EXERCICE 1

1) Dans cette question nous supposerons f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a. Notons d'abord que F est continue sur $\mathbb{R}^{+}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$) et, pour tout élément t de $\mathbb{R}^{+*}$, $F'(t) = f(t) > 0$. Ceci suffit pour dire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+}$ (non ?).

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$ donc : $\forall t \in \mathbb{R}^{+},\ F(t) < 1$.

Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}^{+},\ 0 < 1 - F(t)$. Ceci donne encore : $\forall t \in \mathbb{R}^{+},\ p(X > t) = 1 - F(t) \neq 0$.

Soient t et h deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$.

$$p(t,h) = p(X < t+h / X > t) = \frac{p\big(\{X < t+h\} \cap \{X > t\}\big)}{p(X > t)} = \frac{p(t < X < t+h)}{p(X > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall h \in \mathbb{R}^{+*},\ p(t,h) = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}}.$$

b. Soit t un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$.

Alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h} = f(t)$. Comme $f(t)$ n'est pas nul(le), $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} f(t)$.

En particulier : $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h\to 0^+}{\sim} f(t)$.

Ainsi : $p(t,h) = \dfrac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h} \times \dfrac{1}{1 - F(t)} \times h \underset{h\to 0^+}{\sim} f(t) \times \dfrac{1}{1 - F(t)} \times h = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}\ h$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ strictement positif} : p(t,h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{f(t)}{1 - F(t)}\ h}.$$

2) Ici nous supposerons (encore) que X possède une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, nulle sur $]-\infty, 0]$.

Comme dans la question précédente nous avons encore : $\forall t \in \mathbb{R}^{+},\ 1 - F(t) > 0$.

a. Notons alors que λ_X est définie sur $[0, +\infty[$ et continue au moins sur $]0, +\infty[$.

Soit t et ε deux réels strictement positifs.

$$\int_\varepsilon^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^t \frac{f(u)}{1 - F(u)}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^t \frac{F'(u)}{1 - F(u)}\,\mathrm{d}u = \Big[-\ln|1 - F(u)|\Big]_\varepsilon^t = -\ln|1 - F(t)| + \ln|1 - F(\varepsilon)|.$$

$$\int_\varepsilon^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = -\ln(1 - F(t)) + \ln(1 - F(\varepsilon)).$$

F est continue en 0 donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \ln\big(1 - F(\varepsilon)\big) = \ln 1 = 0$.

Alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_\varepsilon^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = -\ln\big(1 - F(t)\big)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } t \text{ de } \mathbb{R}^{+*},\ \int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u \text{ existe et vaut } -\ln\big(1 - F(t)\big)}$$

Nous savons déjà que F_X est nulle sur $]-\infty,0]$ puisque f est nulle sur ce même ensemble.

Soit t un réel strictement positif. $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = -\ln\big(1-F(t)\big)$ donc $1-F(t)=e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u}$.

Ainsi $\forall t\in]-\infty,0],\ F(t)=0$ et $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ F(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u}$.

La seule connaissance de la fonction de taux de panne λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

b. • Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre α.

Posons : $\forall t\in]-\infty,0],\ f_Y(t)=0$ et $\forall t\in]0,+\infty[,\ f_Y(t)=\alpha e^{-\alpha t}$. f_Y est une densité de Y.

Notons que f_Y est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et nulle sur $]-\infty,0]$.

Soit F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ F_Y(t)=1-e^{-\alpha t}$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ \lambda_X(t)=\dfrac{f(t)}{1-F(t)}=\dfrac{\alpha e^{-\alpha t}}{1-(1-e^{-\alpha t})}=\alpha$.

Le taux de panne λ_Y de Y est donc constant sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Réciproquement, reprenons la variable aléatoire X du début et supposons que son taux de panne λ_X est constant sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il existe donc un réel c tel que : $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ \lambda_X(t)=c$.

Rappelons que F est nulle sur $]-\infty,0]$ et que $\forall t\in\mathbb{R}^{+*}, F(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u}$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}^{+*}, F(t)=1-e^{-\int_0^t c\,\mathrm{d}u}=1-e^{-ct}$.

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}F(t)=1$, nécessairement $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}e^{-ct}=0$ et donc c est strictement positif.

c est strictement positif, $\forall t\in]-\infty,0],\ F(t)=0$ et $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ F(t)=1-e^{-ct}$. Donc X suit une loi exponentielle de paramètre c. Concluons.

