97+

Q1 a) u (resp. v) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ (resp. $\mathbb{R}-\{1\}$) comme fonction rationnelle.

montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $u^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p\, p!}{(1+x)^{p+1}}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

- C'est clair pour $p=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $u^{(p)}(x) = (-1)^p\, p!\,(1+x)^{-p-1}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $u^{(p+1)}(x) = (-1)^p p!\,(-p-1)(1+x)^{-p-1-1}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $u^{(p+1)}(x) = \dfrac{(-1)^p\, p!\,(-1)(p+1)}{(1+x)^{p+2}} = \dfrac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{(1+x)^{p+2}}$.

De même $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v^{(p)}(x) = p!\,(1-x)^{-p-1}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v^{(p+1)}(x) = p!\,(-1)(-p-1)(1-x)^{-p-1-1}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v^{(p+1)}(x) = \dfrac{p!\,(p+1)}{(1-x)^{p+2}} = \dfrac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$ ce qui achève la récurrence.

donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $u^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p\, p!}{(1+x)^{p+1}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $v^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$ et ceci pour tout p dans $\mathbb{N}$.

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \neq 0 \text{ et } \frac{1-x}{1+x} > 0\}$ donc $D_f =]-1, 1[$.

$\forall x \in D_f$, $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ $(1-x>0 \text{ et } 1+x>0)$.

Par conséquent f est dérivable sur D_f comme différence de deux fonctions dérivables sur D_f.

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$. $\forall x \in D_f$, $f'(x) = -u(x) - v(x)$.

u et v étant de classe C^∞ sur D_f, f' est de classe C^∞ sur D_f. Par conséquent :

f est de classe C^∞ sur D_f.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in D_f$, $f'(x) = -u(x)-v(x)$

$\forall x \in D_f$, $f^{(p)}(x) = -u^{(p-1)}(x) - v^{(p-1)}(x) = -\dfrac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(1+x)^p} - \dfrac{(p-1)!}{(1-x)^p}$

$\forall x\in D_f$, $f^{(p)}(x) = (p-1)!\left[\dfrac{(-1)^p}{(1+x)^p} - \dfrac{1}{(1-x)^p}\right]$.

c) Si $k=0$ $f^{(2k)}(0)=f(0)=0$. Si $k\in\mathbb{N}^*$, $f^{(2k)}(0) = (2k-1)!\left[\dfrac{(-1)^{2k}}{(1+0)^{2k}} - \dfrac{1}{(1-0)^{2k}}\right]=0$

donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{(2k)}(0)=0$.

Remarque.. ceci n'est pas une surprise. En effet f est impaire sur $]-1,1[$ donc $f^{(p)}$ est impaire (resp. paire) sur D_f si p est pair (resp. impair).

Soit $k\in\mathbb{N}$. $f^{(2k+1)}(0) = (2k+1-1)!\left[\dfrac{(-1)^{2k+1}}{(1+0)^{2k+1}} - \dfrac{1}{(1-0)^{2k+1}}\right] = ((2k)!)(-1-1) = -2(2k)!$

$\forall k\in\mathbb N$, $f^{(2k+1)}(0) = -2(2k)!$

en fait il y a égalité !!

Soit $x\in[0,1/3]$ et $n\in\mathbb N$.

$|f^{(2n+3)}(x)| = (2n+2)!\left|\dfrac{(-1)^{2n+3}}{(1+x)^{2n+3}} - \dfrac{1}{(1-x)^{2n+3}}\right| \le (2n+2)!\left[\dfrac{1}{(1+x)^{2n+3}}+\dfrac{1}{(1-x)^{2n+3}}\right]$

$x\in[0,1/3]$ donc $(1+x)^{2n+3}\ge 1$ et $(1-x)^{2n+3}\ge(1-1/3)^{2n+3}=\left(\frac23\right)^{2n+3}$

donc $|f^{(2n+3)}(x)| \le (2n+2)!\left[\dfrac11 + \dfrac{1}{(2/3)^{2n+3}}\right] = (2n+2)!\left(1+\left(\frac32\right)^{2n+3}\right) \le (2n+2)!\left(2\times\left(\frac32\right)^{2n+3}\right)$

