R.

ECRICOME 2013

Exercice 1 ⚠ Nous supposerons $\boxed{k \geq 2}$.

Q1 ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = B$. $\underline{{}^tB = B}$.

▼ <u>Remarque</u>.. B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ▲

$\langle BX, X\rangle = \langle X, BX\rangle = {}^tXBX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)\,AX = \|AX\|^2$ pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2.}$

Q2 B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc ses valeurs propres sont réelles.
Autrement dit $Sp_{\mathbb{C}}\, B = Sp_{\mathbb{R}}\, B$.

Soit λ une valeur propre de B. Soit X un vecteur propre associé. $BX = \lambda X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\|AX\|^2 = \langle BX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle = \lambda\|X\|^2$ et $\|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ donc λ est positif ou nul.

<u>Les valeurs propres de B sont réelles et positives ou nulles.</u>

Q3 Montrons d'abord par récurrence que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ ({}^tAA)^i = ({}^tA)^iA^i$.

- C'est clair pour $i = 1$ (et même pour $i = 0$...).
- Supposons la propriété vraie pour un élément i de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $i+1$.

$({}^tAA)^{i+1} = ({}^tAA)^i\,{}^tAA \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} ({}^tA)^iA^i\,{}^tAA \underset{{}^tA = A^k}{=} ({}^tA)^iA^iA^kA = ({}^tA)^iA^{i+k}A = ({}^tA)^iA^{k+i}A.$

$({}^tAA)^{i+1} = ({}^tA)^iA^kA^iA = ({}^tA)^i\,{}^tAA^{i+1} = ({}^tA)^{i+1}A^{i+1}$. Ce qui achève la récurrence.

$\underline{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ ({}^tAA)^i = ({}^tA)^iA^i.}$

Alors $B^k = ({}^tAA)^k = ({}^tA)^kA^k = {}^t(A^k)A^k = {}^t({}^tA)A^k = AA^k = A^{k+1} = A^kA = {}^tAA = B$.

donc $\underline{B^k = B}$.

$X^k - X$ est un polynôme annulateur de B. L'ensemble de ses racines réelles est <u>contenu</u> dans $\{0, -1, 1\}$

donc $Sp\, B \subset \{0,-1,1\}$. Mais rappelons que les valeurs propres de B sont des réels positifs ou nuls.

Ainsi les valeurs propres possibles de B sont 0 ou 1.

(Q4) B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\, B\, P = P^{-1}BP$ soit diagonale.

Posons $D = {}^tPBP = P^{-1}BP$ et $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

B et D sont semblables donc B et D ont mêmes valeurs propres. $Sp\, B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \in \{0,1\}$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i^2 = \alpha_i$.

donc $D^2 = \mathrm{Diag}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D$. $D^2 = D$.

Alors $B^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = B$. $B^2 = B$.

(Q5) • → Soit $X \in \mathrm{Ker}\, A$. $BX = {}^tAAX = {}^tA\, 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; $X \in \mathrm{Ker}\, B$.

→ Soit $X \in \mathrm{Ker}\, B$. $\|AX\|^2 \overset{Q1}{=} \langle BX, X\rangle = \langle 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, X\rangle = 0$.

Alors $\|AX\| = 0$ donc $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $X \in \mathrm{Ker}\, A$.

Finalement $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in \mathrm{Ker}\, B \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}\, A$. $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Ker}\, A$.

Soit $Y \in \mathrm{Im}\, B$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BX = Y$. Alors $Y = {}^tAAX$.

$Y = {}^tAAX = A^kAX = A^{k+1}X = A(A^kX)$ donc $Y \in \mathrm{Im}\, A$.

Par conséquent $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Im}\, A$.

La conception s'autorise les "Ker M" et "Im M" donc ~~autorisons~~ nous utiliserons le théorème du rang pour les matrices.

Notons que $\dim \mathrm{Ker}\, B = \dim \mathrm{Ker}\, A$ car $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Ker}\, A$.

Alors $\dim \mathrm{Im}\, B = n - \dim \mathrm{Ker}\, B = n - \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Im}\, A$.

or $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Im}\, A$. Ainsi $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Im}\, A$.

Q6 Soit $X \in \operatorname{Im} A$. Alors $X \in \operatorname{Im} B$. Donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X = BZ$.

Ainsi $BX = B^2 Z = BZ$ car $B^2 = B$. Donc $BX = X$.

Alors $\|AX\|^2 \underset{Q1}{=} \langle BX, X\rangle = \langle X, X\rangle = \|X\|^2$. Comme $\|AX\| \geq 0$ et $\|X\| \geq 0$: $\|AX\| = \|X\|$.

