Problème

On admet que, si une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \,,\; T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \;\text{ et }\; y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\,x_i$$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(n+1-i)\,x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2) Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \,.$$

a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k\, x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\, dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln x\, dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, -1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4) On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.
Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.