$1\le\left(\frac32\right)^{2n+3}$, fin non? **

$|f^{(2n+3)}(x)| \le (2n+2)!\; 2\times\dfrac{3^{2n+3}}{2^{2n+3}} = (2n+2)!\,\dfrac{3^{2n+3}}{2^{2n+2}} = (2n+2)!\,\dfrac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$

donc $\forall x\in[0,1/3]$, $|f^{(2n+3)}(x)|\le(2n+2)!\,\dfrac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb N$.

d) f est au moins de classe C^{2n+3} sur $[0,1/3]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors: $\forall x\in[0,1/3]$, $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{2n+2}\dfrac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)\right| \le \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\max_{t\in[0,x]}|f^{(2n+3)}(t)|$

Notons que $f^{(2k)}(0)=0$ et $f^{(2k+1)}(0)=-2(2k)!$ pour tout $k\in\mathbb N$.

De plus: $\max_{t\in[0,x]}|f^{(2n+3)}(t)| \le \max_{t\in[0,1/3]}|f^{(2n+3)}(t)| \le (2n+2)!\,\dfrac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$ pour tout $x\in[0,1/3]$.

Ainsi $\forall x\in[0,1/3]$, $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-2((2k)!))\right| \le \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\times(2n+2)!\,\dfrac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$

donc $\forall x\in[0,1/3]$, $\left|f(x)+2\sum_{k=0}^n\dfrac{(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right| \le \dfrac{|3x|^{2n+3}}{2n+3}\times\dfrac{1}{4^{n+1}} \le \dfrac{1}{(2n+3)4^{n+1}}$.

Donc $\forall x\in[0,1/3]$, $\left|f(x)+2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right|\leq\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$.

Donc $\forall x\in[0,1/3]$, $|f(x)+2S_n(x)|\leq\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$.

(Q2) a) $a\in[1,2]$. $x=\frac{a-1}{a+1}=\frac{a+1-2}{a+1}=1-\frac{2}{a+1}$.

$2\leq a+1\leq 3$; $\frac{2}{3}\leq\frac{2}{a+1}\leq 1$; $1-1\leq x=1-\frac{2}{a+1}\leq 1-\frac{2}{3}$ donc $x\in[0,\frac{1}{3}]$.

Ainsi : $|f(x)+2S_n(x)|\leq\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$

$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1-\frac{a-1}{a+1}}{1+\frac{a-1}{a+1}}\right)=\ln\left(\frac{a+1-a+1}{a+1+a-1}\right)=\ln\frac{2}{2a}=\ln(1/a)=-\ln a$.

Donc $|\ln a-2S_n(x)|=|-\ln a+2S_n(x)|=|f(x)+2S_n(x)|\leq\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$

Donc $|\ln a-2S_n(x)|\leq\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$.

b) L'utilisation de la machine permet de dire que la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}<5\times10^{-4}$ est $n=3$.

c)

k	0	1	2	3
$\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	1	$\frac{1}{375}$	$\frac{1}{15625}$	$\frac{1}{546875}$

$a=\frac{3}{2}$. $x=\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{5}$

$2S_3(x)=2\left(1+\frac{1}{375}+\frac{1}{15625}+\frac{1}{546875}\right)=\frac{665\ 216}{1640625}$

$2S_3(x)\simeq 0{,}405\ 464\ 9905$ $\quad\ln\frac{3}{2}\simeq 0{,}405\ 465\ 1081$

$\ln\frac{3}{2}-2S_3(x)\simeq 1{,}2\times10^{-7}$. C'est mieux que prévu ! Normal avec son majorant de mammouth !

(**)

(Q1) g est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x\in]0,1]$, $g'(x)=-\ln x - x\times\frac{1}{x}=-\ln x-1$

$\forall x\in]0,1]$, $g'(x)=-\ln x+\ln\frac{1}{e}$.

$\forall x\in]0,\frac{1}{e}]$, $g'(x)\geqslant 0$ et $\forall x\in[\frac{1}{e},1]$, $g'(x)\leqslant 0$.

g est croissante sur $]0,\frac{1}{e}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{e},1]$.

