PROBLEME

PARTIE : Calculs de discrétisées

(Q1)

```
function pipo(a:real):integer;
begin
pipo:=floor(a*random);
end;
```

(Q2) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X_d = k) = P(k \leqslant X < k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

(Q3) $X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$.
Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{ si } x \in [0, N] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. f_X est une densité de X.

$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{N}\,dx = \frac{1}{N}$.

$P(X_d = N) = \int_N^{N+1} f_X(x)\,dx = 0$ car f_X est nulle sur $]N, N+1]$.

Ainsi $X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$, $\forall k \in [\![0, N-1]\!]$, $P(X_d = k) = \frac{1}{N}$ et $P(X_d = N) = 0$.

On peut sans doute dire que X_d suit la loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$ ...

(Q4) Posons $\forall k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $L(k) = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{k+1}{k}$.

- $\{1, 2, \dots, 9\}$ est fini
- $\forall k \in [\![1, 9]\!]$, $L(k) = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{k+1}{k} \geqslant 0$ $\left(\frac{k+1}{k} \geqslant 1 \right)$
- $\sum_{k=1}^{9} L(k) = \frac{1}{\ln 10} \sum_{k=1}^{9} \ln \frac{k+1}{k} = \frac{1}{\ln 10} \sum_{k=1}^{9} (\ln(k+1) - \ln k) = \frac{1}{\ln 10} (\ln 10 - \ln 1) = 1$.

ceci suffit pour dire que L est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

▼ <u>Remarque</u>.. Notons que les points 2 et 3 donnent $\forall k \in [\![1,9]\!]$, $L(k) \leq 1$ ... ▲

<u>On définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant</u> :

$$Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, 9\} \text{ et } \forall k \in Y(\Omega),\ P(Y=k) = \frac{1}{\ln 10} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

▼ <u>Remarque</u> .. Nous passerons prudemment sur la formulation de cette conclusion ▲

Q4 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1, 10[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{1, 10\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
- f est nulle sur $]-\infty, 1[$ et sur $[10, +\infty[$ donc $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt$ et $\int_{10}^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$$\forall x \in [1, 10[,\ \int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(10)} \int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 10} [\ln t]_1^x = \frac{\ln x}{\ln(10)}.$$

Alors $\lim_{x \to 10^-} \int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x \to 10^-} \frac{\ln x}{\ln(10)} = 1$. $\int_1^{10} f(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Les trois points précédents permettent de dire que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ admettant f pour densité.

X prend ses valeurs dans $[1, 10[$ donc $X_d(\Omega) = [\![1, 9]\!]$.

$$\forall k \in [\![1,9]\!],\ P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 10} [\ln x]_k^{k+1} = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)}.$$

$\forall k \in [\![1,9]\!]$, $P(X_d = k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. X_d suit la loi de Y.

R.

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(10)} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1, 10[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$:

1) f est une densité de probabilité

2) une variable aléatoire X qui possède f pour densité a une discrétisée Xd qui suit la loi de Y.

(Q5) a) Notons F la fonction de répartition de X et F_n celle de nX.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(nX \leq x) = P(X \leq \frac{x}{n}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{x}{n}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors nX suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n} x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_n est une densité de nX.

b) Posons $Z_n = \lfloor nX \rfloor$.

- Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
- $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Z_n = k) = \int_k^{k+1} f_n(x)\,dx = \int_k^{k+1} \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n} x}\,dx = \left[-e^{-\frac{\lambda}{n} x}\right]_k^{k+1} = e^{-\frac{\lambda}{n} k} - e^{-\frac{\lambda}{n}(k+1)} = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})(e^{-\frac{\lambda}{n}})^k$

on aurait pu utiliser F_n...

$\lfloor nX \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(\lfloor nX \rfloor = k) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})(e^{-\frac{\lambda}{n}})^k$.

Notons que $e^{-\lambda/n} \in]0, 1[$ car $\lambda \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\hat{Z}_n = \lfloor nX \rfloor + 1 = Z_n + 1$.

$\hat{Z}_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\hat{Z}_n = k) = P(Z_n + 1 = k) = P(Z_n = k-1) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})(e^{-\frac{\lambda}{n}})^{k-1}$.

Alors $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $a_n = \lfloor nx \rfloor$

$P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{\lfloor nX \rfloor}{n} \leq x\right) = P(Z_n \leq nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{a_n} (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})(e^{-\frac{\lambda}{n}})^k$

R.

$$P(Y_n \leq x) = (1-e^{-\frac{\lambda}{n}}) \sum_{k=0}^{\alpha_n} (e^{-\frac{\lambda}{n}})^k \underset{\underset{e^{-\lambda/n} \neq 1}{\uparrow}}{=} (1-e^{-\frac{\lambda}{n}}) \frac{1-(e^{-\frac{\lambda}{n}})^{\alpha_n+1}}{1-e^{-\frac{\lambda}{n}}} = 1 - e^{-\frac{\lambda(\alpha_n+1)}{n}} = 1 - e^{-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor+1)}{n}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ P(Y_n \leq x) = 1 - e^{-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor+1)}{n}} = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor+1)}{n}\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

a] $\forall$ $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$; $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$.

