

J.F. COSSUTTA

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Ceci est un premier jet et a besoin encore de beaucoup relectures pour bien tenir la route. Si vous voyez des erreurs contactez moi.

ECRICOME 2014

EXERCICE 1

1. Notons E' le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

Notons que E est une partie de E' et que $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ est une famille d'éléments de E' .

Soit f un élément de E' .

$$f \in E \iff \exists(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = xP(x) + x \ln(x)Q(x).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right) + x \ln(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \right).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} + \ln(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1} \right).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sum_{k=1}^n a_{k-1} x^k + \ln(x) \left(\sum_{k=1}^n b_{k-1} x^k \right).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sum_{k=1}^n a_{k-1} x^k + \sum_{k=1}^n b_{k-1} (x^k \ln(x)).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sum_{k=1}^n a_{k-1} u_k(x) + \sum_{k=1}^n b_{k-1} v_k(x).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_{k-1} u_k + \sum_{k=1}^n b_{k-1} v_k \right) (x).$$

$$f \in E \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \exists(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, f = \sum_{k=1}^n a_{k-1} u_k + \sum_{k=1}^n b_{k-1} v_k.$$

$$f \in E \iff f \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n).$$

$$f \in E \iff f \in \text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n).$$

Par conséquent : $E = \text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$.

Alors E est le sous-espace vectoriel de E' engendré par la famille $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ de E' . Finalement :

$$E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel et } E = \text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n).$$

► *Exercice* Montrons que la famille $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ est libre. ◀

2. Soit f un élément de E . Comme $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$, il existe deux éléments $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de \mathbb{R}^n tels que : $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^n \beta_k v_k$.

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_k(x) = x^k$ et $v_k = x^k \ln(x)$. Donc pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, u_k et v_k sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

De plus pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_k = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} v_k = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^k \ln(x)) = 0$ (par croissance comparée...).
Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x) + \sum_{k=1}^n \beta_k v_k(x) \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \times 0 + \sum_{k=1}^n \beta_k \times 0.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Ainsi f est continue sur \mathbb{R}_+^* et prolongeable par continuité en 0.

Chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ .

► *Remarque 1* On aurait pu aussi utiliser " $f(x) = x P(x) + x \ln x Q(x)$ " pour montrer ce résultat ◀

► *Remarque 2* Soit f un élément de E . f se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ que nous noterons \widehat{f} dans la suite.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \widehat{f}(0) = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+, \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Ce qui précède permet aussi de dire que, pour tout x dans \mathbb{R}_+^* , $\int_0^x f(t) dt$ converge et vaut $\int_0^x \widehat{f}(t) dt$.

Ainsi, pour tout x dans \mathbb{R}_+^* , $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ existe et vaut $\frac{1}{x} \int_0^x \widehat{f}(t) dt$. Alors $\varphi(f)(x)$ est définie pour tout x dans \mathbb{R}_+^* .

Finalement $\varphi(f)$ est bien une application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} et ceci pour tout f dans E .

φ est donc une application du \mathbb{R} -espace vectoriel E dans le \mathbb{R} -espace vectoriel E' . ◀

Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \widehat{u}_k(x) = u_k(x) = x^k$ et $\widehat{u}_k(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \widehat{u}_k(x) = x^k$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u_k(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \widehat{u}_k(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^k dt = \frac{1}{x} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \frac{1}{x} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} x^k$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(u_k)(x) = \left(\frac{1}{k+1} u_k \right) (x)$. Donc $\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k$.

• Soit x dans \mathbb{R}_+^* . Soit ε un élément de $]0, +\infty[$.

$w_k : t \rightarrow \frac{1}{k+1} t^{k+1}$ et $h : t \rightarrow \ln(t)$ sont de classes \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. De plus $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, w'_k(t) = t^k$ et $h'(t) = \frac{1}{t}$.

Ceci autorise l'intégration par parties suivante. $\int_\varepsilon^x v_k(t) dt = \int_\varepsilon^x t^k \ln(t) dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \frac{1}{t} dt$.

$$\int_\varepsilon^x v_k(t) dt = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{k+1} \varepsilon^{k+1} \ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^x \frac{t^k}{k+1} dt = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{k+1} \varepsilon^{k+1} \ln(\varepsilon) - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2} \right]_\varepsilon^x.$$

$$\int_\varepsilon^x v_k(t) dt = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{k+1} \varepsilon^{k+1} \ln(\varepsilon) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

$$\int_0^x v_k(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^x v_k(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{k+1} \varepsilon^{k+1} \ln(\varepsilon) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2} \right).$$

Donc par croissance comparée : $\int_0^x v_k(t) dt = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - 0 - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + 0 = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2} x^{k+1}$.

Alors $\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v_k(t) dt = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2} x^{k+1} \right) = \frac{1}{k+1} x^k \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2} x^k$.

$$\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{k+1} v_k(x) - \frac{1}{(k+1)^2} u_k(x) = \left(\frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k \right) (x) \text{ et ceci pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{Donc } \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k.$$

$$\text{Pour tout } k \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k \text{ et } \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k.$$

3. Rappelons que φ est une application du \mathbb{R} -espace vectoriel E dans le \mathbb{R} -espace vectoriel E' .

Soit λ un réel. Soient f et g deux éléments de E .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \text{ car toutes les intégrales convergent.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(\lambda f + g)(x) = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(x) \text{ donc } \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g).$$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in E^2, \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$. Par conséquent :

φ est linéaire.

$$\text{Rappelons que pour tout } k \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k \text{ et } \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k.$$

Ainsi pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ sont des éléments de $\text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$.

Alors $\text{Vect}(\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi(u_2), \varphi(v_2), \dots, \varphi(u_n), \varphi(v_n))$ est contenu dans $\text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$.

Soit f un élément de E . f est combinaison linéaire de $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$.

Comme φ est linéaire, $\varphi(f)$ est combinaison linéaire de $(\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi(u_2), \varphi(v_2), \dots, \varphi(u_n), \varphi(v_n))$.