Alors $\forall x\in]0,1]$, $0\leqslant -x\ln x=g(x)\leqslant g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}$.

Donc $\forall x\in]0,1]$, $0\leqslant g(x)\leqslant\frac{1}{e}$. $\forall x\in]0,1]$, $|g(x)|\leqslant\frac{1}{e}$.

(Q2) $\varphi: x\mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x)=e^x$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à φ à l'ordre n donne : $\forall u\in\mathbb{R}$, $\varphi(u)=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\int_0^u\frac{(u-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt$.

Donc $\forall u\in\mathbb{R}$, $e^u=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}\times 1+\int_0^u\frac{(u-t)^n}{n!}e^t\,dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+\int_0^u\frac{(u-t)^n}{n!}e^t\,dt$.

Posons $\forall u\in\mathbb{R}$, $R_n(u)=e^u-\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}$. $\forall u\in\mathbb{R}$, $e^u=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+R_n(u)$

1) R_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall u\in\mathbb{R}$, $R_n(u)=\int_0^u\frac{(u-t)^n}{n!}e^t\,dt$.

Soit $u\in\mathbb{R}^+$. $\forall t\in[0,u]$, $0\leqslant e^t\leqslant e^u$ et $\frac{(u-t)^n}{n!}\geqslant 0$. $\forall t\in[0,u]$, $0\leqslant\frac{(u-t)^n}{n!}e^t\leqslant\frac{(u-t)^n}{n!}e^u$.

En intégrant entre 0 et u il vient $0\leqslant R_n(u)\leqslant e^u\int_0^u\frac{(u-t)^n}{n!}\,dt$ car $0\leqslant u$.

Or $\int_0^u\frac{(u-t)^n}{n!}dt=\left[-\frac{(u-t)^{n+1}}{(n+1)n!}\right]_0^u=\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc $0\leqslant R_n(u)\leqslant\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}e^u$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall u\in\mathbb{R}$, $e^u=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+R_n(u)$, où R_n est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$\forall u\in\mathbb{R}^+$, $0\leqslant R_n(u)\leqslant\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}e^u$.

Q3) a) et b) **Version 1** Avec la fonction Gamma.

$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(k) = (k-1)!$

Alors $\int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt$ existe et vaut $((n+1)-1)!$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Donc J_n existe et vaut $n!$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Version 2.. On suit le texte. Soit $n \in \mathbb{N}$.

* $u \mapsto e^{-u} u^n$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\lim_{u \to +\infty} \left(u^2 (e^{-u} u^n)\right) = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u^{n+2}}{e^u}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $e^{-u} u^n = o_{u \to +\infty}\left(\frac{1}{u^2}\right)$

2) $\forall u \in [1, +\infty[$, $e^{-u} u^n \geqslant 0$ et $\frac{1}{u^2} \geqslant 0$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n \, du$ converge. J_n existe pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A e^{-u} u^{\ell+1} du \underset{\uparrow}{=} \left[(-e^{-u}) u^{\ell+1}\right]_0^A - \int_0^A (-e^{-u})(\ell+1) u^\ell du = -\frac{A^{\ell+1}}{e^A} + (\ell+1) \int_0^A e^{-u} u^\ell du.$$

$u \mapsto (-e^{-u})$ et $u \mapsto u^{\ell+1}$ sont C^1 sur $[0, +\infty[$

$\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{A^{\ell+1}}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée. En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient alors

$$J_{\ell+1} = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\ell+1} du = 0 + (\ell+1) \int_0^{+\infty} e^{-u} u^\ell du = (\ell+1) J_\ell.$$

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $J_{\ell+1} = (\ell+1) J_\ell$. $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\frac{J_{\ell+1}}{(\ell+1)!} = \frac{J_\ell}{\ell!}$. Alors $\left(\frac{J_\ell}{\ell!}\right)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. Ainsi $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\frac{J_\ell}{\ell!} = \frac{J_0}{0!} = J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-u} du = \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-u}\right]_0^A = 1.$

