EXERCICE 1

1) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

• Par définition E est contenu dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 0$. f_0 est de toute évidence un élément de E donc E n'est pas vide.

• Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de E et soit λ un réel. $\lambda\,\varphi_1 + \varphi_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda\,\varphi_1 + \varphi_2)''(x) = \lambda\,\varphi_1''(x) + \varphi_2''(x) = \lambda\,(1+x^2)\,\varphi_1(x) + (1+x^2)\,\varphi_2(x) = (1+x^2)(\lambda\,\varphi_1 + \varphi_2)(x)$.

Ainsi $\lambda\,\varphi_1 + \varphi_2$ est un élément de E.

Ceci achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors :

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}.}$$

2) Soient u et v deux éléments de E. u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $u'v - uv'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour montrer que $u'v - uv'$ est constante sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle...).

$(u'v - v'u)' = u''v + u'v' - v''u - v'u' = u''v - v''u$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (u'v - v'u)'(x) = u''(x)\,v(x) - v''(x)\,u(x) = (1+x^2)\,u(x)\,v(x) - (1+x^2)\,v(x)\,u(x) = 0$.

$(u'v - v'u)'$ est nulle sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{u'v - v'u \text{ est une fonction constante.}}$$

3) a. $x \to \dfrac{x^2}{2}$ et $x \to e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x\,e^{\frac{x^2}{2}}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)\,e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)f(x)$.

$$\boxed{f \text{ est un élément de } E.}$$

b. Observons que $\dfrac{1}{f}$ est (au moins) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et y est de classe $\mathcal{C}^2$.

Ainsi $\dfrac{1}{f^2}$ est (au moins) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Posons alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\big(f(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t$.

ℓ est la primitive de $\dfrac{1}{f^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0. Donc ℓ' est de classe $\mathcal{C}^2$ (au moins) sur $\mathbb{R}$. Ceci suffit très largement pour dire que ℓ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $g = f\,\ell$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$g'' = f''\ell + 2\,f'\ell' + f\ell'' = f''\ell + 2\,f'\,\dfrac{1}{f^2} + f\left(\dfrac{1}{f^2}\right)' = f''\ell + 2\,\dfrac{f'}{f^2} + f\left(-\dfrac{2f'}{f^3}\right) = f''\ell.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = f''(x)\,\ell(x) = (1+x^2)\,f(x)\,\ell(x)$ car f est un élément de E.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = (1+x^2)\,f(x)\,\ell(x) = (1+x^2)\,g(x)$.

$$\boxed{g \text{ est un élément de } E.}$$

4) a. Soit h un élément de E. Comme f appartient également à E, $h'f - f'h$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc un réel μ tel que : $h'f - f'h = \mu$. Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{h'f - f'h}{f^2} = \dfrac{\mu}{f^2} = \mu\,\ell'$.

Ainsi $\left(\dfrac{h}{f}\right)' = (\mu\,\ell)'$ et on peut donc dire que $\dfrac{h}{f}$ et $\mu\,\ell$ diffèrent d'une constante.

Alors il existe un réel λ tel que : $\dfrac{h}{f} = \mu\,\ell + \lambda$. Ce qui donne encore $h = \lambda f + \mu\,f\,\ell$ ou $h = \lambda f + \mu\,g$.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un élément de } E,\ h \text{ est combinaison linéaire de } f \text{ et } g.}$$

b. D'après ce qui précède, f et g sont deux éléments de E et tout élément de E est combinaison linéaire de f et de g donc (f,g) est une famille génératrice de E. Montrons que cette famille est libre.

Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $\lambda f + \mu g = 0_E$.

En particulier $\lambda f(0) + \mu g(0) = 0$. Comme $f(0) = 1$ et $g(0) = 0 : \lambda = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \mu\,e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\big(f(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \mu \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\big(f(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

En dérivant on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mu\,\dfrac{1}{\big(f(x)\big)^2} = 0$ donc nécessairement $\mu = 0$.

$\lambda f + \mu g = 0_E$ fournit donc $\lambda = \mu = 0$. La famille (f,g) est libre. Finalement

$$\boxed{(f,g) \text{ est une base de } E.}$$

EXERCICE 2

---

1) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$w_n - w_{n+1} = v_n - \ln n - v_{n+1} + \ln(n+1) = -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + v_n - v_{n+1} = -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1}\cdot$

La fonction ln est concave donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes ; en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = (\ln' 1)(x-1) + \ln 1$ ou $y = x - 1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*},\ \ln x \leqslant x - 1$.