Donc $\varphi(f)$ appartient à $\text{Vect}(\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi(u_2), \varphi(v_2), \dots, \varphi(u_n), \varphi(v_n))$.

Ainsi $\varphi(f)$ appartient à $\text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ donc à E .

Si f est une fonction de E , $\varphi(f)$ est une fonction de E .

► *Remarque* Ainsi on peut considérer que φ est un endomorphisme de E . ◀

4. Rappelons que $\mathcal{B} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E et qu'ainsi E est de dimension $2n$.

$$\text{Pour tout } k \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k \text{ et } \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k.$$

$$\text{Pour tout } k \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ notons alors } T_k \text{ la matrice } \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & -\frac{1}{(k+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{k+1} \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

$$\text{Alors la matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est la matrice diagonale par blocs égale à } \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & T_{n-1} \\ & & & & T_n \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de φ dans la base \mathcal{B} est la matrice diagonale par blocs égale à $\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & T_{n-1} \\ & & & & T_n \end{pmatrix}$ où

pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ $T_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & -\frac{1}{(k+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{k+1} \end{pmatrix}$.

5. La matrice de φ est une matrice triangulaire supérieure. Alors l'ensemble de ses valeurs propres est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Cet ensemble est $\left\{ \frac{1}{k+1} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$ et il ne contient pas zéro. 0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible

et alors φ est un automorphisme de E . Ajoutons que $\text{Sp } \varphi = \text{Sp } M = \left\{ \frac{1}{k+1} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$.

L'endomorphisme φ de E est bijectif. L'ensemble des valeurs propres de φ est $\left\{ \frac{1}{k+1} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$.

6. Rappelons que λ est un élément de $\left\{ \frac{1}{k+1} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. En particulier λ n'est pas nul.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t) dt = x^{-1/\lambda} \int_0^x \widehat{f}(t) dt.$$

\widehat{f} est une application continue de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . Alors $x \rightarrow \int_0^x \widehat{f}(t) dt$ est la primitive de \widehat{f} sur l'intervalle $[0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

Donc $x \rightarrow \int_0^x \widehat{f}(t) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de dérivée \widehat{f} . De plus $x \rightarrow x^{-1/\lambda}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Alors par produit g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\frac{1}{\lambda} x^{-1/\lambda-1} \int_0^x \widehat{f}(t) dt + x^{-1/\lambda} \widehat{f}(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = -\frac{1}{\lambda} x^{-1/\lambda-1} \int_0^x f(t) dt + x^{-1/\lambda} f(x) = -\frac{1}{\lambda} x^{-\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \lambda f(x) \right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = -\frac{1}{\lambda} x^{-\frac{1}{\lambda}} (\varphi(f)(x) - \lambda f(x)).$$

Or f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ donc $\varphi(f) = \lambda f$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(f)(x) - \lambda f(x) = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\frac{1}{\lambda} x^{-\frac{1}{\lambda}} \times 0 = 0$. Ainsi g est de dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Donc g est constante sur $]0, +\infty[$. Alors il existe un réel γ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma = g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t) dt$.

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^x f(t) dt = \gamma x^{1/\lambda}.$$

Il existe un réel γ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^x f(t) dt = \gamma x^{1/\lambda}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda f(x) = \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \gamma x^{1/\lambda} = \gamma x^{1/\lambda-1}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\gamma}{\lambda} x^{1/\lambda-1}$ (λ n'est pas nul).

Il existe un réel γ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\gamma}{\lambda} x^{1/\lambda-1}$.

7. Soit λ une valeur propre de φ . Soit f un vecteur propre de φ associé à λ .

D'après **Q6.**, il existe un réel γ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\gamma}{\lambda} x^{1/\lambda-1}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ell_\lambda(x) = x^{1/\lambda-1}$.

Alors il existe un réel γ tel que $f = \frac{\gamma}{\lambda} \ell_\lambda$. Donc $f \in \text{Vect}(\ell_\lambda)$.

Ainsi $\text{SEP}(\varphi, \lambda) - \{0_E\}$ est contenu dans $\text{Vect}(\ell_\lambda)$. Or 0_E appartient à $\text{Vect}(\ell_\lambda)$ donc $\text{SEP}(\varphi, \lambda) \subset \text{Vect}(\ell_\lambda)$.

En particulier $\dim \text{SEP}(\varphi, \lambda) \leq \dim \text{Vect}(\ell_\lambda) = 1$.

De plus $\dim \text{SEP}(\varphi, \lambda) \geq 1$ car un sous-espace propre n'est pas de dimension nulle. Alors $\dim \text{SEP}(\varphi, \lambda) = 1$.

La dimension des sous-espaces propres de φ est 1.

Nous avons vu que l'ensemble des valeurs propres de φ est $\left\{ \frac{1}{k+1} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. De plus $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n+1}$.

Ainsi φ possède n valeurs propres distinctes et chaque sous-espace propre de φ est de dimension 1.

Alors la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ est n . Or $\dim E = 2n$. Ainsi :

φ n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 2

1. Soit k un élément de \mathbb{N} et soit x un réel strictement positif. Posons $\forall t \in]0, +\infty[$, $f_{k,x}(t) = (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}$.

$f_{k,x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de trois fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

• $f_{k,x}$ est positive sur $]0, +\infty[$. $\forall t \in]0, +\infty[$, $t^2 f_{k,x}(t) = t^2 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} = (\ln(t))^k e^{-t} t^{x+1} = \frac{(\ln(t))^k}{t} \frac{t^{x+2}}{e^t}$.

Alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 f_{k,x}(t)) = 0 \times 0 = 0$ par croissance comparée. Ainsi $f_{k,x}$ est négligeable devant $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ au voisinage de

$+\infty$. Or ces deux fonctions sont positives sur $]0, +\infty[$ (une positivité suffit...) et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_1^{+\infty} f_{k,x}(t) dt$ converge.