Alors $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'encadrement il vient facilement $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ car $\lim_{n \to +\infty} (x - \frac{1}{n}) = x$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor+1)}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(-\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda x$.

Par continuité de la fonction exponentielle il vient $\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor+1)}{n}} = e^{-\lambda x}$

donc $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$. $P(Y_n \leq x) = P(\frac{\lfloor nX \rfloor}{n} \leq x) = P(\lfloor nX \rfloor \leq nx) = \sum_{k=-\infty}^{\lfloor nx \rfloor} P(\lfloor nX \rfloor = k) \underset{\uparrow}{=} 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = 0$ et ceci pour tout x dans $]-\infty, 0[$.

nX prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = F(x)$ où F est la fonction de répartition de X.

Alors $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X donc vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales »

Q1 Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(e_k)(x) = \int_x^{x+1} e_k(t)\,dt = \int_x^{x+1} t^k\,dt = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1}\right]_x^{x+1} = \frac{1}{k+1}\left((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i} x^i - x^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i} x^i + \underbrace{\underbrace{\binom{k+1}{k+1}}_{=1} x^{k+1} - x^{k+1}}_{=0}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(e_k)x = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i} e_i(x)$

Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $u(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i} e_i$. Notons que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u(e_k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \int_x^{x+1}(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(t)\,dt = \int_x^{x+1}(\lambda\varphi_1(t) + \varphi_2(t))\,dt = \lambda\int_x^{x+1}\varphi_1(t)\,dt + \int_x^{x+1}\varphi_2(t)\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \lambda u(\varphi_1)(x) + u(\varphi_2)(x) = (\lambda u(\varphi_1) + u(\varphi_2))(x)$. $u(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda u(\varphi_1) + u(\varphi_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, $u(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda u(\varphi_1) + u(\varphi_2)$. u est linéaire.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$.

Comme u est linéaire : $u(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k u(e_k)$.

Rappelons alors que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u(e_k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $u(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k u(e_k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall \varphi \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(\varphi) \in \mathbb{R}_n[X]$. u est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q3 Posons $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k} = 1$. Donc tous les éléments diagonaux de cette matrice valent 1.

Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est inversible.

Par conséquent u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. u transforme alors la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $(u(e_0), u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque.. On pouvait aussi obtenir ce résultat en remarquant que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg u(e_k) = k$ ... famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés ...

(Q4) Nous venons de voir que u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$!

Alors $\forall R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists !\, Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(Q_R) = R$.

Ainsi $\forall R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists !\, Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = u(Q_R)(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt$.

Pour tout polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ il existe un unique polynôme Q_R de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt$.

(Q5) $n=1$. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $Q_R = aX+b$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{6} = \int_x^{x+1} (at+b)\,dt = a\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{x+1} + b\,[t]_x^{x+1} = \frac{a}{2}[(x+1)^2 - x^2] + b\,[x+1-x]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{6} = \frac{a}{2}(x^2+2x+1-x^2) + b = ax + \frac{a}{2} + b$. Alors $\begin{cases} \frac{1}{6} = a \\ 0 = \frac{a}{2} + b \end{cases}$; $\begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{12} \end{cases}$.

$Q_R = \frac{1}{6}X - \frac{1}{12}$ lorsque $n=1$ et $R = \frac{1}{6}X$.

(Q6) a) f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $[N+1, +\infty[$.

Donc X prend ses valeurs dans $[0, N[$. X_d prend ses valeurs dans $[\![0,N]\!]$.

$\forall k \in [\![0,N]\!]$, $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_k^{k+1} g(t)\,dt$.

Posons $R = u(g)$. Alors R appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} g(t)\,dt = R(k)$.

Il existe un polynôme R de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $\begin{cases} X_d(\Omega) = [\![0, N]\!] \\ \forall k \in X_d(\Omega),\ P(X_d = k) = R(k) \end{cases}$

b) Supposons qu'il existe un polynôme φ de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

H1 $\forall x \in [0, 4[,\ f(x) = \varphi(x)$

H2 Y est la discrétisée de X.

Alors $\forall k \in [\![0, 3]\!]$, $P(X_d = k) = \frac{k}{6}$. Donc $P(X_d = 0) = 0$.