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et nulle sur $]-\infty,0]$: son taux de panne λ_X est constant sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si X suit une loi exponentielle.

3) $\forall t\in]-\infty,0],\ F(t)=0$ et $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ F(t)=1-e^{-\int_0^t u^3\,\mathrm{d}u}=1-e^{-t^4/4}$.

a. $p(X>1)=1-p(X\leqslant 1)=1-F(1)=e^{-1/4}$.

La probabilité pour que cet appareil survive plus d'un an est $e^{-1/4}$

.

b. $p(X>2/X>1)=\dfrac{p\big(\{X>2\}\cap\{X>1\}\big)}{p(X>1)}=\dfrac{p(X>2)}{p(X>1)}=\dfrac{1-p(X\leqslant 2)}{1-p(X\leqslant 1)}=\dfrac{e^{-2^4/4}}{e^{-1/4}}=e^{-15/4}$.

La probabilité pour que cet appareil agé de un an, survive plus de deux ans est $e^{-15/4}$

.

EXERCICE 2

1) a. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. $t \to \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[p, p+1]$.

Par conséquent : $\forall t \in [p, p+1],\ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$; comme $p \leqslant p+1$ il vient alors par intégration :

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi : $\dfrac{1}{p+1}\ (p+1-p) \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\ (p+1-p)$.

Finalement $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}}$.

b. Soit k un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\cdot$

En sommant on obtient : $\displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}\cdot$ Alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{p+1} - 1 \leqslant \int_1^k \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \frac{1}{k}\cdot$

Un léger changement d'indice dans la première somme et une petite intégration donnent :

$\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - 1 \leqslant \Big[\ln|t|\Big]_1^k = \ln k \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \frac{1}{k}\cdot$ Ainsi : $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \geqslant \frac{1}{k} \geqslant 0$.

Par conséquent $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1$. Remarquons que ceci vaut encore pour $k = 1$ $(0 \leqslant 1 - 0 \leqslant 1)$.

Finalement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1}$.

2) a. Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \frac{x^p}{p}\cdot$

Alors : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = \sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

$\boxed{\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t}$.

b. Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

$\forall t \in [0, x],\ t^n \geqslant 0$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$; $\forall t \in [0, x],\ 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{1-x}\cdot$

En intégrant il vient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$ car x est positif.

x étant élément de $[0,1[$, on a encore : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{n+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{n+1} = 0$ on obtient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

Ceci donne sans difficulté : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}\right) = -\ln(1-x)$.

$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{x^p}{p} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)}$.

<u>Remarque</u> *Ceci vaut encore si x est élément de $[-1,0[$ et cela se montre en utilisant une démarche analogue. Si x est un réel n'appartenant pas à $[-1,1[$, la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ diverge.*

3) a. x est élément de $[0,1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n^3\,x^n) = 0^+$ (croissance comparée).

On a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0^+$. Par produit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\,\ln n\,x^n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\,n^3\,x^n\right) = 0^+$.

Remarquons que ceci suffit très largement pour traiter b.

Cependant supposons maintenant x élément de $]0,1[$. Alors : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(n^2\,\ln n\,x^n\right) = -\infty}$! !

<u>Remarque</u> *La démonstration précédente donne surtout la preuve de l'inutilité de la question...*

b. Nous avons vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\,\ln n\,x^n\right) = 0$. En utilisant la définition de la limite d'une suite, nous pouvons dire qu'il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant n^2 \ln n\,x^n \leqslant 1$.

Donc : $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ 0 \leqslant \ln n\,x^n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que $\boxed{\text{la série de terme général } \ln n\,x^n \text{ converge}}$.

4) a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{k} - S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} - \ln k\,x^k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(x^k\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right)\right)$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $x^k \geqslant 0$ et $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k \leqslant 1$.

Donc, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^k\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right) \leqslant x^k$.

En sommant on obtient : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}x^k$. Ou $\boxed{0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{x^k}{p} - S_n(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}x^k}$.

b. Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k = x\,\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{x}{1-x}$.

Alors : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} = \frac{1}{1-x} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right)$.

Une petite commutation de sommes donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{x^k}{p} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} x^k \right) = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\, x^p\, \frac{1 - x^{n-(p-1)}}{1-x} \right).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} = \frac{1}{1-x} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \left(x^p - x^{n+1} \right) \right) = \frac{1}{1-x} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right).$$

Ainsi $\boxed{0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}}$.

c. Q1) b. nous donne : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n \leqslant 1$. Alors : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n$.