• $\forall t \in]0, 1]$, $t^{1-\frac{x}{2}} |f_{k,x}(t)| = \left| t^{1-\frac{x}{2}} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} \right| = \left| t^{\frac{x}{2}} (\ln(t))^k \right| e^{-t}$.

Alors par croissance comparée : $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{1-\frac{x}{2}} |f_{k,x}(t)|) = |0| \times 1 = 0$ car $\frac{x}{2}$ est strictement positif.

Ainsi $|f_{k,x}|$ est négligeable devant $t \rightarrow \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ au voisinage de 0.

Or ces deux fonctions sont positives sur $]0, 1]$ (une positivité suffit...) et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ converge car $1 - \frac{x}{2} < 1$.

Les règles de comparaison sur les impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^1 f_{k,x}(t) dt$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} f_{k,x}(t) dt$ converge.

Pour tout élément k de \mathbb{N} et pour tout réel x strictement positif $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.

Exercice x appartient à $] -\infty, 0]$ et k appartient à \mathbb{N} .

Montrer que $\int_0^1 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ diverge et que $\int_1^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.

2. Le cours indique que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Rappelons que Γ est dérivable et non nulle sur $]0, +\infty[$. De plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $\Psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \Psi(x)$. Ainsi :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Psi(n+2) - \Psi(n) = \Psi(n+2) - \Psi(n+1) + \Psi(n+1) - \Psi(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

3. Soit A un réel strictement positif. Soit ε un réel appartenant à l'intervalle $]0, A[$.

Soit $\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[\varepsilon, A]$ dans \mathbb{R} .

Posons : $\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R}))^2, \langle f, g \rangle = \int_{\varepsilon}^A f(t)g(t) dt$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R})$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz indique que $\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R}))^2, (\langle f, g \rangle)^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$.

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R}))^2, \left(\int_{\varepsilon}^A f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_{\varepsilon}^A (f(t))^2 dt \int_{\varepsilon}^A (g(t))^2 dt.$$

Soit x un réel strictement positif. $t \rightarrow \ln(t) e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}}$ et $t \rightarrow e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}}$ sont continues sur $[\varepsilon, A]$.

$$\text{Ainsi } \left(\int_{\varepsilon}^A \left(\ln(t) e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right) \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right) dt \right)^2 \leq \int_{\varepsilon}^A \left(\ln(t) e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right)^2 dt \int_{\varepsilon}^A \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right)^2 dt.$$

$$\text{Donc } \left(\int_{\varepsilon}^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_{\varepsilon}^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^{x-1} dt \right) \text{ et ceci pour tout } \varepsilon \text{ dans }]0, A[.$$

Rappelons que $\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt$, $\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt$ et $\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt$ convergent.

Donc en faisant tendre ε vers 0 dans l'inégalité précédente il vient :

$$\left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

$$\forall (x, A) \in (\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+), \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

4. Soit x un réel strictement positif.

$$\forall A \in]0, +\infty[, \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

Rappelons que $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt$, $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ convergent.

Donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente il vient :

$$\left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

Ainsi $(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma''(x) \Gamma(x)$. Donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x).$$

Γ et Γ' sont dérivables sur $]0, +\infty[$, Γ ne s'anulle pas sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Alors Ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, \Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x) \Gamma(x) - \Gamma'(x) \Gamma'(x)}{(\Gamma(x))^2} = \frac{\Gamma(x) \Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$.

$\forall x \in]0, +\infty[, (\Gamma(x))^2 > 0$ et $\Gamma(x) \Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2 \geq 0$ d'après ce qui précède. Alors $\forall x \in]0, +\infty[, \Psi'(x) \geq 0$. Ainsi :

Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

5. (a) La méthode naturelle est d'utiliser la décomposition en éléments simples :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \frac{1}{k - a} - \frac{1}{2a} \frac{1}{k + a}.$$

Pour éviter aux gens qui ne connaissent pas d'avoir des remords je propose de montrer l'égalité de la droite vers la gauche.

Notons que $1 + a > 0$, $1 - a > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k + 1 + a > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k + 1 - a > 0$ car a appartient à $]0, 1[$.

Ainsi $1 + a$ et $1 - a$ sont dans le domaine de définition de Ψ et pour tout k dans \mathbb{N}^* , $k + 1 + a$ et $k + 1 - a$ sont dans le domaine de définition de Ψ .

Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Posons $A_n = \frac{1}{2a} (\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a))$.

$$A_n = -\frac{1}{2a} (\Psi(n + 1 + a) - \Psi(1 + a)) + \frac{1}{2a} (\Psi(n + 1 - a) - \Psi(1 - a)).$$

Notons encore que pour tout k dans \mathbb{N}^* , $k + 1 + a$, $k + a$, $k + 1 - a$ et $k - a$ sont strictement positifs et en particulier appartiennent au domaine de Ψ . Alors par "télescopage" il vient :

$$A_n = -\frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n (\Psi(k + 1 + a) - \Psi(k + a)) + \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n (\Psi(k + 1 - a) - \Psi(k - a)) = -\frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + a} + \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - a}.$$

$$A_n = \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k - a} - \frac{1}{k + a} \right) = \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n \frac{k + a - (k - a)}{(k - a)(k + a)} = \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n \frac{2a}{k^2 - a^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2}.$$

$$\text{Alors : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = A_n = \frac{1}{2a} (\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a)).$$

Pour tout élément n de \mathbb{N}^* : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a))$.

Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$, $0 < n + 1 - a \leq n + 1 + a$, $0 < n + 1 + a \leq n + 2$ et $0 < n \leq n + 1 - a$.

Alors $\Psi(n + 1 - a) \leq \Psi(n + 1 + a)$, $\Psi(n + 1 + a) \leq \Psi(n + 2)$, $\Psi(n) \leq \Psi(n + 1 - a)$.

Donc $0 \leq \Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a)$, $\Psi(n + 1 + a) \leq \Psi(n + 2)$, $-\Psi(n + 1 - a) \leq -\Psi(n)$.

Finalement $0 \leq \Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a) \leq \Psi(n + 2) - \Psi(n)$.

