On rappelle que, pour tout nombre réel x :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

1) On note ϕ l'application de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1,1] \quad : \quad \phi(t) = 3t - 4t^3$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1,1], \quad \phi(t) \in [-1,1]$.

b) Etablir que, pour tout couple (t,t') d'éléments de $[-1,1]$:

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leqslant 9\,|t - t'|$$

2) On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions numériques par : $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad f_n(x) = 3f_{n-1}(\frac{x}{3}) - 4\left(f_{n-1}(\frac{x}{3})\right)^3$$

Ecrire une fonction PASCAL, dont l'entête est :

function $f(n$:integer ;x :real) :real ;

et qui fournit la valeur de $f_n(x)$

3) Prouver que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* : \quad |f_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}$$

Que peut-on en conclure ?

Q1.. a) Soit $t \in [-1,1]$. $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta = t$

$\phi(t) = 3t - 4t^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta \in [-1,1]$.

Donc $\underline{\underline{\forall t \in [-1,1],\ \phi(t) = 3t - 4t^3 \in [-1,1]}}$.

b) Utilisons l'inégalité des accroissements finis.

ϕ est deux fois dérivable sur $[-1,1]$ (ϕ est polynomiale)

$\forall t \in [-1,1]$, $\phi'(t) = 3 - 12t^2$ et $\phi''(t) = -24t$

ϕ' est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $[0,1]$.

$\forall t \in [-1,0]$, $\phi'(-1) \leq \phi'(t) \leq \phi'(0)$; soit $\forall t \in [-1,0]$, $-9 \leq \phi'(t) \leq 3$

$\forall t \in [0,1]$, $\phi'(1) \leq \phi'(t) \leq \phi'(0)$; soit $\forall t \in [0,1]$, $-9 \leq \phi'(t) \leq 3$

Par conséquent : $\forall t \in [-1,1]$, $|\phi'(t)| \leq 9$

Donc $\underline{\underline{\forall (t,t') \in [-1,1]^2,\ |\phi(t) - \phi(t')| \leq 9\,|t - t'|}}$

Q2. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) = \phi(f_n(x/3))$ permet une version récursive simple.

Par récurrence : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (\underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n-1 \text{ fois}})(x/3^{n-1}) = \phi^{n-1}\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)$ ... qui se prête à une bonne version itérative.

```
program edhec93;
uses crt;
var n:integer;x,s:real;
function g(a:real):real;
begin
g:=3*a-4*a*a*a
end;
function f1(m:integer;y:real):real;     VERSION ITERATIVE  (fonction f1)
var k:integer;b:real;
begin
m:=m-1;b:=y/exp(m*ln(3));
for k:=1 to m do
b:=g(b);
f1:=b;
end;
function f(m:integer;y:real):real;     VERSION RECURSIVE  (fonction f)
begin
if m=1 then f:=y
else f:=g(f(m-1,y/3))
end;
begin
clrscr;
write('Introduisez la valeur de N ');readln(n);
Write('Donnez la valeur de X ');readln(x);
writeln('Version 1 (méthode récursive) : SIN(X) vaut : ',f(n,x));
writeln('Version 2 (méthode itérative) : SIN(X) vaut : ',f1(n,x))
end.
```

```
Introduisez la valeur de N 50
Donnez la valeur de X 0.785398163
Version 1 (méthode récursive) : SIN(X) vaut :  7.0710678088E-01
Version 2 (méthode itérative) : SIN(X) vaut :  7.0710678096E-01
```

Q3 Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-1,1]$, $f_n(x) \in [-1,1]$ et $|f_n(x) - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n}$.

(C'est mieux que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$)

- Montrons la propriété pour $n=1$.

Il nous faut montrer que : $\forall x \in [-1,1]$, $|x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$ (clairement $\forall x \in [-1,1]$, $f_1(x) = x \in [-1,1]$)

Les fonctions $x \mapsto |x - \sin x|$ et $x \mapsto \dfrac{|x|^3}{6}$ étant impaires il suffit de prouver que :

$\forall x \in [0,1]$, $|x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6} = \dfrac{x^3}{6}$.

Montrons en fait que : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

V1 deux études de fonctions ... sans problème.

V2. Par intégration.

$\forall u \in [0,1]$, $0 \leq \int_0^u \cos t \, dt \leq \int_0^u dt$

$\forall u \in [0,1]$, $0 \leq \sin u \leq u$

$\forall v \in [0,1]$, $0 \leq \int_0^v \sin u \, du \leq \int_0^v u \, du$

$\forall v \in [0,1]$, $0 \leq 1 - \cos v \leq \dfrac{v^2}{2}$

$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq \int_0^x (1 - \cos v) \, dv \leq \int_0^x \dfrac{v^2}{2} dv$

$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$; ceci achève l'initialisation de la récurrence.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$

$f_{n+1}(x) = \phi(f_n(\frac{x}{3}))$ pour tout $x \in [-1,1]$. On a encore $\forall x \in [-1,1]$, $\sin x = \phi(\sin \frac{x}{3})$.