$\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{J_k}{k!}=1$. $\forall k\in\mathbb{N},\ J_k=k!$ ou $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ J_n=n!}$

c) $x\mapsto -(k+1)x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $v=-(k+1)\ln x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\int_{-(k+1)\ln\varepsilon}^{-(k+1)\ln 1}\left(e^{-\frac{v}{k+1}}\right)^k\left(-\frac{v}{k+1}\right)^k\left(-\frac{1}{k+1}e^{-\frac{v}{k+1}}\right)dv.$$

" $v=-(k+1)\ln x$,
$x=e^{-\frac{v}{k+1}}$ et
$dx=-\frac{1}{k+1}e^{-\frac{v}{k+1}}dv$ "

$$\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{-(k+1)\ln\varepsilon}\left(e^{-\frac{v}{k+1}}\right)^{k+1}v^k\,dv=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{-(k+1)\ln\varepsilon}e^{-v}v^k\,dv.$$

$$\underline{\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{-(k+1)\ln\varepsilon}e^{-v}v^k\,dv.}$$

d) Reprenons k dans $\mathbb{N}$ et remarquons que $\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-(k+1)\ln\varepsilon\right)=+\infty$.

Alors $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^k(\ln x)^k\,dx=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}J_k=\frac{(-1)^k\,k!}{(k+1)^{k+1}}$.

Ainsi $\underline{I_k=\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,dx \text{ converge et vaut } \frac{(-1)^k\,k!}{(k+1)^{k+1}}}$.

(Q4) <u>Remarques</u> 1. $g:\ ]0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto -x\ln x$. Nous avons vu que $\forall x\in]0,1],\ 0\le g(x)\le\frac{1}{e}$.

De plus g est continue sur $]0,1]$ et $\lim_{x\to0^+}g(x)=0$. Alors g est prolongeable par continuité en 0.

Notons $\hat g$ son prolongement par continuité en 0. $\forall x\in[0,1],\ \hat g(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

Alors $\underline{\forall x\in[0,1],\ 0\le\hat g(x)\le\frac{1}{e}}$.

$\forall x\in]0,1],\ x^{-x}=e^{-x\ln x}$ et $\lim_{x\to0^+}e^{-x\ln x}=e^{-0}=1$. Alors $x\mapsto x^{-x}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. Ainsi $\underline{\int_0^1 x^{-x}\,dx \text{ est convergente.}}$

$\underline{\underline{\ell}}$.. $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx \overset{!!!}{\underset{(*)}{=}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^\ell x^\ell (\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx.$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I_\ell \;!!$$

Sauf que $(*)$ est illicite. D'où l'idée de montrer $(*)$ en vérifiant que

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^\ell x^\ell (\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx$ ce qui revient à montrer

que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I_\ell = \int_0^1 x^{-x}\,dx.$

$\underline{a)}$ Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall u\in\mathbb{R}_+$, $\displaystyle e^u = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{u^\ell}{\ell!} + R_n(u)$ avec $\displaystyle 0\leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{n+1} e^u.$

$\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle e^{\hat g(x)} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\hat g(x))^\ell}{\ell!} + R_n(\hat g(x))$. Notons que $x\mapsto R_n(\hat g(x))$ est

continue sur $[0,1]$ car R_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\hat g$ est continue sur $[0,1]$.

Alors en intégrant on obtient :

$$\int_0^1 e^{\hat g(x)}\,dx = \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \frac{(\hat g(x))^\ell}{\ell!}\,dx + \int_0^1 R_n(\hat g(x))\,dx \quad (*).$$

$0\leq \hat g(x) \leq \frac{1}{e}$

$\underline{\text{Posons } r_n = \int_0^1 R_n(\hat g(x))\,dx.}$

$\forall x\in[0,1]$, $\hat g(x)\in\mathbb{R}^+$ donc $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle 0\leq R_n(\hat g(x)) \leq \frac{(\hat g(x))^{n+1}}{(n+1)!} e^{\hat g(x)} \leq \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}.$

$\varphi 2$

donc $\displaystyle 0\leq r_n = \int_0^1 R_n(\hat g(x))\,dx \leq \int_0^1 \frac{(1/e)^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}\,dx$ car $0\leq 1$.

