PARTIE I

Q1 a) La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge donc la suite (H_n) diverge.

Remarquons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (sommes partielles associées à une série à termes positifs divergente).

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

b) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $\forall t\in[0,x]$, $\frac{1}{1+t}-1+t=\frac{1}{1+t}(1-1-t+t+t^2)=\frac{t^2}{1+t}\geq 0$; $\forall t\in[0,x]$, $\frac{1}{1+t}\geq 1-t$

$\forall t\in[0,x]$, $\frac{1}{1+t}\leq 1$

Donc $\forall t\in[0,x]$, $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$. Intégrons : $\int_0^x(1-t)dt\leq\int_0^x\frac{dt}{1+t}\leq\int_0^x dt$

Soit : $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leq[\ln(1+t)]_0^x\leq[t]_0^x$; ou : $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

Finalement : $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x}}$. (1)

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k}-\frac{1/k^2}{2}\leq\ln(1+\frac{1}{k})=\ln\frac{k+1}{k}=\ln(k+1)-\ln k\leq\frac{1}{k}$

Par sommation : $\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\leq\sum\limits_{k=1}^n[\ln(k+1)-\ln k]\leq\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k}$.

Donc : $H_n-\frac{1}{2}S_n\leq\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\leq H_n$.

Soit : $1\leq\frac{H_n}{\ln(n+1)}\leq 1+\frac{1}{2\ln(n+1)}S_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln(n+1)}S_n\right)=0\times\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$ ($(S_n)_{n\geq 1}$ converge)

Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln(n+1)}=1$. $\underline{H_n\sim\ln(n+1)}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln n+\ln(1+1/n)}{\ln n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right]=1\ ;\quad \underline{\ln(n+1)\sim\ln n}$$

Donc par transitivité : $\underline{H_n\sim\ln n}$ (quelle surprise).

Q2 a) $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+$

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)=\ln\left[\prod_{k=1}^n\left(\frac{k+x}{k}\right)\right]=\ln\left[\frac{\prod_{k=1}^n(k+x)}{\prod_{k=1}^n k}\right]=\ln\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}=\ln\frac{1}{g_n(x)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = -\ln g_n(x)$

Finalement : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \; g_n(x) = e^{-f_n(x)}}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$U_n = \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-f_n(x)} dx$ d'après l'égalité précédente.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; \forall k \in [\![1, n]\!], \; \frac{x}{k} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2} \leq \ln(1 + \frac{x}{k}) \leq \frac{x}{k}$ d'après (1)

Par sommation : $x H_n - \frac{1}{2} x^2 S_n \leq f_n(x) \leq x H_n$

(*) donc $e^{-xH_n} \leq e^{-f_n(x)} \leq e^{-xH_n + \frac{1}{2}x^2 S_n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

Ainsi : $\forall x \in [0, \frac{1}{\sqrt{H_n}}], \; e^{-xH_n} \leq e^{-f_n(x)} \leq e^{-xH_n + \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{H_n}})^2 S_n} = e^{\frac{S_n}{2H_n}} e^{-xH_n}$

En intégrant il vient alors : $\underline{\underline{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} e^{-xH_n} dx \leq U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} e^{-xH_n} dx}}$

c) Notons que : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} e^{-xH_n} dx = \left[-\frac{1}{H_n} e^{-xH_n}\right]_0^{1/\sqrt{H_n}} = -\frac{1}{H_n} e^{-H_n/\sqrt{H_n}} + \frac{1}{H_n} = \frac{1}{H_n}(1 - e^{-\sqrt{H_n}})$

donc $\frac{1}{H_n}(1 - e^{-\sqrt{H_n}}) \leq U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} \frac{1}{H_n}(1 - e^{-\sqrt{H_n}})$

ou $1 - e^{-\sqrt{H_n}} \leq H_n U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} (1 - e^{-\sqrt{H_n}})$.

Rappelons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - e^{-\sqrt{H_n}}) = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{S_n}{2H_n}} = 1$ car $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n H_n) = 1$; soit : $\underline{\underline{U_n \sim \frac{1}{H_n}}}$ $\left(\frac{U_n}{\frac{1}{H_n}} = U_n H_n \ldots \right)$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. (*) donne $\forall x \in \mathbb{R}_+, \; e^{-xH_n} \leq e^{-f_n(x)} \leq e^{\frac{1}{2}x^2 S_n} e^{-xH_n}$

donc $\forall x \in [\frac{1}{\sqrt{H_n}}, 1], \; 0 \leq e^{-f_n(x)} \underset{x^2 \leq 1}{\leq} e^{S_n/2} e^{-xH_n}$

donc $0 \leq V_n \leq \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 e^{S_n/2} e^{-xH_n} dx = e^{S_n/2} \left[-\frac{1}{H_n} e^{-xH_n}\right]_{\frac{1}{\sqrt{H_n}}}^1 = \frac{e^{S_n/2}}{H_n}\left[-e^{-H_n} + e^{-\frac{1}{\sqrt{H_n}}H_n}\right]$

ou : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{H_n} e^{S_n/2} \left[e^{-\sqrt{H_n}} - e^{-H_n}\right] \leq e^{-\sqrt{H_n}} \frac{e^{S_n/2}}{H_n}$.

