R_N(t)\big| \leqslant \frac{C}{N+1}.}$$

(b) Soit N dans $\mathbb{N}$.

Notons que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) - \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k) = S_n(t) + R_N(t)$.

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ donc g' est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $t \to g'(t+k)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par conséquent $t \to \displaystyle\sum_{k=0}^{N} g'(t+k)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi S_N est continue sur $[0, +\infty[$.

Nous avons vu dans **III Q2.** que f est continue par sur $[0, +\infty[$. Alors par différence, $R_N = f - S_N$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ceci justifie l'existence de $\displaystyle\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(S_N(t) + R_N(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(-\sum_{k=0}^{N} g'(t+k)\right)\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{N} \int_0^1 g'(t+k)\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{N} \Big[g(t+k)\Big]_0^1 = -\sum_{k=0}^{N} \big(g(1+k) - g(0+k)\big).$

$$\int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{N} \big(g(k+1)-g(k)\big) = -\big(g(N+1)-g(0)\big) = g(0)-g(N+1).$$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(0)-g(N+1)+\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } N \text{ de } \mathbb{N},\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(0)-g(N+1)+\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(c) La série de terme général $g(k)$ est convergente donc :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} g(k) = 0.}$$

$\forall N\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(0)-g(N+1)+\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} g(N+1)=0.$

Montrons alors que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

$\forall N\in\mathbb{N},\ 0\leqslant \left|\displaystyle\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \big|R_N(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{C}{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{C}{N+1}$ d'après **III Q3. (a)** et car $0\leqslant 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{C}{N+1}=0$, il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité de **III Q3. (b)** on obtient alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(0)-0+0 = g(0).$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(0).}$$

4. (a) $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f(t+1)-f(t) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k+1) - \left(-\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) - \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k+1).$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f(t+1)-f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) - \sum_{k=1}^{+\infty} g'(t+k) = g'(t).$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f(t+1)-f(t) = g'(t)\ .}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. $g(x) = g(x)-g(0)+g(0) = \displaystyle\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(f(t+1)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

$g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

$g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$ $t\to t+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie le changement de variable $u=t+1$ dans ce qui suit.

$g(x) = \displaystyle\int_1^{x+1} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$ Donc $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(b) Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$S_N = \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} g(k).$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\ .}$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$ sont deux éléments de $\mathbb{N}$.

f est positive sur $\mathbb{R}_+$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $x < \lfloor x \rfloor + 1$. Alors $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{x}^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ainsi $\displaystyle S_{\lfloor x \rfloor} = \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t = S_{\lfloor x \rfloor+1}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_{\lfloor x \rfloor+1}.}$$

Donnons la solution que le concepteur semble attendre et nous reviendrons en off sur le sujet....

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) = 1$ car par hypothèse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(\lfloor x \rfloor + 1\big) = +\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S_{\lfloor x \rfloor} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S_{\lfloor x \rfloor+1} = 1$ (◄).

L'encadrement obtenu plus haut donne alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut 1.}}$$

Rappelons que f est nulle sur $]-\infty, 0[$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0. Alors :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut 1.} \qquad \textbf{(P3)}}$$

(c) P1, **P2** et **P3** montrent que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. X prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ donc $X_d(\Omega) = \mathbb{N}$.

Alors $X_d(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_d = k) = \displaystyle\int_k^{k+1} g(k)\,\mathrm{d}t = P(Y = k)$. Ainsi X_d a même loi que Y.

f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.

Traduction en français :

f peut être considérée comme UNE densité d'une variable aléatoire X dont la discrétisée X_d suit la même loi que Y.

Retour sur (◀)

$\lim_{N\to+\infty} S_N = 1$ donne $\lim_{x\to+\infty} S_{\lfloor x\rfloor} = 1$ est une totale évidence sauf qu' aucun résultat de cours ne permet de l'affirmer directement, ou je me trompes ?

Montrons le en utilisant la définition. Soit ε un éel strictement positif.

Montrons qu'il existe un réel strictement positif A tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x > A \Rightarrow |S_{\lfloor x\rfloor} - 1| < \varepsilon$.

Comme la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, il existe un élément N_ε de N tel que : $\forall N \in \mathbb{N},\ N \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |S_N - 1| < \varepsilon$.

Posons $A = \lfloor N_\varepsilon \rfloor + 1$. A est strictement positif.

De plus si x est un élément de $\mathbb{R}_+$ strictement supérieur à A alors $x > N_\varepsilon + 1$ donc $\lfloor x\rfloor \geqslant N_\varepsilon + 1$ et ainsi $|S_{\lfloor x\rfloor} - 1| < \varepsilon$.

Par onséquent $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x > A \Rightarrow |S_{\lfloor x\rfloor} - 1| < \varepsilon$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} S_{\lfloor x\rfloor} = 1$.

On aurait pu aussi procéder de la sorte.

Rappelons que f est continue sur $[0, +\infty[$ et posons $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

F est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de f qui est positive sur cet ensemble. Donc F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La suite $\left(\int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et nous savons qu'elle converge vers 1 car, pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, $\int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$.

Donc $\forall N \in \mathbb{N},\ F(N) = \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) \leqslant F\big(\lfloor x\rfloor + 1\big) \leqslant 1$ (croissance de F).

La fonction F est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et majorée par 1. Alors elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

La caractérisation séquentielle de la notion de limite donne alors $1 = \lim_{N\to} \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} F(N) = \ell$. $\ell = 1$.

Alors $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
