PARTIE I : Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire.

Remarques 1.. La probabilité pour faire un déplacement vers le haut est p.
La probabilité pour faire un déplacement vers la droite ou vers la gauche est q = 1 - p.

2.. Ainsi si hasard prend la valeur 0 on considère que l'a fait un déplacement vers le haut.

3.. Si hasard prend la valeur 1 on considère que l'a fait un déplacement vers la droite.

4.. Si hasard prend la valeur -1 on fait un déplacement vers la gauche si l'abscisse du point est 1 et vers la droite si l'abscisse du point est 0.

Ainsi si hasard ne prend pas la valeur 0. x reçoit la valeur 1 si x = 0 et x reçoit la valeur 1 + hasard si x = 1. Pour ne pas multiplier les tests déclarons alors une fonction affine $\varphi : x \mapsto ax+b$ qui prend la valeur 1 en 0 et 1 + hasard en 1.

$\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 1 + hasard \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a+b = hasard+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = hasard \end{cases}$

Résumons Si hasard prend la valeur 0, x ne change pas et y augmente de 1
Si hasard ne prend pas la valeur 0, x reçoit la valeur de "x × hasard + 1" et y ne change pas. Ecrivons alors la totalité de la boucle.

```
While x<2 Do
begin
h:=hasard;
If h=0 then y:=y+1
     else x:=x*h+1;
end;
```

Ecrivons la fonction hasard en remarquant que $p + \frac{q}{2} = \frac{p+1}{2}$

```
function hasard (p:real):integer;
Var z:real;
begin
z:=random;
If z<p then hasard:=0
     else If z<(p+1)/2 then hasard:=1
                   else hasard:=-1;
end;
```

PARTIE II Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n et de la durée du trajet.

Q1 a) $u=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $Au=\begin{pmatrix}p & q/2 & 0\\ q & p & 0\\ 0 & q/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=u$.

$u=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

b) et c) Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon\in\{-1,1\}$ ... pour traiter les deux cas en un !

$$AX=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)X \Leftrightarrow \begin{cases} px+\frac{q}{2}y=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)x\\ qx+py=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)y\\ \frac{q}{2}y+z=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)z\end{cases} \underset{p\neq0,\,q\neq0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=\varepsilon\frac{2}{\sqrt2}x=\varepsilon\sqrt2 x\\ \varepsilon y=\sqrt2 x \text{ ... ou } y=\varepsilon\sqrt2 x \text{ car } \varepsilon^2=1\\ 0=+\frac{q}{2}y+\left(1-p-\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)z=\frac{q}{2}y+q\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\right)z\end{cases}$$

$$AX=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)X \Leftrightarrow \begin{cases} y=\varepsilon\sqrt2 x\\ z=\dfrac{-1/2}{\frac{\varepsilon}{\sqrt2}-1}y=\dfrac{y}{\sqrt2\varepsilon-2}=\dfrac{\sqrt2\varepsilon+2}{(\sqrt2\varepsilon)^2-4}y=-\frac12(\sqrt2\varepsilon+2)y\end{cases}.$$

$$AX=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)X \Leftrightarrow \begin{cases} y=\varepsilon\sqrt2 x\\ z=-\frac12(\sqrt2\varepsilon+2)\varepsilon\sqrt2 x=-\frac12(2+2\varepsilon\sqrt2)x=-(1+\varepsilon\sqrt2)x\end{cases}.$$

Ainsi $p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}$ est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé est

$SEP\left(A,p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\sqrt2\\ -(1+\varepsilon\sqrt2)\end{pmatrix}\right)$ ... et ceci pour $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=-1$.

Alors
1° $p+\frac{q}{\sqrt2}$ est valeur propre de A et $SEP\left(A,p+\frac{q}{\sqrt2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\\ -(1+\sqrt2)\end{pmatrix}\right)$

2° $v=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\\ -(1+\sqrt2)\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $p+\frac{q}{\sqrt2}$ de première composante égale à 1.