Finalement : $0 \leq V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} \dfrac{e^{S_n/2}}{H_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq H_n V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} e^{S_n/2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ converge donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[e^{-\sqrt{H_n}} e^{S_n/2}\right] = 0$

Par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n V_n = 0$ ou : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{V_n}{1/H_n}\right) = 0$

Donc : $\underline{\underline{V_n = o\left(\frac{1}{H_n}\right)}}$.

Q3.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = U_n + V_n$ $\quad \dfrac{I_n}{1/H_n} = H_n U_n + H_n V_n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n U_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n V_n = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{I_n}{1/H_n}\right) = 1$. Donc : $I_n \sim \dfrac{1}{H_n} \sim \dfrac{1}{\ln n}$

Pour finir : $\underline{\underline{I_n \sim \dfrac{1}{\ln n}}}$.

PARTIE 2 (Lire le texte original) LA DEMARCHE DE Q1 EST TRES IMPORTANTE

Q1.. Analyse.. Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $n! = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $n! = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(-j)$

Notons que les zéros de e_k sont $-1, -2, \dots, -(k-1), -(k+1), \dots, -n$

Donc si $j \neq k$ (ou $k \neq j$) : $e_k(-j) = 0$

Finalement : $n! = \lambda_j e_j(-j) = \lambda_j \prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq n}} (-j+i) = \lambda_j (-j+1)(-j+2)\cdots(-j+(j-1))(-j+j+1)\cdots(-j+n)$

$n! = \lambda_j (-j+1)(-j+2)\cdots(-1)\, 1 \times 2 \times 3 \times \cdots (n-j) = \lambda_j (-1)^{j-1} (j-1)(j-2)\cdots 1 \times (n-j)! = (-1)^{j-1} (j-1)!\,(n-j)!\,\lambda_j$

Donc $\lambda_j = \dfrac{n!}{(-1)^{j-1}(j-1)!\,(n-j)!} = (-1)^{j-1} n \dfrac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!} = (-1)^{j-1} n\, C_{n-1}^{j-1}$

$\underline{\underline{\forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = (-1)^{j-1} n\, C_{n-1}^{j-1} = \dfrac{n!}{e_j(-j)}}}$. Ceci montre l'unicité du n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

<u>Synthèse</u>.. Posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j = (-1)^{j-1} n \binom{j-1}{n-1} = \dfrac{n!}{e_j(-j)}$ et montrons que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$. Il s'agit de prouver l'égalité de deux fonctions polynômes de degré $\leq n-1$; il suffit alors de montrer que ces deux polynômes coïncident en n points de $\mathbb{R}$; par exemple en $-1, -2, \dots, -n$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(-j) \underset{\uparrow}{=} \lambda_j e_j(-j) = n!$ ceci achève de prouver l'existence de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$!

$e_k(-j) = 0$ si $j \neq k$

Finalement : $\exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = (-1)^{k-1} n \binom{k-1}{n-1}$

Q2.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx = \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^1 \frac{e_k(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^1 \frac{dx}{x+k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\ln(x+k)\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [\ln(k+1) - \ln(k)] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} n \binom{k-1}{n-1} (-1)^{k-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \text{ ou :}$$

$$\underline{\underline{I_n = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k-1}{n-1} (\ln(k+1) - \ln k)}} \qquad \left((-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}\right)$$

Q3.. $I_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$ donc $\dfrac{1}{n \ln n} \sim \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k-1}{n-1} (\ln(k+1) - \ln k)}_{R_n}$; $R_n \sim \dfrac{1}{n \ln n}$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k-1}{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k-1}{n-1} \ln k \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1 \text{ ou } 0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k-1}{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+2} \binom{k}{n-1} \ln(k+1)$$

$k \mapsto k+1$ dans le $2^{\text{ième}}$ $\sum$ $\qquad$ $(-1)^{k+1}$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\binom{k-1}{n-1} + \binom{k}{n-1}\right) \ln(k+1) + (-1)^{n+1} \binom{n-1}{n-1} \ln(n+1)$$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{k}{n} \ln(k+1) + (-1)^{n+1} \ln(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k}{n} \ln(k+1)$$

Finalement : $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{k}{n} \ln(k+1) \sim \dfrac{1}{n \ln n}}}.$