Ceci permet d'écrire : $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{n}{n+1} - 1 = -\dfrac{1}{n+1}$.

Ce qui donne : $0 \leqslant -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} = w_n - w_{n+1}$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0.}$$

b. Le cours donne $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Il fournit également $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \mathrm{o}(x)$ donc $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

Alors $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = x - \dfrac{x^2}{2} - x + x^2 + \mathrm{o}(x^2) = \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

$$\boxed{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).}$$

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1} = -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} = w_n - w_{n+1}$. Alors

$$\boxed{w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

2) a. Ce qui précède montre que : $w_n - w_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } w_n - w_{n+1} \text{ est convergente.}}$$

b. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ w_n = (w_n - w_1) + w_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + w_1 = -\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$.

La suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1})$ converge car la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ converge.

Par conséquent la suite de terme général $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$ converge. Alors :

$$\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \geqslant n^2$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

4) a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}\cdot$

Soient a, b et c trois réels.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1} = \dfrac{a(n+1)(2n+1) + b\,n(2n+1) + c\,n(n+1)}{n(n+1)(2n+1)}\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1} = \dfrac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}\cdot$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$ si et seulement si $2a+2b+c=0$, $3a+b+c=0$ et $a=6$.

De plus : $\begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ 2b+c=-12 \\ b+c=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-12-(-18)=6 \\ c=-18-b=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases}.$

Alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}\cdot}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$v_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + 1 = \frac{1}{2}\,v_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + 1.$

Alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}\,v_n - 1.}$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right) = 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 24\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\cdot$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 6v_n + 6\left(v_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(v_{2n+1} - \frac{1}{2}\,v_n - 1\right) = 12v_n - \frac{6n}{n+1} - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24.$

Alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}\cdot}$$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - v_{2n+1} = w_n + \ln n - w_{2n+1} - \ln(2n+1) = w_n - w_{2n+1} - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right).$

Alors $\lim_{n\to+\infty}(v_n - v_{2n+1}) = \gamma - \gamma - \ln 2 = -\ln 2$. En remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{6n}{n+1} = 6$ on obtient :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 24(-\ln 2) + 24 - 6 = 18 - 24\ln 2$. Ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 18 - 24\ln 2.}$$

EXERCICE 3

---

1) $\varphi(e_1) = \varphi(1,0,0) = (0,-c,b) = -ce_2 + be_3$. $\varphi(e_2) = \varphi(0,1,0) = (c,0,-a) = ce_1 - ae_3$. $\varphi(e_3) = \varphi(0,0,1) = (-b,a,0) = -be_1 + ae_2$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.}$$

.

2) a. $\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb - bc \\ -ca + ac \\ ba - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi $\varphi(\omega) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\omega \text{ appartient à } \operatorname{Ker}\varphi.}$$

b. Soient α et β deux réels tels que $\alpha\,\varphi(e_1) + \beta\,\varphi(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\alpha\,(-ce_2 + be_3) + \beta\,(ce_1 - ae_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $\beta c\, e_1 - \alpha c\, e_2 + (\alpha b - \beta a)\, e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre ceci donne : $\beta c = \alpha c = \alpha b - \beta a = 0$.

Comme c n'est pas nul on obtient $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha\,\varphi(e_1) + \beta\,\varphi(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \big(\varphi(e_1), \varphi(e_2)\big) \text{ est libre.}}$$

c. $\big(\varphi(e_1), \varphi(e_2)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Im}\varphi$ donc la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$ est supérieure ou égale à 2.

Le théorème du rang donne $\dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim\mathbb{R}^3 - \operatorname{rg}\varphi = 3 - \operatorname{rg}\varphi$.

Ainsi $\dim\operatorname{Ker}\varphi \leqslant 3 - 2 = 1$. De plus ω est un élément non nul de $\operatorname{Ker}\varphi$ donc $\dim\operatorname{Ker}\varphi \geqslant 1$.

Finalement $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 1$. $\operatorname{Ker}\varphi$ est donc une droite vectorielle. Mieux c'est la droite vectorielle engendrée par ω.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(\omega).}$$

3) a. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$ de matrice $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}$.

$(\,\varphi(u)\,/\,\omega\,) = {}^t(MU)W = (yc - zb, za - xc, xb - ya)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (yc - zb)a + (za - xc)b + (xb - ya)c.$

$(\,\varphi(u)\,/\,\omega\,) = yca - zba + zab - xcb + xbc - yac = 0.$

On peut également obtenir le résultat en remarquant que ${}^tM = -M$ (M est antisymétrique).