3° $p-\frac{q}{\sqrt2}$ est valeur propre de A et $SEP\left(A,p-\frac{q}{\sqrt2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt2\\ \sqrt2-1\end{pmatrix}\right)$

4° $w=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt2\\ \sqrt2-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $p-\frac{q}{\sqrt2}$ de première composante égale à 1.

d) u, v, w sont trois vecteurs propres de A associés à trois valeurs propres (*) ~~distinctes~~ de A donc (u,v,w) est une famille libre de cardinal 3 de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

Ainsi (u,v,w) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, $p+\frac{q}{\sqrt{2}}$ et $p-\frac{q}{\sqrt{2}}$.

Soit Π la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (u,v,w). Alors :

1) $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$;

(*) Il est facile de vérifier que $1 \neq p+\frac{q}{\sqrt{2}}$, $1 \neq p-\frac{q}{\sqrt{2}}$ et $p+\frac{q}{\sqrt{2}} \neq p-\frac{q}{\sqrt{2}}$ car $q = 1-p$ et $p \in]0,1[$

2) Π est inversible (comme matrice de passage) ;

3) $A' = \Pi^{-1} A P = \mathrm{Diag}\left(1, p+\frac{q}{\sqrt{2}}, p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p+q/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-q/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Si $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$, Π est une matrice inversible telle que $A' = \Pi^{-1} A P$ soit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+q/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-q/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

e) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 1 \\ \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0 \\ x-(1+\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $\Pi X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

f) Soit $n\in\mathbb{N}$. La première colonne de A^n est $A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Une récurrence simple donne $(A')^n = (\Pi^{-1}A\Pi)^n = \Pi^{-1}A^n\Pi$.

Ainsi $A^n = \Pi(A')^n\Pi^{-1}$. $A' = \mathrm{diag}\left(1, p+\frac{q}{\sqrt{2}}, p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ donc

$A'^n = \mathrm{diag}\left(1, \left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n, \left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$ (toujours à l'aide d'une récurrence simple ...)

Alors $A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \Pi(A')^n\Pi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n&0\\0&0&(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\\frac{1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}$.

$A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1&-(1+\sqrt{2})&\sqrt{2}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\\frac{1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}$. Alors :

$A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n+\frac{1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\\frac{1}{\sqrt{2}}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n-\frac{1}{\sqrt{2}}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\1-\frac{1+\sqrt{2}}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n+\frac{\sqrt{2}-1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}$ est la première colonne de A^n.

(Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $(\{X_{n-1}=0\},\{X_{n-1}=1\},\{X_{n-1}=2\})$ est un système complet d'événements. Ainsi, la formule des probabilités totales donne :

$\forall i\in[\![0,2]\!]$, $P(X_n=i) = P(X_{n-1}=0)P_{\{X_{n-1}=0\}}(X_n=i)+P(X_{n-1}=1)P_{\{X_{n-1}=1\}}(X_n=i)+P(X_{n-1}=2)P_{\{X_{n-1}=2\}}(X_n=i)$.

Les données indiquent que : $\forall i\in\{0,1,2\}$, $P_{\{X_{n-1}=0\}}(X_n=i) = \begin{cases}p & \text{si } i=0\\ q & \text{si } i=1\\ 0 & \text{si } i=2\end{cases}$.

$\forall i\in\{0,1,2\}$, $P_{\{X_{n-1}=1\}}(X_n=i) = \begin{cases}\frac{q}{2} & \text{si } i=0\\ p & \text{si } i=1\\ \frac{q}{2} & \text{si } i=2\end{cases}$.