Ainsi $\underline{\forall X \in \operatorname{Im} A,\ \|AX\| = \|X\|}$.

Remarque. Les nostalgiques pourront regarder, sur le même thème, ECRICOME 2000 exercice 1

EXERCICE 2

(Q1) a) Notons que :

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.

et $\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{1}{5}\left[2x-4x^3+2y\right]$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(X)=\frac{1}{5}\left[2y-4y^3+2x\right]$.

Soit $A=(a,b)$ un point critique de f. $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0_{\mathbb{R}^2}$.

Alors $\begin{cases}\frac{1}{5}(2a-4a^3+2b)=0\\ \frac{1}{5}(2b-4b^3+2a)=0\end{cases}$; $\begin{cases}a-2a^3+b=0\\ b-2b^3+a=0\end{cases}$. En faisant la soustraction de ces

deux équations il vient $0=a-2a^3+b-b+2b^3-a=2(b^3-a^3)$. Alors $b^3=a^3$. $b=a$.

Si $A=(a,b)$ est un point critique de f : $a=b$.

Soit $A=(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$\nabla f(A)=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{5}(2a-4a^3+2b)=0\\ \frac{1}{5}(2b-4b^3+2a)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2a^3+b=0\\ b-2b^3+a=0\end{cases}$

$\nabla f(A)=0_{\mathbb{R}^2}\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a=b & \text{(vu plus haut !)}\\ b-2b^3+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ 0=2b-2b^3=2b(1-b^2)=2b(1-b)(1+b)\end{cases}$

$\nabla f(A)=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$.

Notons que $f(0,0)=0$, $f(1,1)=f(-1,-1)=\frac{2}{5}$.

f admet trois points critiques : $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

$f(0,0)=0$ et $f(1,1)=f(-1,-1)=\frac{2}{5}$.

Inutile d'admettre ! Démontrons. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$f(X)+\frac{1}{10}(x^2+y^2)^2=\frac{1}{10}\left[2x^2(1-x^2)+2y^2(1-y^2)+4xy+x^4+y^4+2x^2y^2\right]$

$f(X)+\frac{1}{10}(x^2+y^2)^2=\frac{1}{10}\left[2x^2-x^4+2y^2-y^4+4xy+2x^2y^2\right]=\frac{1}{10}\left[2x^2+2y^2+4xy-(x^2-y^2)^2\right]$

$f(X) + \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{10}\left[4x^2+4y^2-2x^2-2y^2+4xy-(x^2-y^2)^2\right]$.

$f(X) + \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{10}\left[4x^2+4y^2-2(x-y)^2-(x^2-y^2)^2\right] \leq \frac{1}{10}(4x^2+4y^2) = \frac{2}{5}(x^2+y^2)$.

Alors $f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2$.

b) g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall t\in[0,+\infty[,\ g'(t) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}t = \frac{1}{5}(2-t)$.

g est strictement croissante sur $[0,2]$ et strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

De plus $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$.

Ainsi g n'a pas de minimum global sur $[0,+\infty[$.

g admet un maximum global sur $[0,+\infty[$ qui est atteint en un point et un seul : 2, et qui vaut $\frac{2}{5}$.

c) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Posons $t = x^2+y^2$. Notons que $t\in\mathbb{R}^+$ donc $g(t)\leq\frac{2}{5}$.

$f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2 = \frac{2}{5}t - \frac{1}{10}t^2 = g(t) \leq \frac{2}{5} = f(1,1)$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\leq f(1,1)$ et $f(1,1) = \frac{2}{5}$

Alors f possède un maximum sur $\mathbb{R}^2$. Ce maximum vaut $\frac{2}{5}$.

• Remarque.. f étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ il ne peut être réalisé qu'en un point critique de f. Or les trois points critiques de f sont $(-1,-1)$, $(0,0)$ et $(1,1)$. De plus $f(-1,-1) = f(1,1) = \frac{2}{5}$ et $f(0,0)=0$.

Alors $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont les seuls points de $\mathbb{R}^2$ qui réalisent le maximum de f.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x,-x) = \frac{1}{5}\left[x^2(1-x^2)+x^2(1-x^2)-2x^2\right] = \frac{1}{5}\left[x^2-x^4+x^2-x^4-2x^2\right] = -\frac{2}{5}x^4$.

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x,-x) = -\infty$. Alors f ne peut pas être minorée sur $\mathbb{R}^2$.

R..