En effet : $(\,\varphi(u)\,/\,\omega\,) = {}^t(MU)W = {}^tU\,{}^tMW = -{}^tUMW = -(\,u\,/\,\varphi(\omega)\,) = -(\,u\,/\,0_{\mathbb{R}^3}\,) = 0.$

$$\boxed{\text{Pour tout vecteur } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ (\,\varphi(u)\,/\,\omega\,) = 0.}$$

b. Ce qui précède montre que tout élément de $\operatorname{Im}\varphi$ est orthogonal à ω.

Comme ω engendre $\operatorname{Ker}\varphi$: $\operatorname{Im}\varphi \subset (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. De plus $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. Alors

$$\boxed{\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp.}$$

4) a. Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont supplémentaires. Ceci est un résultat de cours dans la mesure où $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$.

$$\boxed{\text{Pour tout vecteur } u \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ il existe un unique couple } (u_1, u_2) \text{ élément de } \operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Im}\varphi \text{ tel que } u = u_1 + u_2.}$$

b. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$ et (u_1, u_2) l'unique élément de $\operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Im}\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

u_2 appartient à $\operatorname{Im}\varphi$ donc u_2 est orthogonal à $\operatorname{Ker}\varphi$ donc à ω.

Ainsi $(\,u\,/\,\omega\,) = (\,u_1 + u_2\,/\,\omega\,) = (\,u_1\,/\,\omega\,) + (\,u_2\,/\,\omega\,) = (\,u_1\,/\,\omega\,) + 0 = (\,u_1\,/\,\omega\,).$

$$\boxed{(\,u\,/\,\omega\,) = (\,u_1\,/\,\omega\,).}$$

c. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$ et (u_1, u_2) l'unique élément de $\operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Im}\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

u_1 appartient à $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(\omega)$. Alors il existe un réel λ tel que $u_1 = \lambda\,\omega$.

$(\,u\,/\,\omega\,) = (\,u_1\,/\,\omega\,) = (\,\lambda\,\omega\,/\,\omega\,) = \lambda\,(\,\omega\,/\,\omega\,) = \lambda\,\|\omega\|^2.$

Ainsi $\lambda = \dfrac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}$ et : $u_1 = \dfrac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}\,\omega$. Alors $u_2 = u - u_1 = u - \dfrac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}\,\omega.$

$$\boxed{u_1 = \frac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}\,\omega \text{ et } u_2 = u - \frac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}\,\omega.}$$

5) a. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix}.$

$$M^3 = MM^2 = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2-a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -c(c^2+a^2+b^2) & b(c^2+b^2+a^2) \\ c(c^2+b^2+a^2) & 0 & -a(c^2+b^2+a^2) \\ -b(c^2+b^2+a^2) & a(b^2+c^2+a^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{M^3 = -\|\omega\|^2\ M.}$$

b. Il résulte de la question précédente que : $\varphi^3 = -\|\omega\|^2\ \varphi$.

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \big(\varphi\circ\varphi\big)\big(\varphi(u)\big) = \varphi^3(u) = -\|\omega\|^2\ \varphi(u)$.

Ce qui donne encore :

$$\boxed{\forall v \in \operatorname{Im}\varphi,\ \big(\varphi\circ\varphi\big)(v) = -\|\omega\|^2\ v.}$$

c. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$ et (u_1, u_2) l'unique élément de $\operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Im}\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

u_1 est dans $\operatorname{Ker}\varphi$ donc $\varphi^2(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$. u_2 est dans $\operatorname{Im}\varphi$ donc $\varphi^2(u_2) = -\|\omega\|^2\ u_2$.

Alors $\varphi^2(u) = \varphi^2(u_1+u_2) = \varphi^2(u_1) + \varphi^2(u_2) = -\|\omega\|^2\ u_2$.

Or $u_2 = u - \dfrac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}\ \omega$. Donc $\varphi^2(u) = -\|\omega\|^2 \left(u - \dfrac{(\,u\,/\,\omega\,)}{\|\omega\|^2}\ \omega\right) = -\|\omega\|^2\ u + (\,u\,/\,\omega\,)\ \omega$.

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \big(\varphi\circ\varphi\big)(u) = -\|\omega\|^2\ u + (\,u\,/\,\omega\,)\ \omega.}$$

PROBLÈME

---

1) a. X est la variable aléatoire égale au nombre de résultats non obtenus à l'issue des n épreuves.