$\forall i\in\{0,1,2\}$, $P_{\{X_{n-1}=2\}}(X_n=i) = \begin{cases}1 & \text{si } i=2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\forall i\in\{0,1,2\}$, $P(X_n=i) = \begin{cases}p\,P(X_{n-1}=0)+\frac{q}{2}P(X_{n-1}=1) & \text{si } i=0\\ q\,P(X_{n-1}=1)+p\,P(X_{n-1}=1) & \text{si } i=1\\ \frac{q}{2}P(X_{n-1}=1)+P(X_{n-1}=2) & \text{si } i=2\end{cases}$

Alors $\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & \frac{q}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_{n-1}=0) \\ P(X_{n-1}=1) \\ P(X_{n-1}=2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(X_{n-1}=0) \\ P(X_{n-1}=1) \\ P(X_{n-1}=2) \end{pmatrix}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

b] Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} \overset{\odot}{=} A^n \begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=1) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors d'après +]

$\odot$ Encore une récurrence simple.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} P(X_n=0) = \frac{1}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n \\ P(X_n=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n \\ P(X_n=2) = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n \end{cases}$$

Q3 a] $0 < p+\frac{q}{\sqrt{2}} < p+q = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$. ou $\frac{q}{\sqrt{2}} - p < \frac{q}{\sqrt{2}} < q < 1$!!

$p-\frac{q}{\sqrt{2}} < p < 1$. $\frac{q}{\sqrt{2}} - p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q+p-(1+\sqrt{2})p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-(1+\sqrt{2})p\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

$p-\frac{q}{\sqrt{2}} < 1$ et $\frac{q}{\sqrt{2}} - p < 1$ donnent $\left|p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right| < 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=0) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n=0)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=2) = 1$

Notons alors qu'il est quasi-certain que l'abscisse du mobile M prenne la valeur 2. Soit S cet événement.

$\overline{S} = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\{X_n \neq 2\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{X_{n+1} \neq 2\} \subset \{X_n \neq 2\}$.

donc le théorème de la limite monotone indique que $P(\overline{S}) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n \neq 2)$.

$\lim_{n\to+\infty} P(X_n \neq 2) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-P(X_n=2)\right) = 1-1 = 0$. Alors $P(\overline{S}) = 0$.

Ainsi $P(S) = 1$.

$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=2) = 1$ MONTRE que'il est quasi-certain que l'abscisse du mobile prenne la valeur 2.

α?

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $1-P(X_n=2)=\frac{1+\sqrt2}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^n+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^n$.

$$1-P(X_n=2)=\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^n\left[\frac{1+\sqrt2}{2}+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right)^n\right].$$

$-p-\frac{q}{\sqrt2}<p-\frac{q}{\sqrt2}<p+\frac{q}{\sqrt2}$ donc $\left|p-\frac{q}{\sqrt2}\right|<\left|p+\frac{q}{\sqrt2}\right|=p+q/\sqrt2$.

Alors $\left|\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt2}{2}+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right)^n\right)=\frac{1+\sqrt2}{2}\neq0$

Alors $\frac{1+\sqrt2}{2}+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right)^n\sim\frac{1+\sqrt2}{2}$.

Ainsi $\underline{\underline{1-P(X_n=2)\sim\frac{1+\sqrt2}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^n}}$.

Q4 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\{T=n\}=\{X_0\neq2\}\cap\{X_1\neq2\}\cap\dots\cap\{X_{n-2}\neq2\}\cap\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=2\}$.

Si $\{X_{n-1}=1\}$ est réalisé nécessairement $\{X_0\neq2\},\dots,\{X_{n-2}\neq2\}$ sont réalisés.

Ainsi $\underline{\underline{\{T=n\}=\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=2\}}}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) $T(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(T=n)=P(\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=2\})=P(X_{n-1}=1)\,P_{\{X_{n-1}=1\}}(X_n=2)$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(T=n)=\left(\frac{1}{\sqrt2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt2}\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}\right)\times\frac{q}{2}$.

$$\underline{\underline{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\quad P(T=n)=\frac{q}{2\sqrt2}\left[\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}\right]=\frac{q}{2\sqrt2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\frac{q}{2\sqrt2}\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}}}$$

c) $\left|p+\frac{q}{\sqrt2}\right|<1$ et $\left|p-\frac{q}{\sqrt2}\right|<1$ ⚠ donc les séries de termes généraux

(⚠ prouvé en Q3 a))

$n\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$ et $n\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$ convergent.