En multipliant par x^{n+1}, qui est positif, il vient : $0 \leqslant x^{n+1} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant x^{n+1} + x^{n+1} \ln n$.

Comme x est élément de $[0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x^{n+1} \ln n \right) = 0$ (croissance comparée).

On obtient alors par encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) = 0}$.

d. Reprenons l'encadrement de Q4) b. et faisons tendre n vers $+\infty$. Il vient :

$$0 \leqslant -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leqslant \frac{x}{1-x} \qquad (*)$$

car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} \right) = -\ln(1-x)$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$.

Supposons x dans $]0,1[$. Remarquons alors que $-\dfrac{1-x}{\ln(1-x)}$ est strictement positif et divisons $(*)$ par cette quantité. On vient :

$$0 \leqslant 1 - \left(-\frac{(1-x)S(x)}{\ln(1-x)} \right) \leqslant -\frac{x}{\ln(1-x)}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \left(-\frac{x}{\ln(1-x)} \right) = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \ln(1-x) = -\infty$.

Donc par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \left(-\frac{(1-x)S(x)}{\ln(1-x)} \right) = 1$.

Alors $-\dfrac{(1-x)S(x)}{\ln(1-x)} \underset{1^-}{\sim} 1$. Ceci donne encore : $\boxed{S(x) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}}$.

EXERCICE 3

1) Notons T_1 l'événement «la personne tire la carte numéro 1 ».

$(T_1, \overline{T_1})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\theta = P(V) = P(V/T_1)\ P(T_1) + P(V/\overline{T_1})\ P(\overline{T_1}).$$

Sachant que la personne a tiré la carte numéro 1, elle répond "vrai" si et seulement si elle est d'accord avec l'affirmation «A». La proportion de gens de cette population qui sont réellement d'accord avec l'affirmation «A» étant p : $P(V/T_1) = p$.

Sachant que la personne n'a pas tiré la carte numéro 1, elle répond "vrai" si et seulement si elle n'est pas d'accord avec l'affirmation «A» ; alors : $P(V/\overline{T_1}) = 1 - p$.

De plus : $P(T_1) = \dfrac{1}{20}$ et $P(\overline{T_1}) = \dfrac{19}{20}\cdot$ Finalement : $\theta = P(V) = \dfrac{1}{20}\ p + \dfrac{19}{20}\ (1-p)$.

Ainsi : $\boxed{\theta = \dfrac{19 - 18\,p}{20}}\cdot$ Ceci donne encore $18\,p = 19 - 20\,\theta$ et donc : $\boxed{p = \dfrac{19 - 20\,\theta}{18}}$.

2) a. $p = \dfrac{17}{18}\cdot$ Alors $\theta = \dfrac{19 - 18\,p}{20} = \dfrac{19 - 17}{20} = \dfrac{1}{10}\cdot$ $\boxed{\theta = \dfrac{1}{10}}$.

b. Notons D_A l'événement «une personne est d'accord avec l'affirmation «A»». On cherche : $P(D_A/V)$.

$P(D_A/V) = \dfrac{P(V/D_A)\ P(D_A)}{P(V)} = \dfrac{P(V/D_A)\ p}{\theta}\cdot$

Sachant que la personne est d'accord avec «A», elle répond vrai si et seulement si elle tire la carte numéro 1.

Alors : $P(V/D_A) = \dfrac{1}{20}$ et : $P(D_A/V) = \dfrac{(1/20)\ p}{\theta} = \dfrac{p}{20\ \theta} = \dfrac{17/18}{20\ (1/10)} = \dfrac{17}{36}\cdot$

$\boxed{\text{La probabilité pour qu'une personne ayant répondu "vrai" soit d'accord avec «A» est : } \dfrac{17}{36}}$.

3) a. Si l'échantillonnage est assimilable à un tirage avec remise, on peut alors affirmer que :

$\boxed{S_n \text{ suit une loi binômiale de paramètres } n \text{ et } \theta}$.

Alors $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(S_n = k) = \mathrm{C}_n^k\ \theta^k\ (1-\theta)^{n-k},\ E(S_n) = n\theta \text{ et } V(S_n) = n\theta(1-\theta)}$.

b. $E\Big(\dfrac{S_n}{n}\Big) = \dfrac{1}{n}\ E(S_n) = \dfrac{1}{n}\ n\theta = \theta$. Alors $\boxed{\dfrac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$.