Pour tout élément n de \mathbb{N}^* : $0 \leq \Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a) \leq \Psi(n + 2) - \Psi(n)$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a) \leq \Psi(n + 2) - \Psi(n) = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n} \right) = 0$.

Alors par encadrement il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a)) = 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n + 1 + a) - \Psi(n + 1 - a))$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} \right) = \frac{1}{2a} (\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)) = \frac{\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)}{2a}. \text{ Alors :}$$

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{\Psi(1 + a) - \Psi(1 - a)}{2a}$.

PROBLÈME

Dans tout ce problème, p est un réel appartenant à $]0, 1[$, $q = 1 - p$, et N est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

PARTIE I : Étude d'un cas particulier.

1. Notons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ (et pas $[0, 1]$). Nous le signalons tous les ans...

Avant de commencer la simulation (assez faible) demandée, écrivons une fonction simple simulant le jeu dans le cas général.

k sera la variable qui compte les parties. s sera la variable qui donne le nombre de parties gagnées par le joueur qui reste en jeu après la $k^{\text{ème}}$ partie. Notons que :

- Après la première partie s prend la valeur 1.
- Si $k \geq 2$ et si le joueur A_k gagne la $k^{\text{ème}}$ partie (qui est la première partie qu'il dispute) s prend la valeur 1. Si ce n'est pas le cas l'autre joueur gagne une nouvelle partie et s prend la valeur de $s + 1$.
- Si $k \geq 1$, le joueur A_k gagne la $k^{\text{ème}}$ partie avec la probabilité p .
- Le jeu s'arrête dès que s prend la valeur de N .

Voilà tout est dit !

```

1 Fonction CAS_GENERAL(N:integer;p:real):integer;
2
3 var k,s:integer;
4
5 Begin
6 k:=1;s:=1;
7
8 Repeat
9 k:=k+1;
10 If random<p then s:=1
11     else s:=s+1;
12 Until(s=N);
13
14 CAS_GENERAL:=k;
15 end;
```

► *Exercice* Écrire la fonction CAS_GENERAL en utilisant While. ◀

(a) RAS, sauf que l'on aurait pu préciser à quoi correspondait cette fonction !

```

1 function DUEL:integer;
2
3 begin
4 If random<0.5 then DUEL:=1
5     else DUEL:=0;
6 end;
```

(b) RAS!

```

1 function TEST_VICTOIRE(a,b,c:integer):boolean;
2
3 begin
4 TEST_VICTOIRE:=((a=b) and (b=c));
5 end;

```

► La ligne 4 surprendra quelques personnes... qui ont oublié que $((a=b) \text{ and } (b=c))$ est un boolean. ◀

(c) Je préfère écrire une fonction plutôt qu'un programme qui oblige à réécrire les deux fonctions précédentes.

Je donne une version while et une version repeat.

```

1 function TOURNOI:integer;
2
3 var k,a,b,c:integer;
4
5 begin
6 k:=3;a:=DUEL;b:=DUEL;c:=DUEL;
7 while TEST_VICTOIRE(a,b,c)=false do
8     begin
9         k:=k+1;a:=b;b:=c;c:=DUEL;
10    end;
11 TOURNOI:=k;
12 end;

```

```

1 function TOURNOI:integer;
2
3 var k,a,b,c:integer;
4
5 begin
6 k:=2;a:=DUEL;b:=DUEL;
7 Repeat
8 k:=k+1;a:=b;b:=c;c:=DUEL;
9 until TEST_VICTOIRE(a,b,c);
10 TOURNOI:=k;
11 end;

```

► La ligne 9 surprendra quelques personnes... qui ont oublié que $TEST_VICTOIRE(a,b,c)$ est un boolean. ◀

Q2. Le tableau suivant récapitule les 8 résultats possibles des trois premiers duels.

duel 1	A0	A0	A0	A0	A1	A1	A1	A1
duel 2	A0	A0	A2	A2	A1	A1	A2	A2
duel 3	A0	A3	A2	A3	A1	A3	A2	A3

S'il y a un gagnant il a obtenu 3 victoires consécutives. Il ne peut donc pas y avoir de gagnant à l'issue du premier duel ou à l'issue du second duel. Donc E_1 et E_2 sont des événements certains. Alors $P(E_1) = P(E_2) = 1$.

Il y a un vainqueur à la fin du troisième duel si et seulement si l'un des joueurs A_0 et A_1 est gagnant.

Le joueur A_0 (resp. A_1) gagne à la fin du troisième duel avec la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

La probabilité pour qu'il y ait un gagnant à l'issue du troisième duel est donc $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c'est à dire $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

La probabilité pour qu'il n'ait pas de gagnant à l'issue du troisième duel est donc $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ c'est à dire $\frac{3}{4}$.

Donc $P(E_3) = \frac{3}{4}$.

$$P(E_1) = 1, P(E_2) = 1 \text{ et } P(E_3) = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{3}{4} = P(E_3).$$

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

Q3. Soit n un élément de $\llbracket 3, +\infty \llbracket$. Notons que s'il n'y a pas de vainqueur après le duel numéro n , le vainqueur de ce duel à obtenu une victoire ou deux victoires et pas plus.

Notons E'_n (resp. E''_n) l'événement il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel à obtenu une victoire (resp. deux victoires) et pas plus.

Notons que le premier cas le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel est A_n et dans le second c'est A_{n-1} .

E_n est réunion disjointe de E'_n et E''_n donc $P(E_n) = P(E'_n) + P(E''_n)$.

E'_n se réalise si et seulement il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro $n-1$ et A_n gagne son premier duel. Ainsi $P(E'_n) = P(E_{n-1}) \times \frac{1}{2}$.

E''_n se réalise si et seulement il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro $n-2$ et A_{n-1} gagne les duels numéros $n-1$ et n .

Ainsi $P(E''_n) = P(E_{n-2}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. $P(E''_n) = \frac{1}{4}P(E_{n-2})$.