Or $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $nP(T=n)=\frac{q}{2\sqrt2}n\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\frac{q}{2\sqrt2}n\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$... et aussi pour $n=1$.

La série de terme général $nP(T=n)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes ; elle est même absolument convergente car elle est à termes positifs. Ainsi T possède une espérance et :

$$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

<u>mieux</u> $$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}!$$

Alors $$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

$$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{q^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{q^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$E(T) = \frac{1}{2\sqrt{2}q}\left[\frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}q} \frac{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2}{((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))^2} = \frac{1}{q\sqrt{2}}\left[2+2\sqrt{2}+1-2-1+2\sqrt{2}\right]$$

$$\underline{\underline{E(T) = \frac{4}{q}.}}$$

PARTIE III Loi de probabilité du vecteur aléatoire (X_n, Y_n) et de la distance parcourue

(Q1) <u>a)</u> • Les déplacements sont indépendants, la probabilité de faire un déplacement vers le haut est p.

• Si on a pas Π passant au point de coordonnées $(0, n-2k)$ cela signifie que Π a fait $n-2k$ déplacements vers le haut, k déplacements faisant passer l'abscisse de Π de 0 à 1 (ce qui se produit avec la probabilité q) et k déplacements faisant passer l'abscisse de Π de 1 à 0 (ce qui se produit avec la probabilité $\frac{q}{2}$)

La probabilité cherchée est donc $\underline{p^{n-2k} q^k \left(\frac{q}{2}\right)^k}$. ou $p^{n-2k}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$.

b) Pour aller de 0 au point de coordonnées $(0,y)$ il est nécessaire de faire un nombre k de déplacements faisant passer l'abscisse du point de 0 à 1, k déplacements faisant passer l'abscisse du point de 1 à 0 et y déplacements vers le haut. Si le tout se fait en n pas : $y+2k=n$ et ainsi $2k=n-y$. Alors $n-y$ est pair et positif.

Si $n-y$ est impair ou strictement négatif le nombre de chemins cherché est 0.

Supposons $n-y$ pair et positif ou nul. Notons que pour les chemins proposés le premier déplacement horizontal se fait sur la droite, le suivant sur la gauche et l'alternance se poursuit. Ainsi la connaissance des déplacements horizontaux détermine la connaissance des déplacements vers la droite, des déplacements vers la gauche et également des déplacements vers le haut.

Pour construire un tel chemin il suffit de choisir la place des $2k$ déplacements horizontaux parmi les n déplacements où $k=\frac{n-y}{2}$.

Si $n-y$ est pair et positif le nombre de chemins cherché est $\binom{n}{n-y}$ ou $\binom{n}{y}$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$. $(X_n=0)\cap(Y_n=y)$ se réalise si, en n pas le point de coordonnées passe de 0 au point de coordonnées $(0,y)$.

Si $n-y$ est impair ou négatif $(X_n=0)\cap(Y_n=y)=\emptyset$ d'après b)

Supposons $n-y$ pair et positif. Il y a $\binom{n}{y}$ chemins permettant d'aller de 0 au point de coordonnées $(0,y)$ en n pas et π réalise un tel chemin avec la probabilité $p^y\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$ (d'après a)).

Ainsi si $n-y$ est pair et positif : $P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=y\})=\binom{n}{y}p^y\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$

Si $n-y$ est impair ou strictement négatif : $P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=y\})=0$

(Q2) Un chemin faisant passer de O au point de coordonnées $(1, y)$ en n pas est constitué de - y déplacements vers le haut
- k déplacements horizontaux vers la droite et $k-1$ déplacements horizontaux vers la gauche avec $k+k-1+y=n$ ou $n-y=2k-1$.

Si un tel chemin existe $n-y$ est un élément impair de $\mathbb{N}$.

Ainsi si $n-y$ est pair ou strictement négatif : $P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n=y\})=0$.

Supposons que $n-y$ impair. $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $n-y=2k-1$.
et $n-y$ est positif

Un chemin allant de O au point de coordonnées $(1, y)$ en n pas est constitué de - y déplacements vers le haut
- k déplacements horizontaux vers la droite et $k-1$ déplacements horizontaux vers la gauche alternés. Le premier déplacement horizontal se faisant vers la droite.