$V\Big(\dfrac{S_n}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^2}\ V(S_n) = \dfrac{1}{n^2}\ n\theta(1-\theta) = \dfrac{1}{n}\ \theta(1-\theta)$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} V\Big(\dfrac{S_n}{n}\Big) = 0$.

Donc $\boxed{\dfrac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } \theta}$.

4) a. 23 personnes ont répondu "vrai" sur un échantillon de 100 personnes.

Alors $\boxed{\text{une estimation ponctuelle de } \theta \text{ est : } 0{,}23}$.

Comme $p = \dfrac{19 - 20\,\theta}{18}$ et $\dfrac{19 - 20(23/100)}{18} = \dfrac{19 \times 5 - 23}{90} = \dfrac{4}{5} = 0,8$:

$\boxed{\text{une estimation ponctuelle de } p \text{ est } 0,8}$.

b. D'après le cours, si $t_{0,95}$ est un réel vérifiant $2\Phi(t_{0,95}) - 1 = 0,95$ alors $\left[\dfrac{23}{100} - \dfrac{t_{0,95}}{2\sqrt{100}}, \dfrac{23}{100} + \dfrac{t_{0,95}}{2\sqrt{100}}\right]$ est un intervalle de confiance à 95% de θ.

$2\Phi(t_{0,95}) - 1 = 0,95 \iff \Phi(t_{0,95}) = \dfrac{0,95 + 1}{2} = 0,975 = \Phi(1,96)$. Nous poserons alors : $t_{0,95} = 1,96$.

Alors : $\dfrac{23}{100} - \dfrac{t_{0,95}}{2\sqrt{100}} = 0,23 - 0,098 = 0,132$ et $\dfrac{23}{100} + \dfrac{t_{0,95}}{2\sqrt{100}} = 0,23 + 0,098 = 0,328$.

Ainsi $\boxed{[0,132; 0,328] \text{ est un intervalle de confiance à 95\% de } \theta}$.

$p = \dfrac{19 - 20\,\theta}{18}$, donc $\theta \in [0,132; 0,328] \iff p \in \left[\dfrac{19 - 20 \times 0,328}{18}, \dfrac{19 - 20 \times 0,132}{18}\right]$.

$0,6911$ est une valeur approchée par défaut de $\dfrac{19 - 20 \times 0,328}{18}$.

$0,9089$ est une valeur approchée par exès de $\dfrac{19 - 20 \times 0,132}{18}$.

Ainsi $\boxed{[0,6911; 0,9089] \text{ est un intervalle de confiance à 95\% de } p}$.

PROBLÈME

Partie 1

1) a. J est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients réels donc $\boxed{J \text{ est diagonalisable}}$.

b. $J = (s_{i,j})$ avec $s_{i,j} = 1$ pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$. Alors $J^2 = (r_{i,j})$ avec, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$:

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k} \times s_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 1 \times 1 = n = n\ s_{i,j}.$$

Ainsi $\boxed{J^2 = n\ J}$.

$J^2 - nJ = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $P = X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J dont les racines sont 0 et n.

Les valeurs propres de J étant nécessairement racines de P on peut affirmer que les seules valeurs propres possibles de J sont 0 et n.

Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de J. Alors J est inversible. Comme $J^2 = nJ$, en multipliant à droite par J^{-1} on obtient $J = nI_n$ ce qui n'est pas très raisonnable car n est supérieur ou égal à 2.

Ainsi 0 est valeur propre de J.

Raisonnons de la même manière pour n. Supposons que n soit une valeur propre de J. $J - nI_n$ est alors inversible. Comme $J(J - nI_n) = J^2 - nJ = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, il vient en multipliant à droite par $(J - nI_n)^{-1}$: $J = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Tragique !

Finalement 0 et n sont des valeurs propes de J et ce sont les seules possibles.

Alors $\boxed{\text{LES (deux) valeurs propres de } J \text{ sont 0 et } n}$.

<u>Remarque</u> *Ce qui suit fournit une deuxième idée pour obtenir ce résultat.*

2) a. Toutes les colonnes de J sont identiques et non nulles, donc J est de rang 1. Ceci confirme que 0 est valeur propre de J et montre en plus que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-1$ (penser au théorème du rang appliqué à un endomorphisme de matrice J...). Le sous-espace propre de J associé à n est alors une droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ une base du sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 et (X_n) une base du sous-espace propre de J associé à la valeur propre n. Ces deux sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{B}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs de J respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, ..., 0, n.