Pour tout élément i de $[\![1, r]\!]$, X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon. Ainsi la somme $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ est égale au nombre de variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ ayant pris la valeur 1 à l'issue des n épreuves ; c'est à dire au nombre de résultats non obtenus à l'issue des n épreuves. Finalement :

$$\boxed{X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r.}$$

b. Soit i un élément de $[\![1, r]\!]$. Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$ notons B_i^k l'événement le résultat R_i n'est pas obtenu à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

Les événements B_i^1, B_i^2, ..., B_i^n sont indépendants.

Alors $P(X_i = 1) = P(B_i^1 \cap B_i^2 \cap \cdots \cap B_i^n) = P(B_i^1)\,P(B_i^2)\cdots P(B_i^n) = (1-x_i)(1-x_i)\cdots(1-x_i) = (1-x_i)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } i \text{ de } [\![1,r]\!],\ P(X_i=1)=(1-x_i)^n \text{ et } P(X_i=0)=1-(1-x_i)^n.}$$

c. $X=\displaystyle\sum_{i=1}^{r} X_i$. La linéarité de l'espérance donne alors : $E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r} E(X_i)$.

Or, pour tout élément i de $[\![1,r]\!]$, $E(X_i)=P(X_i=1)=(1-x_i)^n$. Ainsi

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{r}(1-x_i)^n.}$$

2) a. Pour tout élément i de $[\![1,r]\!]$, notons S_i l'événement la première épreuve donne le résultat R_i. $(S_1,S_2,\dots,S_r)$ est un système complet d'événements donc :

$x_1+x_2+\cdots+x_r=P(S_1)+P(S_2)+\cdots+P(S_r)=P(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_r)=1$. Alors :

$$\boxed{x_1+x_2+\cdots+x_r=1.}$$

$E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}(1-x_i)^n=\sum_{i=1}^{r-1}(1-x_i)^n+(1-x_r)^n$. Or $1-x_r=x_1+x_2+\cdots+x_{r-1}$ donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(1-x_i)^n+\left(\sum_{i=1}^{r-1}x_i\right)^n=f(x_1,x_2,\dots,x_{r-1}) \text{ où } f \text{ est la fonction définie par :}\\ \forall(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})\in(]0,1[)^{r-1},\ f(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})=\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(1-t_i)^n+\left(\sum_{i=1}^{r-1}t_i\right)^n. \end{array}}$$

b. f est une fonction polynômiale donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0,1[)^{r-1}.}$$

3) a. $\forall(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})\in(]0,1[)^{r-1},\ f(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})=\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(1-t_i)^n+\left(\sum_{i=1}^{r-1}t_i\right)^n$ donc

$$\boxed{\forall k\in[\![1,r-1]\!],\ \forall(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})\in(]0,1[)^{r-1},\ \frac{\partial f}{\partial t_k}(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})=-n(1-t_k)^{n-1}+n\left(\sum_{i=1}^{r-1}t_i\right)^{n-1}.}$$

b. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de $(]0,1[)^{r-1}$ où les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément.

Soit $T=(t_1,t_2,\dots,t_{r-1})$ un élément de $(]0,1[)^{r-1}$.

$T\in\mathcal{S}\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,r-1]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial t_k}(T)=0\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,r-1]\!],\ -n(1-t_k)^{n-1}+n\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}t_i\right)^{n-1}=0.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ (1-t_k)^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i\right)^{n-1}.$

L'application $x \to x^{n-1}$ étant injective sur $[0, +\infty[$ il vient alors :

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ 1-t_k = \sum_{i=1}^{r-1} t_i.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1-t_1 = \sum_{i=1}^{r-1} t_i$ et $1-t_1 = 1-t_2 = \cdots = 1-t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1-t_1 = \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i\right)$ et $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1-t_1 = (r-1)\, t_1$ et $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{1}{r}$ et $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1}.$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1} = \dfrac{1}{r}\cdot$

Observons que $\left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \ldots, \dfrac{1}{r}\right)$ est bien élément de $(]0,1[)^{r-1}$. Ainsi :

$R = \left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \ldots, \dfrac{1}{r}\right)$ est le seul point de $(]0,1[)^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément.

4) Soit $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{r-1})$ un élément de $(]0,1[)^{r-1}$. Soient i et j deux éléments de $[\![1, r-1]\!]$.