Par conséquent $P(E_n) = P(E'_n) + P(E''_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})$.

$$\forall n \in \llbracket 3, +\infty \llbracket, P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}) \quad (\mathcal{R}_1).$$

► *Remarque* En gardant $N = 3$ et en prenant p quelconque on a :

$$P(E_1) = P(E_2) = 1 \text{ et } \forall n \in \llbracket 3, +\infty \llbracket, P(E_n) = pP(E_{n-1}) + pqP(E_{n-2}). \quad \blacktriangleleft$$

Q4. $(P(E_n))_{n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket}$ est une suite réelle vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

Son équation caractéristique est $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0$ (oui $z \in \mathbb{C}!!$).

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) = \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{16} = \left(z - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \left(z - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right).$$

L'équation caractéristique précédente à deux racines distinctes appartenant à \mathbb{R} : $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Alors il existe deux réels λ et μ tel que $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

On a encore $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n !!$

Il existe quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

► *Remarque* Reprenons $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ avec $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

En résolvant le système $\begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 = P(E_1) = 1 \\ \lambda (r_1)^2 + \mu (r_2)^2 = P(E_2) = 1 \end{cases}$ il vient $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\mu = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ainsi $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^n$.

Notons que l'on a encore : $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) = \frac{4\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} \right)$.

On peut simplifier les calculs en posant $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = P(E_{n+1})$. Le système initial est plus simple... ◀

► *Exercice* Dans le cas $N = 3$ et p quelconque, montrer que $r_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4pq}}{2}$, $r_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2}$ et

$$\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4pq}} \right) r_1^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4pq}} \right) r_2^n.$$

Ou encore : $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) = \frac{1}{p\sqrt{p^2 + 4pq}} (r_2^{n+1} - r_1^{n+1})$.

Disons un mot sur le calcul. En résolvant le système $\begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 = P(E_1) = 1 \\ \lambda (r_1)^2 + \mu (r_2)^2 = P(E_2) = 1 \end{cases}$ il vient :

$$\lambda = \frac{1 - r_2}{r_1(r_1 - r_2)} \text{ et } \mu = \frac{1 - r_1}{r_2(r_2 - r_1)}.$$

Une piste pour le calcul de λ . $\lambda = \frac{1 - r_2}{r_1(r_1 - r_2)} = \frac{r_2 - r_2^2}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)}$.

Or $r_2^2 = p r_2 + p q$, $r_1 + r_2 = p$ et $r_1 r_2 = -p q$. Alors $r_2 - r_2^2 = r_2 - p r_2 - p q = q r_2 - p q = q(r_2 - p) = q(-r_1)$.

$\lambda = \frac{-q r_1}{(-p q)(r_1 - r_2)} = \frac{r_1}{p(r_1 - r_2)} = -\frac{r_1}{p\sqrt{p^2 + 4pq}}$. De même $\mu = \frac{r_2}{p\sqrt{p^2 + 4pq}}$. La suite est claire. ◀

Montrons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$. $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

$\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$. Alors $0 > r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} > \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2} > -1$ et $0 < r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} < \frac{1 + 3}{4} = 1$.

Donc r_1 et r_2 sont deux éléments de $] -1, 1[$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_1^n = \lim_{n \rightarrow \text{infi}} r_2^n = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda r_1^n + \mu r_2^n) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0.$$

Q5. La suite $(P(E_n))_{n \geq 2}$ est décroissante pour l'inclusion car pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ l'événement E_{n+1} est contenu dans l'événement E_n .

Donc le théorème de la limite monotone montre que $P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$.

La probabilité de $P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$ est nulle. L'événement $\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n$ est quasi impossible.

Notons que l'événement "le tournoi désignera un vainqueur" est le complémentaire de l'événement $\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n$. Alors :

la probabilité de l'événement "le tournoi désignera un vainqueur" est égale à 1. Cet événement est quasi certain.

► Les trois derniers résultats encadrés valent encore pour $n = 3$ et p quelconque (en attendant mieux...) car $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$. ◀

PARTIE II : Étude du cas général.

1. Ici il y a visiblement un problème. Si $A_k(n)$ se réalise, nécessairement le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n . Ainsi $A_k(n) \subset E_n$. Alors $E_n \cap A_k^{(n)} = A_k^{(n)}$.

Alors $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \frac{P(E_n \cap A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} = \frac{P(A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} = 1!!$ Donc on décroche et on passe à la question suivante!!

2. Soit n un élément de $\llbracket N, +\infty \llbracket$. Reprécisons légèrement les $A_k^{(n)}$. Pour tout k appartenant à $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$ notons $A_k^{(n)}$ l'événement "le tournoi n'est pas terminé après le $n^{\text{ème}}$ duel et le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel a obtenu exactement k victoires".

E_n est réunion disjointe des événements $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_{N-1}^{(n)}$. Donc $P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)})$.

Soit k un élément de $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$. $A_k^{(n)}$ se réalise si et seulement :

- 1. Le tournoi n'est pas terminé après le $(n-k)^{\text{ème}}$ duel.
- 2. Le joueur A_{n-k+1} gagne les duels $n-k+1, n-k+2, \dots, n$. Notons $B_k^{(n)}$ ce dernier événement.

Ainsi $A_k^{(n)} = E_{n-k} \cap B_k^{(n)}$. Donc $P(A_k^{(n)}) = P(E_{n-k} \cap B_k^{(n)}) = P(E_{n-k}) P_{E_{n-k}}(B_k^{(n)})$.

Observons que A_{n-k+1} gagne le duel $n-k+1$ avec la probabilité p .

Si k est supérieur ou égal à 2, pour tout i dans $\llbracket 2, k \rrbracket$ le joueur A_{n-k+1} gagne le duel $n-k+i$ avec la probabilité q .

Alors $P(A_k^{(n)}) = P(E_{n-k}) P_{E_{n-k}}(B_k^{(n)}) = P(E_{n-k}) p q^{k-1} = p q^{k-1} P(E_{n-k})$.