Q2

```
Program ECRICOME_2013;
Var k, N : integer; a, b, t : real;
begin
Write('Donner N. N= '); readln(N);
Write('Donner U_0 . U_0 = '); readln(a);
Write('Donner U_1 . U_1 = '); readln(b);
For k:=2 To N Do
    begin
    t := (a*a*(1-a*a)+b*b*(1-b*b)+2*a*b)/5;
    a := b;
    b := t;
    end;
If N=0 then b:=a;
writeln('U(', N, ')=', b);
end.
```

Q3 a) $\cdot$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1})\leq\frac{2}{5}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}\leq 1$!

Comme $u_0\in[0,1]$ et $u_1\in[0,1]$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq 1$.

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 0$.

. La propriété est vraie pour $n=0$ & $n=1$.

. Supposons la propriété vraie pour n & $n+1$ où n est un élément de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+2$. $u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1})=\frac{1}{5}\left[u_n^2(1-u_n^2)+u_{n+1}^2(1-u_{n+1}^2)+2u_nu_{n+1}\right]$.

L'hypothèse de récurrence indique que $u_n\geq 0$ et $u_{n+1}\geq 0$. De plus nous savons que $u_n\leq 1$ et $u_{n+1}\leq 1$. Alors $u_n\in[0,1]$ et $u_{n+1}\in[0,1]$.

Donc u_n^2, $1-u_n^2$, u_{n+1}^2, $1-u_{n+1}^2$, u_n et u_{n+1} sont des réels positifs ou nuls.

Par produit $u_n^2(1-u_n^2)$, $u_{n+1}^2(1-u_{n+1}^2)$, $2u_nu_{n+1}$ sont encore des réels positifs ou nuls.

Alors $\frac{1}{5}\left[u_n^2(1-u_n^2)+u_{n+1}^2(1-u_{n+1}^2)+2u_nu_{n+1}\right]\geq 0$.

Donc $u_{n+2}\geq 0$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geq 0$. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n \leq 1$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2 \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2)$.

Or $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ x^2\leq x$ et $y^2\leq y$.

donc $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ f(x,y)\leq \frac{2}{5}(x+y)$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$ et $u_{n+1}\in[0,1]$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1})\leq\frac{2}{5}(u_n+u_{n+1})$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}\leq \frac{2}{5}(u_n+u_{n+1})$.

b) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq a_n$.

- L'inégalité est vraie pour $n=0$ et $n=1$ car $a_0=u_0$ et $a_1=u_1$.
- Supposons l'inégalité vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$. Montrons-la pour $n+2$.

$$u_{n+2} \underset{\uparrow\ Q3a)}{\leq} \frac{2}{5}(u_n+u_{n+1}) \underset{\uparrow\ \text{hypothèse de récurrence}}{\leq} \frac{2}{5}(a_n+a_{n+1}) \underset{\uparrow\ \text{par définition}}{=} a_{n+2}.$$

Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq a_n$.

c) L'équation caractéristique attachée à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est :

$z\in\mathbb{C}$ et $z^2=\frac{2}{5}(z+1)$.

$\forall z\in\mathbb{C},\ z^2=\frac{2}{5}z+\frac{2}{5} \iff 0 = z^2-\frac{2}{5}z-\frac{2}{5} = \left(z-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}-\frac{2}{5} = \left(z-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{11}{25} = \left(z-\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{11}}{5}\right)\left(z-\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{11}}{5}\right)$

$\forall z\in\mathbb{C},\ z^2=\frac{2}{5}z+1 \iff z=\frac{1-\sqrt{11}}{5}$ ou $z=\frac{1+\sqrt{11}}{5}$.

Posons $r=\frac{1-\sqrt{11}}{5}$ et $s=\frac{1+\sqrt{11}}{5}$.

Le cours indique que : $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\lambda r^n+\mu s^n$.

Donc il existe quatre réels λ,μ,r,s tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\lambda r^n+\mu s^n$.

$0 < \frac{1+\sqrt{11}}{5} < \frac{1+\sqrt{16}}{5} = 1$. $|s| < 1$ donc $\lim_{n \mapsto +\infty} s^n = 0$.

$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$; $3 < \sqrt{11} < 4$; $-3 > -\sqrt{11} > -4$; $-2 > 1-\sqrt{11} > -3$; $-\frac{2}{5} > \frac{1-\sqrt{11}}{5} > -\frac{3}{5}$.

Alors $\left|\frac{1-\sqrt{11}}{5}\right| < 1$ donc $|r| < 1$. Ainsi $\lim_{n \mapsto +\infty} r^n = 0$.

Par conséquent $\lim_{n \mapsto +\infty} a_n = \lim_{n \mapsto +\infty} (\lambda r^n + \mu s^n) = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq a_n$. Alors par encadrement : $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

<u>la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et sa limite est 0.</u>