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}(T) = -n(1-t_j)^{n-1} + n\left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k\right)^{n-1}.$$

• Supposons que i n'est pas égal à j : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(T) = n(n-1)\left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k\right)^{n-2}.$

En particulier $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R) = n(n-1)\left(\sum_{k=1}^{r-1} \dfrac{1}{r}\right)^{n-2} = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2}.$

• Supposons que i est égal à j : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(T) = n(n-1)(1-t_i)^{n-2} + n(n-1)\left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k\right)^{n-2}.$

En particulier $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R) = n(n-1)\left(1-\dfrac{1}{r}\right)^{n-2} + n(n-1)\left(\sum_{k=1}^{r-1} \dfrac{1}{r}\right)^{n-2} = 2n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2}.$

$$M = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R)\right)_{(i,j)\in[\![1,r-1]\!]^2} \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1, r-1]\!]^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R) = \begin{cases} n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \text{si } i \neq j \\ 2n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Ou encore :

$$\boxed{M = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

5) a. J est une matrice symétrique et réelle donc

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable.}}$$

b. $J = (s_{i,j})$ avec $s_{i,j} = 1$ pour tout (i,j) appartenant à $[\![1, r-1]\!]^2$. Alors $J^2 = (r_{i,j})$ avec, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1, r-1]\!]^2$:

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{r-1} s_{i,k} \times s_{k,j} = \sum_{k=1}^{r-1} 1 \times 1 = r - 1 = (r-1)\ s_{i,j}.$$

$$\boxed{J^2 = (r-1)\ J.}$$

$J^2 - (r-1)J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$ donc $P = X^2 - (r-1)X$ est un polynôme annulateur de J dont les racines sont 0 et $r-1$.

Les valeurs propres de J étant nécessairement racines de P on peut affirmer que les seules valeurs propres <u>possibles</u> de J sont 0 et $r-1$.

Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de J. Alors J est inversible. Comme $J^2 = (r-1)J$, en multipliant à droite par J^{-1} on obtient $J = (r-1)I$ ce qui n'est pas très raisonnable car $r-1$ est supérieur ou égal à 2. Ainsi 0 est valeur propre de J.

Raisonnons de la même manière pour $r-1$. Supposons que $r-1$ n'est pas une valeur propre de J.
$J - (r-1)I$ est alors inversible. Comme $J(J-(r-1)I) = J^2 - (r-1)J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$, il vient en multipliant à droite par $(J-(r-1)I)^{-1}$: $J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$. Ce qui est impossible.

Finalement 0 et $r-1$ sont des valeurs propres de J et ce sont les seules possibles.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J \text{ sont } 0 \text{ et } r-1.}$$

c. Toutes les colonnes de J sont identiques et non nulles, donc J est de rang 1. Ceci confirme que 0 est valeur propre de J et montre en plus que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 est de dimension $r-2$ (penser au théorème du rang appliqué à un endomorphisme de matrice J...). Le sous-espace propre de J associé à $r-1$ est alors de dimension 1 puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de J est $r-1$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } J \text{ associé à la valeur propre } r-1 \text{ est de dimension } 1.}$$

d. J est symétrique et réelle. J admet exactement deux valeurs propres 0 et $r-1$. Les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont de dimensions respectives $r-2$ et 1.

Ainsi il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \ldots, U_{r-1})$ de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, ..., 0 et $r-1$.

$\forall k \in [\![1, r-2]\!], AU_k = IU_k + JU_k = U_k$ et $AU_{r-1} = IU_{r-1} + JU_{r-1} = U_{r-1} + (r-1)U_{r-1} = r\,U_{r-1}$.

Alors $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \ldots, U_{r-1})$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1, ..., 1 et r.

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$.

- $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r \end{pmatrix}$ car $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \ldots, U_{r-1})$ est une base (orthonormale) de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1, ..., 1 et r

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l}A \text{ est diagonalisable et il existe une matrice } P, \text{ de } \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R}) \text{ d'inverse } {}^tP \text{ telle que } A = PD{}^tP \text{ où } D \text{ est la} \\ \text{matrice \underline{diagonale} de } \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R}) \text{ dont les } (r-2) \text{ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 et le dernier} \\ \text{égal à } r.\end{array}}$$

6) a. Soit H un élément non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$. Pour montrer que ${}^tHMH$ est strictement positif il suffit de prouver que ${}^tHAH$ est strictement positif car $M = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} A$ et $n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}$ est strictement positif.