Pour construire un tel chemin il suffit de choisir la place des déplacements vers le haut.

Il y a donc $\binom{n}{y}$ chemins de ce type.

Un chemin de ce type se réalise avec la probabilité $p^y\left(\frac{q}{2}\right)^{k-1} q^k = \sqrt{2}\, p^y \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k-1}$

ou $\sqrt{2}\, p^y \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$.

Si $n-y$ est un élément impair de $\mathbb{N}$: $P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n=y\}) = \binom{n}{y}\sqrt{2}\, p^y \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$.

Résumons Q1 c) et Q2 de manière différente. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n=n-2k\}) = \begin{cases} \binom{n}{n-2k} p^{n-2k}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k} & \text{si } n-2k \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n=n-(2k+1)\})=0$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n=n-2k-1\}) = \begin{cases} \binom{n}{n-2k-1}\sqrt{2}\, p^{n-2k-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1} & \text{si } n-2k-1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n=n-2k\})=0$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $(\{Y_n = i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Alors $P(\{X_n=0\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=i\}) = \sum_{i=0}^{n} P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=i\})$.

$P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=i\}) = 0$ si $i>n$

Alors $P(\{X_n=0\}) = \sum_{k=0}^{n} P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=n-k\})$.

$$P(\{X_n=0\}) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=n-2k\}) + \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \underbrace{P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=n-2k-1\})}_{=0}.$$

Ainsi $P(X_n=0) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{n-2k} p^{n-2k}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} p^{n-2k}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$.

▼ Lemme : Si $n\in\mathbb{N}$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$: $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k} = \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$

Si $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} a^{n-2k-1}b^{2k+1} = \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$

Démonstration du lemme.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}a^{n-2k}b^{2k}}_{S} + \underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}a^{n-2k-1}b^{2k+1}}_{T}$.

$(a+b)^n = S+T$.

$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(-1)^k b^k = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}a^{n-2k}b^{2k} - \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}a^{n-2k-1}b^{2k+1} = S-T$

$(a-b)^n = S-T$

Alors $(a+b)^n+(a-b)^n = 2S$ et $(a+b)^n-(a-b)^n = 2T$, $S = \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$ et

$T = \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$. Si $n=0$ $S=1=\frac{(a+b)^0+(a-b)^0}{2}$.

▲ ceci achève la démonstration du lemme.

Alors $P(X_n=0) = \frac{\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n}{2}$, c'est le résultat de PL Q 2b)

c) On a de même $P(X_n=1) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=i\}) = \sum_{i=0}^{n} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=i\}) = \sum_{k=0}^{n} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-k\})$

Supposons $n \geq 1$ $\quad P(X_n=1) = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{[n/2]} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-2\ell\})}_{=0} + \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-2\ell-1\})$

Alors $P(X_n=1) = \sum_{\ell=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{n-2\ell-1}\sqrt{2}\, p^{n-2\ell-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2\ell+1} = \sqrt{2}\sum_{\ell=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2\ell+1} p^{n-2\ell-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2\ell+1}$

D'après la somme $\quad P(X_n=1) = \sqrt{2}\, \dfrac{\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n-\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n-\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$

ce résultat vaut encore pour $n=0$ et confirme P2 Q2 b)

Q4 a) $D(\Omega)=\mathbb{N}$.

b) Soit m un élément de $\mathbb{N}$. $(\{T=\ell\})_{\ell\geq 2}$ est un système quasi-complet d'événements donc $\quad P(D=m) = \sum_{\ell=2}^{+\infty} P(\{D=m\}\cap\{T=\ell\})$.