<u>Remarques</u>

1. On peut même trouver une base <u>*orthonormale*</u> *de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs de* J *respectivement associés aux valeurs propres* 0, 0, ..., 0, n.

2. Il est aisé de montrer que le sous-espace propre SEP $(J, 0)$ *de* J*, associé à la valeur propre* 0 *est l'hyperplan de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *d'équation* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ *dans la base canonique.*

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *en est une base.*

De même il est facile de voir que SEP (J, n) *est la droite vectorielle de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *engendrée par* $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Si P *est la matrice de passage de la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *à* $\mathcal{B}'$ *:*

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Poursuivons en observant que : $M_a = aJ + (1-a)I_n$.

Alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $M_a X_i = aJX_i + (1-a)I_n X_i = (1-a)X_i$ $(JX_i = 0)$.

De plus $M_a X_n = aJX_n + (1-a)I_n X_n = anX_n + (1-a)X_n = (1-a+na)X_n$.

Alors $\mathcal{B}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de M_a respectivement associés aux valeurs propres $1-a$, $1-a$, ..., $1-a$, $1-a+na$.

Ceci montre que la matrice M_a est diagonalisable et qu'elle possède exactement deux valeurs propres : $1-a$ et $1-a+na$.

Finalement $\boxed{\text{les deux valeurs propres de } M_a \text{ sont } 1-a \text{ et } 1-a+na}$.

<u>*Remarque*</u>

Le sous-espace propre de M_a *associé à la valeur propre* $1-a$ *(resp.* $1-a+na$*) est le même que le sous espace propre de* J *associé à la valeur propre* 0 *(resp.* n*).*

Retenons, cela peut toujours servir, que SEP $(M_a, 1-a+na) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$.

b. M_a est inversible si et seulement si 0 n'est pas une de ses valeurs propres. M_a est donc inversible si et seulement si : $1-a \neq 0$ et $1+(n-1)a = 1-a+na \neq 0$.

$\boxed{M_a \text{ est inversible si et seulement si : } a \neq 1 \text{ et } a \neq -\dfrac{1}{n-1}}$.

Partie 2

1) a. Notons que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \Rightarrow (\, u_i \,/\, u_j \,) = \alpha$, et que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ (\, u_i \,/\, u_i \,) = \|u_i\|^2 = 1$. Alors : $M_\alpha = ((\, u_i \,/\, u_j \,))$.

Posons : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et montrons que $Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} (\, u_i \,/\, u_k \,)\lambda_k = (\, u_i \,/ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \,) = (\, u_i \,/\, 0_{\mathbb{R}^3} \,) = 0_{\mathbb{R}}$.

Ainsi : $\boxed{M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}$.

b. Ici $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\dfrac{1}{n-1}$. La matrice M_α est alors inversible.

Dans ces conditions $M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0$.

Ainsi, si λ_1, λ_2, ..., λ_n sont n réels tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\ u_k = 0_{\mathbb{R}^3} : \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ceci montre alors que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Nécessairement n est inférieur ou égal à trois.

$\boxed{\text{Si } \alpha \neq 1 \text{ et } \alpha \neq -\dfrac{1}{n-1}, \text{ la valeur maximale de } n \text{ est } 3}$.

Q2) a. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_i et u_j donne $\boxed{|(\, u_i \,/\, u_j \,)| \leqslant \|u_i\|\ \|u_j\|}$.

$\boxed{\text{Cette inégalité est une égalité si et seulement si la famille } (u_i, u_j) \text{ est liée}}$.

b. Supposons que n soit strictement supérieur à 1. Alors on peut trouver deux éléments <u>distincts</u> i et j de $[\![1,n]\!]$!

$\alpha = 1$ donc $|(\, u_i \,/\, u_j \,)| = |\alpha| = 1 = 1 \times 1 = \|u_i\|\ \|u_j\|$. Alors d'après le rappel précédent la famille (u_i, u_j) est liée. Comme u_i n'est pas nul, il existe un réel λ tel que $u_j = \lambda\ u_i$.

Alors $1 = \alpha = (\, u_i \,/\, u_j \,) = (\, u_i \,/\, \lambda\, u_i \,) = \lambda(\, u_i \,/\, u_i \,) = \lambda\, \|u_i\|^2 = \lambda \times 1 = \lambda$. Donc $\lambda = 1$; ceci donne $u_i = u_j$ et une légère contradiction car i n'est pas égal à j et les éléments de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont deux à deux distincts.