Alors $\displaystyle 0\leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)!\, e^{n+1}}.$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{g(x)}\,dx = \int_0^1 e^{\hat g(x)}\,dx \overset{(*)}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^\ell}{\ell!}\,dx + r_n.$$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int_0^1 x^\ell (\ln x)^\ell\,dx + r_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} I_\ell + r_n.$$

Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n$, avec $\displaystyle 0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)!\, e^{n+1}}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left((n+1)!\, e^{n+1}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/e}}{(n+1)!\, e^{n+1}} = 0$.

Alors par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 x^{-x}dx - r_n\right) = \int_0^1 x^{-x}dx$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{(-1)^k}{k!} I_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \int_0^1 x^{-x}dx$. Ceci donne encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k} = \int_0^1 x^{-x}dx$

Alors 1) la série de terme général $\dfrac{1}{k^k}$ converge.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} = \int_0^1 x^{-x}dx$.

Voir sur le même thème Ecricome 1997 exercice 2.

PREMIERE PARTIE

Q1 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$; par croissance d'une probabilité : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\leq p(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)$.

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\leq v_{n+1}$. $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Q2 Soit $i\in\mathbb{N}^*$

$p(A_i)=p(\{X_i = x_0\}\cap\{X_{i+1}=x_1\}\cap\dots\cap\{X_{i+p-1}=x_{p-1}\})$; par indépendance il vient :

$p(A_i)=p(X_i=x_0)\,p(X_{i+1}=x_1)\cdots p(X_{i+p-1}=x_{p-1})$. Or les v.a. X_j suivent toutes la même loi

Ainsi : $p(X_i=x_0)=p(X_1=x_0)$, $p(X_{i+1}=x_1)=p(X_2=x_1)$, ..., $p(X_{i+p-1}=x_{p-1})=p(X_{1+p-1}=x_{p-1})$.

Donc $p(A_i)=p(X_1=x_0)\,p(X_2=x_1)\cdots p(X_{1+p-1}=x_{p-1})=p(A_1)$.

Donc $\forall i\in[\![1,+\infty[\![$, $p(A_i)=p(A_1)$.

Q3 a) ENTENDENT / ENTENDENT . Cette séquence est p.e.p. et $i=6$

b) ECRICOME / ECRICOME . Cette séquence est p.e.p. et $i=7$!

c) FINI . Cette séquence n'est pas p.e.p.

Q4 $A_q=\{X_q=x_0\}\cap\dots\cap\{X_{q+p-1}=x_{p-1}\}$

$A_{q+r}=\{X_{q+r}=x_0\}\cap\dots\cap\{X_{q+r+p-1}=x_{p-1}\}$

Supposons A_q et A_{q+r} non incompatibles. Rappelons que $1\leq r\leq p-1$.

On aurait alors la réalisation simultanée des événements $\{X_{q+r}=x_r\}$, $\{X_{q+r+1}=x_{r+1}\}$, ..., $\{X_{q+p-1}=x_{p-1}\}$ (événements participant à A_q) et de $\{X_{q+r}=x_0\}$, $\{X_{q+r+1}=x_1\}$, ..., $\{X_{q+p-1}=x_{p-1-r}\}$

Ainsi on aurait : $x_r=x_0$, $x_{r+1}=x_1$, ..., $x_{p-1}=x_{p-1-r}$ [événements participant à A_{q+r}.

Pour $i=r$, $i\in[\![1,p-1]\!]$ et $\forall j\in[\![1,p-1]\!]$, $(j\geq i \Rightarrow x_j=x_{j-i})$. $x_0x_1\dots x_{p-1}$ est pep, ce qui est impossible.

Ainsi A_q et A_{q+r} sont incompatibles.

Q5 Soit $k\in[\![1,+\infty[\![$.