$0 = P(X_d = 0) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$. Ainsi $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0$.

φ est continue sur $[0,1]$, $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(t) \geq 0$ et $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(x) = 0$. φ admet donc une infinité de racines.

Donc φ est le polynôme nul. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$. Alors $\forall x \in [0, 4[$, $f(x) = 0$.

Dans ces conditions $\frac{1}{6} = P(Y = 1) = P(X_d = 1) = \int_1^2 f(x)\,dx = 0$!!

Il n'existe aucun polynôme φ de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [0, 4[,\ f(x) = \varphi(x)$ et Y est la discrétisée de X.

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ |g'(x+k)| \leq \frac{c}{(1+x+k)^2} \underset{1+x+k \geq k > 0}{\leq} \frac{c}{k^2}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq |g'(x+k)| \leq \frac{c}{k^2}$ et la série de terme général $\frac{c}{k^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|g'(x+k)|$ converge.

La série de terme général $g'(x+k)$ est absolument convergente donc elle est convergente.

g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ g'(x) \leq 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ g'(x+k) \leq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \geq 0$.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[, \ g(x) = 0$.

Alors g a un signe positif sur $\mathbb{R}$.

Q2 a) Soit $(x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

Quitte à échanger les rôles de a et de x on peut supposer que $a \leq x$.

- g' est de classe C^1 sur $[a+k, x+k]$.
- De plus $\forall u \in [a+k, x+k], \ |g''(u)| \leq \frac{c}{(1+u)^2} \underset{1+u \geq 1+a+k > 0}{\leq} \frac{c}{(1+a+k)^2} \underset{1+a+k \geq 1+k > 0}{\leq} \frac{c}{(1+k)^2}$.

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \frac{c}{(1+k)^2} |(x+k)-(a+k)| = \frac{c|x-a|}{(1+k)^2}$.

$\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ |g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \frac{c|x-a|}{(1+k)^2}$.

b) Soit $(x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Soit $r \in \mathbb{N}$.

$\left|-\sum_{k=0}^{r} g'(x+k) - \left(-\sum_{k=0}^{r} g'(a+k)\right)\right| = \left|-\left(\sum_{k=0}^{r} (g'(x+k) - g'(a+k))\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{r} (g'(x+k) - g'(a+k))\right|$

$$\left|-\sum_{k=0}^{r} g'(x+k) - \left(-\sum_{k=0}^{r} g'(a+k)\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{r} |g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{C|x-a|}{(k+1)^2}\right).$$

$\left|-\sum_{k=0}^{r} g'(x+k) - \left(-\sum_{k=0}^{r} g'(a+k)\right)\right| \leq C|x-a| \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{(k+1)^2}$. Comme la série de terme général

$\frac{1}{(k+1)^2}$ est convergente, on obtient en faisant tendre r vers $+\infty$:

$|f(x) - f(a)| \leq \left(C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\right)|x-a|$. Posons $D = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

D est positif ou nul car C est positif ou nul et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ est positif.

Alors $|f(x) - f(a)| \leq D|x-a|$.

<u>Ainsi il existe un réel $D \geq 0$ tel que : $\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|f(x) - f(a)| \leq D|x-a|$.</u>

Soit a un réel <u>strictement</u> positif.

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\eta, a+\eta[\subset [0, +\infty[$.

$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$, $0 \leq |f(x) - f(a)| \leq D|x-a|$ et $\lim_{x \to a} (D|x-a|) = 0$.

Alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; f est continue en a.

Supposons que $a = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq |f(x) - f(a)| = |f(x) - f(0)| \leq D|x-a| = D|x|$.

De plus $\lim_{x \to 0^+} (D|x|) = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$. f est continue à droite en $a = 0$.

<u>f est continue en tout point de $]0, +\infty[$ et f est continue à droite en 0.</u>

<u>Remarques.</u> 1.- f est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc f est continue en tout point de $]-\infty, 0[$

2.- f est continue au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc au moins sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de point.

3.- f est continue en 0 si et seulement $f(0) = 0$... donc si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$. $a'(k) = 0$. non ?

Q3 a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un élément de $\mathbb{R}_+^*$

$0 < t+k \leq t+k+1$ et $t+k+1 > 0$.

Alors $0 \leq (t+k)(t+k+1) \leq (t+k+1)^2$; $\dfrac{1}{(t+k+1)^2} \leq \dfrac{1}{(t+k)(t+k+1)}$.

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leq \frac{(t+k+1)-(t+k)}{(t+k)(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.}}$$

Soit N un élément de $\mathbb{N}$ et soit t un élément de $\mathbb{R}_+$.