Posons $H' = {}^tPH = P^{-1}H = \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{r-1} \end{pmatrix}$.

$${}^tHAH = {}^tHPD{}^tPH = {}^t({}^tPH)D{}^tPH = {}^tH'DH' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_{r-1}) \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{r-2} \\ rh'_{r-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{r-2} h'^2_k + r\,h'^2_{r-1}.$$

${}^tHAH = \sum\limits_{k=1}^{r-1} h'^2_k + (r-1)\,h'^2_{r-1} = \|H'\|^2 + (r-1)\,h'^2_{r-1}$.

Si $H' = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ alors $P^{-1}H = {}^tPH = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ et donc $H = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ car P^{-1} est inversible.

Ainsi H' n'est pas nul. Alors $\|H'\|^2 > 0$ et $(r-1)\,h'^2_{r-1} \geqslant 0$ donc ${}^tHAH > 0$. Ceci achève de montrer que ${}^tHMH > 0$.

$$\boxed{\text{Si } H \text{ est un élément non nul de } \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}) \text{ alors : } {}^tHMH > 0.}$$

<u>Remarque</u>

Il convient sans doute de remarquer que la démonstration de ce résultat ne nécessitait pas une diagonalisation.

En effet soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix}$ *un élément non nul de* $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$.

${}^tHAH = {}^tHIH + {}^tHJH = {}^tHH + \sum\limits_{i=1}^{r-1} \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_i\, s_{i,j}\, h_j = \|H\|^2 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_i\, h_j = \|H\|^2 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} h_i \sum\limits_{j=1}^{r-1} h_j.$

${}^tHAH = \|H\|^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{r-1} h_i\right)^2$. *Ainsi* ${}^tHAH > 0$ *car* $\|H\|^2 > 0$. *Donc* ${}^tHMH > 0$.

b. Une utilisation simple du produit matriciel donne :

$$\boxed{\forall H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}),\ {}^tHMH = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R)\, h_i h_j\ .}$$

c. $M = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_i\, \partial t_j}(R)\right)$ et $\forall H \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}),\ H \neq 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tHMH > 0$. Le cours indique alors que :

$$\boxed{f \text{ présente un minimum local au point } R.}$$

d. $f(R) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r}\right)^n = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$

$$\boxed{\text{La valeur de } E(X) \text{ correspondant à ce minimum est } r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.}$$

<u>Remarque</u>

Un léger doute nous envahit. Le (vrai) problème a-t-il vraiment été traité ?

Quel problème ? Sans doute trouver le minimum de $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{r} (1 - x_i)^n$ *sous les contraintes* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_r > 0$ *et* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Ce qui précède nous a permis de montrer que si ce minimum existe et qu'il est atteint en $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ *alors il vaut* $r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$ *et* $u_1 = u_2 = \cdots = u_{r-1} = \frac{1}{r}$ *et donc* $u_r = \frac{1}{r}$.

Est-ce de la suffisance de ne pas se suffire du nécessaire ? Pas nécessairement ! Alors achevons de résoudre le problème.

Posons $\forall k \in [\![1, r]\!],\ u_k = \dfrac{1}{r}\cdot$ $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ *est un élément de* $(]0,1[)^r$ *vérifiant :* $u_1 + u_2 + \cdots + u_r = 1$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} (1 - u_k)^n = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *un élément de* $(]0,1[)^r$ *vérifiant :* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Montrons alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n \geqslant r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$.

$\varphi : t \to t^n$ *est convexe sur* $]0,1[$ *car* φ'' *est positive sur* $]0,1[$.

Ainsi si $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ *est une famille d'éléments de* $]0,1[$ *et si* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *est une famille de réels positifs dont la somme est 1 on a :*

$$\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, y_k\right)^n \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, (y_k)^n$$

En appliquant ce résultat avec $y_k = 1 - x_k$ *et* $\alpha_k = \dfrac{1}{r}$ *(pour tout* k *dans* $[\![1, r]\!]$*) il vient :*

$\displaystyle\left(\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)\right)^n \leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n$.

Or $\displaystyle\left(\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)\right)^n = \left(\frac{1}{r}\,(r-1)\right)^n = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n$ *car* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Alors $\displaystyle\left(\frac{r-1}{r}\right)^n \leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n$. *Ce qui donne* $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} (1 - x_k)^n \geqslant r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$.

On peut maintenant dire que $E(X)$ *est minimum si et seulement si* $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = \dfrac{1}{r}\cdot$