$v_{k+1}=p(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i)=p(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\cup A_{k+1})=p(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)+p(A_{k+1})-p((\bigcup_{i=1}^{k} A_i)\cap A_{k+1})$

$v_{k+1} = v_k + a - p\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1}\right) = v_k + a - p\left(\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i\right)\cap A_{k+1}\right)\cup\left(\left(\bigcup_{i=k-p+2}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1}\right)\right)$

Or $\left(\bigcup_{i=k-p+2}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1} = \bigcup_{i=k-p+2}^{k} (A_i \cap A_{k+1}) = \bigcup_{i=k-p+2}^{k} \left(A_i \cap A_{i+(k+1-i)}\right)$

Remarquons alors que si $i \in [\![k-p+2, k]\!]$, $k+1-i \in [\![1, p-1]\!]$ et donc d'après la question précédente : $A_i \cap A_{i+(k+1-i)} = \emptyset$. Par conséquent : $\left(\bigcup_{i=k-p+2}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1} = \emptyset$

Ainsi $\underline{v_{k+1} = v_k + a - p\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i\right)\cap A_{k+1}\right) \quad \text{pour } k \geqslant p.}$

(Q6) Si $i \in \mathbb{N}^*$ les variables X_j intervenant dans A_i sont : $X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+p-1}$.

Les variables intervenant dans $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$ sont : $X_1, X_2, \dots, X_{k-p+1+p-1}$; c'est à dire $X_1, X_2, \dots, X_k$.

$\underline{\text{les variables } X_j \text{ intervenant dans } \bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i \text{ sont} : X_1, X_2, \dots, X_k.}$

Les variables X_j intervenant dans A_{k+1} sont : $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{k+p}$

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{k+p}$ étant indépendantes les événements $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$ et A_{k+1} le sont aussi.

Ceci permet d'écrire que : $p\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i\right)\cap A_{k+1}\right) = p\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i\right) p(A_{k+1}) = v_{k-p+1} \times a$

Ainsi $\underline{v_{k+1} = v_k + a - a\, v_{k-p+1}.}$

(Q7) Soit $k \in [\![1, p]\!]$. $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont deux à deux incompatibles d'après Q6

Par conséquent $v_k = p\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p(A_i) = ka.$

$\underline{\forall k \in [\![1, p]\!],\ v_k = ka.}$

(Q8). $(v_n)_{n\geqslant1}$ est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in [0,1]$ donc $\underline{(u_n)_{n\geqslant1} \text{ est décroissante}}$ $\underline{\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [0,1]}$ (en effet $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - v_n$).

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $u_k = 1 - v_k = 1 - ka$. $\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $u_{k+1} = 1 - v_{k+1} = 1 - v_k - a + a v_{k-p+1}$

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $u_{k+1} = u_k - a + a(1 - u_{k-p+1}) = u_k - a\, u_{k-p+1}$

$\underline{\forall k \in [\![1, p]\!],\ u_k = 1 - ka \text{ et } \forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ u_{k+1} = u_k - a\, u_{k-p+1}.}$

PARTIE II

Q1 La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 1 ; elle est donc convergente.

Notons ℓ sa limite. $\forall k \in [\![p,+\infty[\![$, $u_{k+1} = u_k - a\,u_{k-p+1}$; en faisant tendre k vers $+\infty$ il vient : $\ell = \ell - a\ell$. $a\ell = 0$. $\ell = 0$ car $a \neq 0$.

Ainsi $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } 0}}$ et $\underline{\underline{(v_n)_{n\geqslant} \text{ converge vers } 1.}}$

Notons $\hat{A}$ l'événement : le mot voulu apparait au moins une fois.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \hat{A}$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant p(A) \leqslant 1$. Par passage à la limite : $1 \leqslant p(A) \leqslant 1$. $p(A) = 1$.

Il est donc quasi-certain pour qu'un mot précis apparaisse au moins une fois dans le texte.

Q2 Montrons par récurrence que : $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $u_n \leqslant (1-a)^{n-p}(1-pa)$.

* $u_p = 1-pa \leqslant 1-pa = (1-a)^{p-p}(1-pa)$; la propriété est vraie pour $n=p$.
* Supposons l'inégalité vraie pour n élément de $[\![p,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$$u_{n+1} = u_n - a\,u_{n-p+1} \underset{\text{La suite est décroissante donc } u_{n-p+1} \geqslant u_n}{\leqslant} u_n - a u_n = (1-a)u_n \underset{\text{H.R. } \oplus\ 1-a \geqslant 0}{\leqslant} (1-a)(1-a)^{n-p}(1-pa) = (1-a)^{n+1-p}(1-pa)$$

ceci achève la récurrence

$\underline{\underline{\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ u_n \leqslant (1-a)^{n-p}(1-pa).}}$

$a = p(A_1)$ et $a \neq 0$. Donc $a \in]0,1]$; $1-a \in [0,1[$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} (1-a)^{n+1-p} = 0$

De plus $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leqslant u_n \leqslant (1-a)^{n-p}(1-pa)$.