Finalement $P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{n-k})$.

$$\forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{n-k}) \quad (\mathcal{R}_2).$$

3. Pour qu'il y ait un gagnant à ce tournoi il est nécessaire qu'un joueur gagne N duels consécutifs.

Il ne peut donc y avoir de vainqueur à la fin du $k^{\text{ème}}$ duel si k est un élément de $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

Ainsi E_1, E_2, \dots, E_{N-1} sont des événements certains. Alors :

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_{N-1}) = 1.$$

$N \geq N$ (!!) donc la relation (\mathcal{R}_2) permet d'écrire : $P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{N-k})$.

Notons que $\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $N-k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Donc $\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $P(E_{N-k}) = 1$.

$$\text{Alors } P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{N-1} q^{k-1} = p \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} = 1 - q^{N-1}.$$

$$\boxed{P(E_N) = 1 - q^{N-1}.}$$

4. Soit n un élément de $\llbracket N, +\infty \rrbracket$. $P(E_{n+1}) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{n+1-k})$.

Un petit changement d'indice donne : $P(E_{n+1}) = \sum_{k=0}^{N-2} p q^k P(E_{n-k})$. Alors :

$$P(E_{n+1}) = p P(E_n) + \sum_{k=1}^{N-1} p q^k P(E_{n-k}) - p q^{N-1} P(E_{n-(N-1)}).$$

$$\text{Ainsi } P(E_{n+1}) = p P(E_n) + q \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{n-k}) - p q^{N-1} P(E_{n-N+1}) = p P(E_n) + q P(E_n) - p q^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

Donc $P(E_{n+1}) = P(E_n) - p q^{N-1} P(E_{n-N+1})$. Finalement $P(E_n) - P(E_{n+1}) = p q^{N-1} P(E_{n-N+1})$.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket, P(E_n) - P(E_{n+1}) = p q^{N-1} P(E_{n-N+1}) \quad (\mathcal{R}_3).}$$

5. Q est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} k X^{k-1} - 0 = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} k X^{k-1}$.

En particulier Q est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et Q' est strictement positive sur $[0, +\infty[$.

Donc Q est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Alors Q définit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[Q(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x)[$.

Notons que $Q(0) = -1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$. Alors 0 appartient à $[Q(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x)[$.

Par conséquent il existe un unique élément r_N dans $[0, +\infty[$ tel que $Q(r_N) = 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } Q(x) = 0 \text{ possède une unique solution dans l'intervalle } [0, +\infty[.}$$

$$Q(1) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} \right) - 1 = p \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} - 1 = 1 - q^{N-1} - 1 = -q^{N-1} < 0 = Q(r_N).$$

La stricte croissance de Q sur $[0, +\infty[$ donne $1 < r_N$.

Nous avons vu plus haut que Q' est strictement positive sur $[0, +\infty[$. Donc $Q'(r_N) > 0$.

$$\boxed{r_N > 1 \text{ et } Q'(r_N) > 0.}$$

6. Montrons ce résultat à l'aide d'une récurrence d'ordre $N-1$.

- $r_N > 1$ donc $\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $(r_N)^{N-k} > 1$. Ainsi : $\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $\left(\frac{1}{r_N} \right)^{k-N} > 1 = P(E_k)$.

Ainsi la propriété est vraie pour 1, 2, ..., $N-1$.

• Soit n un élément de $\llbracket N, +\infty \llbracket$. Supposons la propriété vraie pour $n - N + 1, n - N + 2, \dots, n - 1$ et montrons la pour n .

L'hypothèse de récurrence donne $\forall k \in \llbracket 1, N - 1 \llbracket, 0 \leq P(E_{n-k}) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N}$.

$$\text{Alors } 0 \leq P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{n-k}) \leq \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} r_N^k.$$

Rappelons que $Q(r_N) = 0$ donc $0 = Q(r_N) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} r_N^k - 1$ donc $\sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} r_N^k = 1$.

Alors $0 \leq P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \times 1 = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

$$7. \forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, 0 \leq P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} = r_N^N \left(\frac{1}{r_N}\right)^n.$$

$r_N > 1$ donc $\left|\frac{1}{r_N}\right| < 1$. Alors la série de terme général $\left(\frac{1}{r_N}\right)^n$ est convergente.

Il en est de même de la série de terme général $r_N^N \left(\frac{1}{r_N}\right)^n$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $P(E_n)$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} P(E_n) \text{ converge.}}$$

$\forall n \in \llbracket N, +\infty \llbracket, P(E_n) - P(E_{n+1}) = p q^{N-1} P(E_{n-N+1})$ donc $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, P(E_{n+N-1}) - P(E_{n+N}) = p q^{N-1} P(E_n)$.

$$\forall s \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, p q^{N-1} \sum_{n=1}^s P(E_n) = \sum_{n=1}^s (P(E_{n+N-1}) - P(E_{n+N})) = P(E_N) - P(E_{s+N}).$$

$\forall s \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, \sum_{n=1}^s P(E_n) = \frac{1}{p q^{N-1}} (P(E_N) - P(E_{s+N}))$. Or la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n)$ converge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$.

Alors :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^s P(E_n) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p q^{N-1}} (P(E_N) - P(E_{s+N})) \right) = \frac{P(E_N)}{p q^{N-1}} = \frac{1 - q^{N-1}}{p q^{N-1}}. \text{ Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1 - q^{N-1}}{p q^{N-1}}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1 - q^{N-1}}{p q^{N-1}}.}$$

8. (a) Notons que si $n \in \llbracket 2, N - 1 \llbracket, E_{n-1} \cap \overline{E_n} = \emptyset$ et $\{X = n\} = \emptyset$.

Donc si $n \in \llbracket 2, N - 1 \llbracket, P(E_{n-1} \cap \overline{E_n}) = 0 = P(X = n)$. Soit n un élément de $\llbracket N, +\infty \llbracket$.

