edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES
OPTION GENERALE

JEUDI 13 MAI 1993, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :
. Règles graduées
. Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

On rappelle que, pour tout nombre réel x :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

1) On note ϕ l'application de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1,1] \quad : \quad \phi(t) = 3t - 4t^3$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1,1], \quad \phi(t) \in [-1,1]$.

b) Etablir que, pour tout couple (t,t') d'éléments de $[-1,1]$:

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leqslant 9\,|t - t'|$$

2) On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions numériques par : $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad f_n(x) = 3f_{n-1}(\frac{x}{3}) - 4\left(f_{n-1}(\frac{x}{3})\right)^3$$

Ecrire une fonction PASCAL, dont l'entête est :

```
function f(n :integer ;x :real) :real ;
```

et qui fournit la valeur de $f_n(x)$

3) Prouver que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* : \quad |f_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}$$

Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2

On considère la matrice carrée A d'ordre n à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{(n+2)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$$

La ligne d'indice i de cette matrice est donc : $\begin{pmatrix} \frac{1}{i!} & \frac{1}{(i+1)!} & \frac{1}{(i+2)!} & \cdots & \frac{1}{(i+n-1)!} \end{pmatrix}$.

1) On considère un vecteur colonne X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad AX = 0$$

On lui associe la fonction polynôme P, définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$P(t) = \frac{x_1}{n!} + \frac{x_2}{(n+1)!}t + \cdots + \frac{x_n}{(2n-1)!}t^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}t^{k-1}$$

a) On pose : $f(t) = t^n P(t)$. Calculer $f(1), f'(1), \cdots, f^{(n-1)}(1)$.

b) En déduire les dérivées successives de P au point 1.

2) Démontrer que P est nul et en déduire que A est inversible.

EXERCICE 3

Un appareil est constitué de composants électroniques. Lorsque l'un de ceux-ci tombe en panne, il est remplacé immédiatement. Si n est un entier naturel non nul, on note T_n la variable aléatoire égale au temps, compté en semaines, écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la n-ième panne survenant à l'emplacement d'un composant donné. Si t est un réel strictement positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de pannes du même composant dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

On suppose que N_t suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t \quad (\lambda > 0)$.

1)a) Comparer les événements : $(T_1 > t)$ et $(N_t = 0)$.

b) Reconnaître la loi de T_1.

2)a) Exprimer la probabilité de l'événement $(T_n > t)$ pour $t > 0$.

b) Montrer que T_n est une variable aléatoire à densité, dont on donnera une fonction de densité de probabilité.

3) On considère deux composants identiques au précédent. Etudier la loi de probabilité de T, variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la première panne de l'un des deux composants. (On précisera des hypothèses d'indépendance raisonnables que l'on sera amené à faire.)

PROBLÈME

Notations.

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad ; \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

f_n, g_n, les fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}_+$ par les relations :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k}) \quad ; \quad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

I_n, U_n, V_n, les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad U_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad V_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{H_n}}}^{1} g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à $n-1$.

PARTIE 1

1)a) La suite de terme général H_n est-elle convergente ? La suite de terme général S_n est-elle convergente ?

b) Pour tout nombre réel positif ou nul x, prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \tag{1}$$

c) En appliquant la double inégalité (1) à $x = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, montrer que $H_n \sim \ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

2)a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$, pour $x \in \mathbf{R}_+$.

b) En déduire, à l'aide de la double inégalité (1), les inégalités :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} \mathrm{e}^{-xH_n}\,\mathrm{d}x \leqslant U_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} \mathrm{e}^{-xH_n}\,\mathrm{d}x$$

c) En conclure que : $U_n \sim \dfrac{1}{H_n}$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer de façon analogue les inégalités :

$$0 \leqslant V_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{H_n}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{S_n}{2}}}{H_n}$$

e) Démontrer que $V_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{H_n}\right)$ quand n tend vers l'infini.

3) A l'aide des questions précédentes, établir que : $I_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$ quand $n \to +\infty$.

PARTIE 2

1) On considère la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'éléments de E_n définie par :

$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n : \quad e_k(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)(x+k+1)\ldots(x+n) = \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (x+i)$$

a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de E_n.

b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$$

c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\mathbf{C}_{n-1}^{k-1}$.

2) Déduire de la question 1 de la partie 2 la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \mathbf{C}_{n-1}^{k-1} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

3) Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la partie 1 pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \mathbf{C}_n^k \ln(k+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$$