Par encadrement on retrouve : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ... avec en prime une petite idée sur la vitesse de convergence.

Q3 a) $\forall k \in [\![1,2]\!]$, $u_k = 1 - k \times \frac{4}{25}$. $u_1 = \frac{21}{25}$, $u_2 = \frac{17}{25}$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $u_{k+1} = u_k - \frac{4}{25}\,u_{k-1}$.

Donc $u_1 = \frac{21}{25}$, $u_2 = \frac{17}{25}$ et $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $u_{k+1} = u_k - \frac{4}{25}\,u_{k-1}$

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$x\in\mathbb{R}$ et $x^2 - x + \frac{4}{25} = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes : $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$.

$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \lambda\left(\frac{1}{5}\right)^n + \mu\left(\frac{4}{5}\right)^n.$

$$\begin{cases} \frac{21}{25} = \frac{\lambda}{5} + \frac{4\mu}{5} \\ \frac{17}{25} = \frac{\lambda}{25} + \frac{16\mu}{25} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda + 4\mu = \frac{21}{5} \\ \lambda + 16\mu = 17 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda = \frac{21}{5} - 4\mu \\ 12\mu = 17 - \frac{21}{5} = \frac{64}{5} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \mu = \frac{64}{60} = \frac{16}{15} \\ \lambda = \frac{21}{5} - \frac{64}{15} = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{1}{15}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{16}{15}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$

b) $p(A_1) = p((X_1 = A)\cap(X_2 = S)) = p(X_1 = A)\,p(X_2 = S) = \frac{40}{75}\times\frac{3}{10} = \frac{4\times 3}{3\times 25} = \frac{4}{25}.$

$p(A_1) = \frac{4}{25}.$

Rappelons que v_n est la probabilité pour que AS apparaisse au moins une fois dans la suite des $n+2-1 = n+1$ premiers caractères imprimés.
La probabilité cherchée est donc $v_{50} = 1 - u_{50} = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{51} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{51}.$

Donc $v_{50} \simeq 0{,}999\ 984\ 776.$

Q4 a) $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![3,+\infty[\![$. $\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k - a u_{k-2} \\ u_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \end{bmatrix}$

Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\forall k\in[\![3,+\infty[\![,\ U_{k-1} = AU_{k-2}$. Une récurrence simple donne alors :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n = A^{n-1}U_1.$

b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$; cherchons une réduite de Gauss de cette matrice

$L_1 \leftrightarrow L_2$ donne $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$; $L_2 \leftarrow L_2 + (\lambda-1)L_1$ donne $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda(\lambda-1) & -a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda(\lambda-1) & -a \end{bmatrix}$ avec $L_2 \leftrightarrow L_3$

Enfin $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda(\lambda-1)L_2$ donne $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{bmatrix}$ avec $P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-1) + a = -\lambda^3 + \lambda^2 - a.$

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A-\lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow P(\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+\lambda^2-a=0 \Leftrightarrow \lambda^3-\lambda^2+a=0$

Ainsi $\underline{Sp(A)=\{\lambda\in\mathbb{R} \mid \lambda^3-\lambda^2+a=0\}}$. Posons alors $\hat{P}=-P$. $\forall x\in\mathbb{R}, \hat{P}(x)=x^3-x^2+a$

c) $\hat{P}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}, \hat{P}'(x)=3x^2-2x=3x(x-\frac{2}{3})$

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
$\hat{P}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\hat{P}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Rappelons que : $a>0$ et $a<\frac{2^2}{3^3}=\frac{4}{27}$

En appliquant le théorème de la bijection aux restrictions de $\hat{P}$ à $]-\infty,0]$, $]0,\frac{2}{3}]$ et $]\frac{2}{3},+\infty[$ on montre que $\hat{P}$ admet exactement trois réels