$\{X = n\}$ se réalise si et seulement si le gagnant n'a pas été obtenu à l'issue des duels 1, 2, ..., n-1 et si il est obtenu au duel numéro n . Donc $\{X = n\} = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap \overline{E_n}$. Or $E_{n-1} \subset E_{n-2} \subset \dots \subset E_1$ donc $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1} = E_{n-1}$.

Ainsi $\{X = n\} = E_{n-1} \cap \overline{E_n}$.

Pour tout élément n de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, les événements $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ et $\{X = n\}$ sont égaux.

(b) Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. $E_{n-1} = (E_{n-1} \cap E_n) \cup (E_{n-1} \cap \overline{E_n}) = E_n \cup (E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ (car $E_n \subset E_{n-1}$).

Par incompatibilité il vient : $P(E_{n-1}) = P(E_n) + P(E_{n-1} \cap \overline{E_n}) = P(E_n) + P(X = n)$.

Donc $P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n)$ et ceci pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

Rappelons que $X(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket N, +\infty \llbracket$. Soit s un élément de $\llbracket N, +\infty \llbracket$. Posons $T_s = 0 \times P(X = 0) + \sum_{n=N}^s n P(X = n)$.

$$T_s = \sum_{n=N}^s n P(X = n) = \sum_{n=2}^s n P(X = n) \text{ car } P(X = 2) = P(X = 3) = \dots = P(X = n - 1) = 0.$$

$$T_s = \sum_{n=2}^s n P(X = n) = \sum_{n=2}^s n (P(E_{n-1}) - P(E_n)) = \sum_{n=2}^s n P(E_{n-1}) - \sum_{n=2}^s n P(E_n).$$

$$T_s = \sum_{n=1}^{s-1} (n+1) P(E_n) - \sum_{n=2}^s n P(E_n) = \sum_{n=1}^{s-1} (n+1) P(E_n) - \left(\sum_{n=1}^{s-1} n P(E_n) - P(E_1) + s P(E_s) \right).$$

$$T_s = \sum_{n=1}^{s-1} P(E_n) + 1 - s P(E_s) \text{ (car } P(E_1) = 1).$$

Rappelons que la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1 - q^{N-1}}{p q^{N-1}}$.

De plus $\forall s \in \llbracket 1, +\infty \llbracket$, $0 \leq s P(E_s) \leq s \left(\frac{1}{r_N} \right)^{s-N} = r_N^N \left(s \left(\frac{1}{r_N} \right)^s \right)$.

Or $\left| \frac{1}{r_N} \right| < 1$ donc $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(r_N^N \left(s \left(\frac{1}{r_N} \right)^s \right) \right) = r_N^N \times 0 = 0$. Alors par encadrement on obtient $\lim_{s \rightarrow +\infty} (s P(E_s)) = 0$.

$$\text{Ainsi } \lim_{s \rightarrow +\infty} T_s = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{s-1} P(E_n) + 1 - s P(E_s) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) + 1 - 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) + 1.$$

$$\text{Alors } \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(0 \times P(X = 0) + \sum_{n=N}^s n P(X = n) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) + 1.$$

Ainsi la série de terme général $n P(X = n)$ converge et est à termes positifs. Elle est donc absolument convergente.

Donc :

X admet une espérance.

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(0 \times P(X = 0) + \sum_{n=N}^s n P(X = n) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) + 1 \text{ donc :}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) + 1.$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) + 1 = \frac{1 - q^{N-1}}{p q^{N-1}} + 1 = \frac{1 - q^{N-1} + p q^{N-1}}{p q^{N-1}} = \frac{1 - (1-p) q^{N-1}}{p q^{N-1}} = \frac{1 - q^N}{p q^{N-1}}.$$

$$E(X) = \frac{1 - q^N}{p q^{N-1}}.$$

PARTIE III : Calcul de $P(\mathbf{E}_n)$.

Q1. Montrons d'abord les résultats admis.

$$(qX - 1)Q(X) = (qX - 1) \left(\sum_{k=1}^{N-1} (pq^{k-1}X^k) - 1 \right) = \sum_{k=1}^{N-1} (pq^k X^{k+1}) - \sum_{k=1}^{N-1} (pq^{k-1} X^k) - qX + 1.$$

$$(qX - 1)Q(X) = \sum_{k=2}^N (pq^{k-1} X^k) - \sum_{k=1}^{N-1} (pq^{k-1} X^k) - qX + 1 = pq^{N-1} X^N - pX - qX + 1 = 1 - X + pq^{N-1} X^N.$$

$$(qX - 1)Q(X) = R(X).$$

$$XR'(X) - NR(X) = X(0 - 1 + pq^{N-1}NX^{N-1}) - N(1 - X + pq^{N-1}X^N).$$

$$XR'(X) - NR(X) = -X + Npq^{N-1}X^N - N + NX - Npq^{N-1}X^N = (N-1)X - N.$$

$$\boxed{(qX - 1)Q(X) = R(X) \text{ et } XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N.}$$

Soit z un complexe racine de Q et de Q' . Alors $R(z) = (qz - 1)Q(z) = 0$ car $Q(z) = 0$.

$R'(X) = qQ(X) + (qX - 1)Q'(X)$ donc $R'(z) = qQ(z) + (qz - 1)Q'(z) = 0$ car $Q(z) = Q'(z) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est un complexe racine de } Q \text{ et de } Q', z \text{ est racine de } R \text{ et de } R'.$$

Soit z un complexe racine de Q et de Q' . Alors z est racine de R et de R' .

Rappelons que $XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N$.

Alors $0 = zR'(z) - NR(z) = (N-1)z - N$. Donc $z = \frac{N}{N-1}$. Ainsi z est un réel qui appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est un complexe racine de } Q \text{ et de } Q', z \text{ est un réel qui appartient à l'intervalle } [0, +\infty[.}$$

Soit z un complexe racine de Q et de Q' . Alors d'après ce qui précède z est un réel qui appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$.