$\boxed{\text{Si } \alpha \text{ est égal à 1, } n \text{ vaut 1}}$.

Q3) a. Comme la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est solution et contient quatre vecteurs on peut affirmer, d'après Q1), que ou $\alpha = 1$ ou $\alpha = -\dfrac{1}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$.

Mais si $\alpha = 1$, d'après Q2) la famille ne contient qu'un seul vecteur !

Ainsi $\boxed{\text{s'il existe une solution } (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ nécessairement } \alpha = -\dfrac{1}{3}}$.

b. Evitons de refaire ce qui a déjà été fait... Notons que (u_1, u_2, u_3) est une solution du problème avec $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ et $n = 3$. La matrice <u>d'ordre 3</u> $M_{-\frac{1}{3}}$ est alors inversible car $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\dfrac{1}{3-1}\cdot$ Dans ces conditions, et d'après ce que nous avons vu dans Q1) b., la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

(u_1, u_2, u_3) est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

<u>Remarque</u>

Bien sûr on peut encore obtenir la liberté de la famille (u_1, u_2, u_3) *en prenant trois réels* x, y ,z *tels que* $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ *et en montrant que* $x = y = z = 0$. *Il suffit pour cela d'écrire que :* $(\, xu_1 + yu_2 + zu_3 \,/\, u_1 \,) = (\, xu_1 + yu_2 + zu_3 \,/\, u_2 \,) = (\, xu_1 + yu_2 + zu_3 \,/\, u_3 \,) = 0$.

Ceci conduit au système : $\begin{cases} x - \dfrac{1}{3}\, y - \dfrac{1}{3}\, z & = 0 \\ -\dfrac{1}{3}\, x + y - \dfrac{1}{3}\, z & = 0 \\ -\dfrac{1}{3}\, x - \dfrac{1}{3}\, y + z & = 0 \end{cases}$ *; on obtient alors sans difficulté la nullité de* x, y, z.

c. Evitons encore de refaire ce qui a déjà été fait... Soient (x, y, z) les coordonnées de u_4 dans la base (u_1, u_2, u_3). $u_4 = xu_1 + yu_2 + zu_3$ donc $xu_1 + yu_2 + zu_3 + (-1)u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Alors, d'après Q1) a, $M_{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, $M_{-\frac{1}{3}}$ étant bien évidemment ici une matrice d'ordre 4.

Rappelons que les deux valeurs propres de $M_{-\frac{1}{3}}$ sont : $1 - \Big(-\dfrac{1}{3}\Big)$ et $1 - \Big(-\dfrac{1}{3}\Big) + 4\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)$; c'est à dire $\dfrac{4}{3}$ et 0.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix}$ est donc un élément du sous-espace propre de $M_{-\frac{1}{3}}$ associé à la valeur propre 0.

Or nous avons vu dans la remarque de la question 2 b. de la partie 1, que le sous-espace propre de $M_{-\frac{1}{3}}$ associé à la valeur propre $1-\left(-\frac{1}{3}\right)+4\left(-\frac{1}{3}\right)$ est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Ainsi il existe un réel λ tel que :

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Il vient alors sans problème (et sans calcul !) : $\lambda=-1$ et $x=y=z=-1$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } u_4 \text{ dans la base } (u_1,u_2,u_3) \text{ sont } (-1,-1,-1)}$.

<u>Remarque</u>

Ici encore, on peut obtenir les coordonnées (x,y,z) de u_4 dans la base (u_1,u_2,u_3) en écrivant :

$(\, xu_1+yu_2+zu_3 \,/\, u_1\,)=(\, xu_1+yu_2+zu_3 \,/\, u_2\,)=(\, xu_1+yu_2+zu_3 \,/\, u_3\,)=-\dfrac{1}{3}.$

Ceci conduit au système : $\begin{cases} x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z &= -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}x+y-\frac{1}{3}z &= -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+z &= -\frac{1}{3}\end{cases}$ *; on obtient alors sans difficulté $x=y=z=-1$.*

Partie 3

Q1) Toute base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ est solution du problème posé, pour $n=3$ et $\alpha=0$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3) \text{ est solution du problème posé, pour } n=3 \text{ et } \alpha=0}$.