Soit $r \in [\![N+1, +\infty[\![$

$$\left|-\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leq \sum_{k=N+1}^{r} |g'(t+k)| \leq \sum_{k=N+1}^{r} \frac{c}{(t+k+1)^2} \overset{c \geq 0}{\leq} c \sum_{k=N+1}^{r} \left[\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right].$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |g'(x)| \leq \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

$$\left|-\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leq c\left[\frac{1}{t+N+1} - \frac{1}{t+r+1}\right] \leq c\,\frac{1}{t+N+1} \leq \frac{c}{N+1}.$$

$\forall r \in [\![N+1, +\infty[\![,\ \left|-\displaystyle\sum_{k=N+1}^{r} g'(t+k)\right| \leq \dfrac{c}{N+1}$. En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

$$|R_N(t)| \leq \frac{c}{N+1}.$$

$$\underline{\underline{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |R_N(t)| \leq \frac{c}{N+1}.}}$$

b) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \Big(-\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k)\Big)\,dt = \int_0^1 (S_N(t) + R_N(t))\,dt = \int_0^1 S_N(t)\,dt + \int_0^1 R_N(t)\,dt$.

$$\int_0^1 S_N(t)\,dt = \int_0^1 \Big(-\sum_{k=0}^{N} g'(t+k)\Big)\,dt = -\sum_{k=0}^{N} \int_0^1 g'(t+k)\,dt = -\sum_{k=0}^{N} \big[g(t+k)\big]_0^1 = -\sum_{k=0}^{N} (g(1+k) - g(k)).$$

$$\int_0^1 S_N(t)\,dt = -(g(N+1) - g(0)) = g(0) - g(N+1).$$

$$\underline{\underline{\text{Ainsi } \forall N \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt}}$$

c) La série de terme général $g(k)$ converge donc $\underline{\underline{\lim_{k \to +\infty} g(k) = 0}}$.

$\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \left|\int_0^1 R_N(t)dt\right| \underset{\underset{0 \leq 1}{\uparrow}}{\leq} \int_0^1 |R_N(t)|dt \underset{0 \leq 1}{\leq} \int_0^1 \frac{c}{N+1} = \frac{c}{N+1}$ et $\lim_{N \to +\infty} \frac{c}{N+1} = 0$.

Il vient alors par encadrement $\lim_{N \to +\infty} \left(\int_0^1 R_N(t)dt\right) = 0$.

$\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)dt$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient $\int_0^1 f(t)dt = g(0) - 0 + 0 = g(0)$.

$\underline{\underline{\int_0^1 f(t)\,dt = g(0)}}$.

Q4) a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t+1) - f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+1+k) - \left(-\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k)\right) = -\sum_{\underset{=}{k=1}}^{\overset{\overset{k \leftarrow k+1\,!}{\downarrow}}{+\infty}} g'(t+k) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) = g'(t).$$

$\underline{\underline{\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t+1) - f(t) = g'(t)}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x (f(t+1) - f(t))dt = \underbrace{\int_0^x f(t+1)dt}_{1} - \int_0^x f(t)dt$.

$$g(x) \underset{\underset{\text{changement de variable } u = t+1 \text{ dans } 1}{\uparrow}}{=} g(0) + \int_1^{x+1} f(u)du - \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{x+1} f(t)dt + \int_x^0 f(t)dt \underset{\underset{\text{Chasles}}{\uparrow}}{=} \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

donc $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt}}$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $S_N = \int_0^N f(t)dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$.

$\underline{\underline{\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. f est positive sur $\mathbb{R}_+$, $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Ainsi $\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)dt \geq 0$ et $\int_{x}^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)dt \geq 0$. Alors $\int_0^x f(t)dt - \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)dt \geq 0$ et $\int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \geq 0$.

donc $S_{\lfloor x \rfloor} = \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)dt = S_{\lfloor x \rfloor + 1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S_{\lfloor x \rfloor} \leq \int_0^x f(t)dt \leq S_{\lfloor x \rfloor + 1}$.

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1.$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ et $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$. De plus $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (\lfloor x \rfloor + 1) = +\infty$.

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} S_{\lfloor x \rfloor} = \lim_{x \to +\infty} S_{\lfloor x \rfloor + 1} = 1$.

Alors par encadrement il vient $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

c) • f est positive sur $\mathbb{R}$ (III Q 1)

• f est continue en tout point de $]0, +\infty[$ (III Q 2 (b)) et nulle sur $]-\infty, 0[$.

Donc f est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

• $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut 1. f étant nulle sur $]-\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ existe et vaut 0. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Alors f est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

f est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Alors $X_d(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\forall k \in X(\Omega)$, $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\,dt = g(k)$ d'après III Q4(a)

donc X_d suit la même loi que Y.

<u>f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et la discrétisée X_d de X suit la même loi que Y.</u>