Or $\forall x \in [0, +\infty[$, $Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}kx^{k-1} > 0$. Ceci contredit $z \in [0, +\infty[$ et $Q'(z) = 0$.

$$\boxed{\text{Chaque racine complexe de } Q \text{ est de multiplicité } 1.}$$

Q appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc Q appartient à $\mathbb{C}[X]$. De plus Q est de degré $N-1$ et $N-1 \geq 2$.

Alors dans $\mathbb{C}[X]$, Q est scindé et à racines simples d'après ce qui précède.

Notons que $Q(0) = -1$. Ainsi les racines de Q dans \mathbb{C} ne sont pas nulles.

$$\boxed{\text{Ainsi il existe un complexe } \gamma \text{ (et même un réel) non nul et } N-1 \text{ complexes } z_1, z_2, \dots, z_{N-1} \text{ non nuls et deux à deux distincts tels que } Q = \gamma(X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_{N-1}).}$$

Q2. (a) • Comme z_1, z_2, \dots, z_{N-1} sont des complexes non nuls, f est bien une application de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans \mathbb{C}^{N-1} .

• Soit λ un élément de \mathbb{C} . Soient S et T deux éléments de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$.

$$f(\lambda S + T) = \left((\lambda S + T) \left(\frac{1}{z_1} \right), (\lambda S + T) \left(\frac{1}{z_2} \right), \dots, (\lambda S + T) \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right) \right).$$

$$f(\lambda S + T) = \left(\lambda S \left(\frac{1}{z_1} \right) + T \left(\frac{1}{z_1} \right), \lambda S \left(\frac{1}{z_2} \right) + T \left(\frac{1}{z_2} \right), \dots, \lambda S \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right) + T \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right) \right).$$

$$f(\lambda S + T) = \lambda \left(S \left(\frac{1}{z_1} \right), S \left(\frac{1}{z_2} \right), \dots, S \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right) \right) + \left(T \left(\frac{1}{z_1} \right), T \left(\frac{1}{z_2} \right), \dots, T \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right) \right) = \lambda f(S) + f(T).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (P, Q) \in \mathbb{C}_{N-2}[X] \times \mathbb{C}_{N-2}[X], f(\lambda S + T) = \lambda f(S) + f(T)$. f est une application linéaire.

- Soit S un élément de $\text{Ker } f$. $f(S) = 0_{\mathbb{C}^{N-1}}$ donc $S \left(\frac{1}{z_1} \right) = S \left(\frac{1}{z_2} \right) = \dots = S \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right) = 0$.

z_1, z_2, \dots, z_{N-1} sont $N - 1$ nombres complexes deux à deux distincts il en est de même pour $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_{N-1}}$.

$\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_{N-1}}$ sont $N - 1$ racines deux à deux distinctes de S qui est un polynôme de degré au plus $N - 2$.

Alors S est le polynôme nul.

Donc le noyau de f est réduit au polynôme nul. Ainsi f est une application linéaire injective de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans \mathbb{C}^{N-1} .

Or $\dim \mathbb{C}_{N-2}[X] = N - 1$ et $\dim \mathbb{C}^{N-1} = N - 1$ donc $\dim \mathbb{C}_{N-2}[X] = \dim \mathbb{C}^{N-1} < +\infty$.

Dans ces conditions f est une application linéaire bijective de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans \mathbb{C}^{N-1} .

f est un isomorphisme de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ sur \mathbb{C}^{N-1} .

$$(b) \forall k \in \llbracket 0, N - 2 \rrbracket, f(X^k) = \left(\left(\frac{1}{z_1} \right)^k, \left(\frac{1}{z_2} \right)^k, \dots, \left(\frac{1}{z_{N-1}} \right)^k \right) = \left(\frac{1}{(z_1)^k}, \frac{1}{(z_2)^k}, \dots, \frac{1}{(z_{N-1})^k} \right).$$

Pour tout k dans $\llbracket 0, N - 2 \rrbracket$, la matrice des coordonnées de $f(X^k)$ dans la base canonique de \mathbb{C}^{N-1} est $\begin{pmatrix} \frac{1}{(z_1)^k} \\ \frac{1}{(z_2)^k} \\ \vdots \\ \frac{1}{(z_{N-1})^k} \end{pmatrix}$.

Alors :

La matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et de \mathbb{C}^{N-1} est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \cdots & \frac{1}{(z_1)^{N-3}} & \frac{1}{(z_1)^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \cdots & \frac{1}{(z_2)^{N-3}} & \frac{1}{(z_2)^{N-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_{N-2}} & \cdots & \frac{1}{(z_{N-2})^{N-3}} & \frac{1}{(z_{N-2})^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_{N-1}} & \cdots & \frac{1}{(z_{N-1})^{N-3}} & \frac{1}{(z_{N-1})^{N-2}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour tout } n \text{ dans } \llbracket N, +\infty \llbracket, u_n = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} u_{n-k}.$$

Montrons par une récurrence d'ordre $N - 1$ que pour tout n dans \mathbb{N}^* , $P(E_n) = u_n$.

- $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})$ est solution de (\mathcal{S}) donc $\forall n \in \llbracket 1, N - 1 \llbracket, P(E_n) = \frac{\alpha_1}{z_1^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{z_2^{n-1}} + \dots + \frac{\alpha_{N-1}}{z_{N-1}^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j} \right)^{n-1}$.

Ainsi, $\forall n \in \llbracket 1, N - 1 \llbracket, P(E_n) = u_n$. La propriété est vraie pour $1, 2, \dots, N - 1$.

- Soit n dans $\llbracket N, +\infty \llbracket$. Supposons la propriété vraie pour $n - N, n - N + 1, \dots, n - 1$ et montrons la pour n .

L'hypothèse de récurrence indique que $\forall k \in \llbracket 1, N - 1 \llbracket, P(E_{n-k}) = u_{n-k}$.

De plus (\mathcal{R}_2) donne $P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} P(E_{n-k})$. lors $P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} p q^{k-1} u_{n-k} = u_n$. Ceci achève la récurrence.

$$\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*, P(E_n) = u_n.$$