$\forall x \in [-1,1]$, $\frac{x}{3} \in [-1,1]$ donc $\forall x \in [-1,1]$, $f_n(\frac{x}{3}) \in [-1,1]$ (H.R)

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall x \in [-1,1]}}$, $\underline{\underline{f_{n+1}(x) = \phi(f_n(\frac{x}{3})) \in [-1,1]}}$ car $[-1,1]$ est stable par ϕ d'après 1°a)

De plus : $\forall x \in [-1,1]$, $|\phi(f_n(\frac{x}{3})) - \phi(\sin \frac{x}{3})| \leq 9 |f_n(\frac{x}{3}) - \sin \frac{x}{3}|$ (car $\forall x \in [-1,1]$, $f_n(\frac{x}{3}) \in [-1,1]$ et $\sin \frac{x}{3} \in [-1,1]$)

donc : $|f_{n+1}(x) - \sin x| = |\phi(f_n(\frac{x}{3})) - \phi(\sin \frac{x}{3})| \leq 9 |f_n(\frac{x}{3}) - \sin \frac{x}{3}| \overset{\text{H.R}}{\leq} 9 \times \dfrac{|x/3|^3}{2 \times 3^n}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Par conséquent : $\forall x \in [-1,1]$, $|f_{n+1}(x) - \sin x| \leq 9 \times \dfrac{|x|^3}{27 \times 2 \times 3^n} = \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x) - \sin x| \leq \frac{|x|^3}{2 \times 3^n}$$

Ceci montre en particulier que : $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \sin x$ car : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n} = 0$

Notons encore que $f_n(x)$ est une valeur approchée de $\sin x$ à $\dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n}$ près.

Terminons par un programme en japonais.

```
"X"?→X:"N"?→N:N-1→N:X÷3xʸN→X:Lbl 0:3X-4XX²→X:
DSZ N:Goto 0:X◢
```

A l'exécution	N = 5	0,707 115 484
pour $X = \frac{\pi}{4}$	N = 10	0,707 106 781
	N = 15	0,707 106 781
	N = 20	" " "
	N = 100	" " "
	N = 1000	BOOM ! (m ERROR...)

Encore une petite remarque ou un petit exercice.

$\underline{f_n(x) = \sin(3^{n-1} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{3^{n-1}})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$ (récurrence simple)

Ce qui permet de prouver que : $f_n(x) - \sin x \sim \frac{3}{2} x^3 \cos x \ \dfrac{1}{9^n}$ ... convergence rapide.

EXERCICE 2

Q1.. Notons avant de commencer que $AX=0$ signifie que :

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(k+i-1)!}=0 \qquad \left(\text{La } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A \text{ est : } \left[\frac{1}{i!},\frac{1}{(i+1)!},\dots,\frac{1}{(i+n-1)!}\right]\right)$$

a) Ne peut-on pas utiliser Leibniz !

$$\forall t\in\mathbb{R},\ P(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(n+k-1)!}\,t^{k-1} \quad\text{donc}\quad \forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(n+k-1)!}\,t^{n+k-1}$$

Il vient alors : $\forall p\in[\![0,n-1]\!],\ \forall t\in\mathbb{R},\ f^{(p)}(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(n+k-1)!}(n+k-1)(n+k-2)\dots\underbrace{(n+k-1-p+1)}_{n+k-p}\,t^{n+k-1-p}$

ou : $\forall p\in[\![0,n-1]\!],\ \forall t\in\mathbb{R},\ f^{(p)}(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(n+k-1)!}\times\frac{(n+k-1)!}{(n+k-p-1)!}\,t^{n+k-1-p}$

Donc $\forall p\in[\![0,n-1]\!],\ f^{(p)}(1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(n+k-p-1)!}$.

Voir plus haut !

En posant $i=n-p$, on obtient : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ f^{(n-i)}(1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(k+i-1)!}=0$

ce qui signifie que : $f^{(n-1)}(1)=0,\ f^{(n-2)}(1)=0,\dots,\ f'(1)=0,\ f(1)=0$

Donc $f(1)=f'(1)=\dots=f^{(n-1)}(1)=0$.

b) f est un polynôme et 1 est un zéro d'ordre au moins n de f car

$f(1)=f'(1)=\dots=f^{(n-1)}(1)=0$ donc $(X-1)^n$ divise $f=X^nP$.

Par conséquent $(X-1)^n$ divise P (1 n'est pas racine de X^n !)

Donc 1 est un zéro d'ordre au moins n de P

Par conséquent : $P(1)=P'(1)=\dots=P^{(n-1)}(1)=0$.

__Remarque__.. En toute rigueur deux cas sont à étudier pour obtenir ce résultat

1er cas.. $P\neq 0$ ... la démonstration vaut !

2e cas.. $P=0$ ... le résultat est une évidence !

Q2.. $P(1)=P'(1)=\dots=P^{(n-1)}(1)=0$ montre que $(X-1)^n$ divise P ; or le degré de P est au plus $n-1$, donc P est nul.

Ses coefficients $x_1,x_2,\dots,x_n$ sont alors nuls.

Nous avons donc montré que : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX=0\Rightarrow X=0$. A est inversible.