Q2) a. Remarquons d'abord que v_1, v_2 et v_3 sont deux à deux distincts.

De plus : $\|v_1\|=\|e_1\|=1$, $\|v_2\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ et $\|v_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$.

On a aussi : $(\, v_1 \,/\, v_2\,)=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}=\alpha$, $(\, v_1 \,/\, v_3\,)=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}=\alpha$

et $(\, v_2 \,/\, v_3\,)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}=\alpha$.

$\boxed{(v_1,v_2,v_3) \text{ est solution du problème posé avec } \alpha=-\frac{1}{2}}$.

b. Posons $w_1=e_3$, $w_2=\lambda v_1+\mu e_3$, $w_3=\lambda v_2+\mu e_3$ et $w_4=\lambda v_3+\mu e_3$.

On a encore $w_1=e_3$, $w_2=\lambda e_1+\mu e_3$, $w_3=-\frac{\lambda}{2}e_1+\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}e_2+\mu e_3$ et $w_4=-\frac{\lambda}{2}e_1-\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}e_2+\mu e_3$.

• Supposons (w_1,w_2,w_3,w_4) solution. Posons $\alpha=(\, w_1 \,/\, w_2\,)$. D'après la question 3 de la partie 2, $\alpha=-\frac{1}{3}\cdot$

Ainsi $\alpha=-\frac{1}{3}=(\, w_1 \,/\, w_2\,)=(\, e_3 \,/\, \lambda e_1+\mu e_3\,)=\mu$; $\mu=-\frac{1}{3}\cdot$

On a aussi : $1=\|w_2\|^2=\|\lambda e_1+\mu e_3\|^2=\lambda^2+\mu^2=\lambda^2+\frac{1}{9}\cdot$

Donc $\mu = -\dfrac{1}{3}$ et $\lambda^2 = \dfrac{8}{9} = \Big(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Big)^2$.

• Réciproquement posons : $\mu = -\dfrac{1}{3}$ et $\lambda = \dfrac{2\sqrt{2}\varepsilon}{3}$ avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Montrons que (w_1, w_2, w_3, w_4) est solution.

Rappelons alors que : $w_1 = e_3$, $w_2 = \lambda e_1 + \mu e_3$, $w_3 = -\dfrac{\lambda}{2}e_1 + \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}e_2 + \mu e_3$, $w_4 = -\dfrac{\lambda}{2}e_1 - \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}e_2 + \mu e_3$, $\lambda^2 = \dfrac{8}{9}$ et $\mu^2 = \dfrac{1}{9}$.

Il n'est pas très difficile de voir que ces quatre vecteurs sont deux à deux distincts.

$\|w_1\|^2 = 1$ et $\|w_2\|^2 = \lambda^2 + \mu^2 = \dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9} = 1$.

$\|w_3\|^2 = \Big(-\dfrac{\lambda}{2}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}\Big)^2 + \mu^2 = \dfrac{\lambda^2}{4} + \dfrac{3\lambda^2}{4} + \mu^2 = \lambda^2 + \mu^2 = 1$.

$\|w_4\|^2 = \Big(-\dfrac{\lambda}{2}\Big)^2 + \Big(-\dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}\Big)^2 + \mu^2 = \dfrac{\lambda^2}{4} + \dfrac{3\lambda^2}{4} + \mu^2 = \lambda^2 + \mu^2 = 1$.

$(\,w_1 \,/\, w_2\,) = \mu = -\dfrac{1}{3}$, $(\,w_1 \,/\, w_3\,) = \mu = -\dfrac{1}{3}$ et $(\,w_1 \,/\, w_4\,) = \mu = -\dfrac{1}{3}\cdot$

$(\,w_2 \,/\, w_3\,) = -\dfrac{\lambda^2}{2} + \mu^2 = -\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = -\dfrac{1}{3}$ et $(\,w_2 \,/\, w_4\,) = -\dfrac{\lambda^2}{2} + \mu^2 = -\dfrac{1}{3}\cdot$

$(\,w_3 \,/\, w_4\,) = \dfrac{\lambda^2}{4} - \dfrac{3\lambda^2}{4} + \mu^2 = -\dfrac{\lambda^2}{2} + \mu^2 = -\dfrac{1}{3}\cdot$

Donc $\boxed{(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3) \text{ est solution si et seulement si } \mu = -\dfrac{1}{3} \text{ et } \lambda = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \text{ ou } -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$