$P(D=m) = \sum_{\ell=2}^{+\infty} P(\{D=m\}\cap\{X_{\ell-1}=1\}\cap\{X_\ell=2\}) = \sum_{\ell=2}^{+\infty} P(\{Y_{\ell-1}=m\}\cap\{X_{\ell-1}=1\}\cap\{X_\ell=2\})$

$P(D=m) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(\{X_\ell=1\}\cap\{X_{\ell+1}=2\}\cap\{Y_\ell=m\}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(\{X_\ell=1\}\cap\{X_{\ell+1}=2\}\cap\{Y_\ell=m\})$

"$k \mapsto k+1$" $\qquad \{X_\ell=1\}\cap\{X_{\ell+1}=2\}\cap\{Y_\ell=m\}=\emptyset$ si $\ell=0$.

$\forall m\in\mathbb{N}, \quad P(D=m) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(\{X_\ell=1\}\cap\{X_{\ell+1}=2\}\cap\{Y_\ell=m\}).$

Soit $m\in\mathbb{N}$. Observons que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\{Y_k=m\}=\emptyset$ si $k<m$.

$\forall k\in[\![m,+\infty[\![$, $P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = P(\{X_k=1\}\cap\{Y_k=m\})\, P_{\{X_k=1\}\cap\{Y_k=m\}}(X_{k+1}=2)$

$\forall k\in[\![m,+\infty[\![$, $P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = \frac{q}{2}\, P(\{X_k=1\}\cap\{Y_k=m\})$.

$\forall k\in[\![m,+\infty[\![$, $P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = \frac{q}{2}\, P(\{X_k=1\}\cap\{Y_k=k-(k-m)\})$

Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$.

Si $k-n$ est pair $P(\{X_k=1\} \cap \{Y_k = k-(k-n)\}) = 0$.

Si $k-n$ est impair, c'est à dire s'il existe i dans $\mathbb{N}$ tel que $k-n = 2i+1$ alors

$$P(\{X_k=1\} \cap \{Y_k = k-(k-n)\}) = \binom{k}{k-2i-1}\sqrt{2}\, p^{k-2i-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1} = \binom{k}{2i+1}\sqrt{2}\, p^{k-2i-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1}.$$

Finalement $P(D=n) = \frac{q}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} P(\{X_k=1\} \cap \{Y_k = k-(k-n)\})$ donne encore :

$$P(D=n) = \frac{q}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{n+2i+1}{2i+1}\sqrt{2}\, p^{n}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1} \quad (*)$$

$$P(D=n) = \frac{q}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(n+2i+1)!}{n!\,(2i+1)!}\sqrt{2}\, p^{n}\,\frac{(q^2)^i q}{2^i\sqrt{2}}$$

$$P(D=n) = \frac{p^n}{n!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(n+2i+1)!}{(2i+1)!}\left(\frac{q^2}{2}\right)^{i+1} \ldots$$ on peut encore écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(D=n) = \frac{p^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(n+1+2\ell)!}{(1+2\ell)!}\left(\frac{q^2}{2}\right)^{1+\ell}.$$

d) le tout en un pour le même prix ! Soit $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons que $\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$. Ce qui s'écrit

encore $\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r}{r}x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Soit $r \in \mathbb{N}$. et soit $x \in]-1,1[$. $-x \in]-1,1[$.

Alors $$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} - \frac{1}{(1+x)^{r+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r}{r}\underbrace{(x^n - (-1)^n x^n)}_{\substack{=0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 2x^n \text{ si } n \text{ est impair}}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\binom{2\ell+1+r}{r}2x^{2\ell+1}!$$

Alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{2i+1+r}{r} x^{2i+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{r+1}} - \frac{1}{(1+x)^{r+1}}\right]$

Reprenons n dans $\mathbb{N}$ et $P(D=n)$ sous la forme (R)

$$P(D=n) = \frac{q}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{n+2i+1}{2i+1}\sqrt{2}\, p^n (q/\sqrt{2})^{2i+1} = \frac{q p^n}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{n+2i+1}{n}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1}$$

Ainsi $\displaystyle P(D=n) = \frac{q p^n}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}\right].$

Ainsi $\displaystyle P(D=0) = \frac{q}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{q}{2\sqrt{2}}\,\frac{1+\frac{q}{\sqrt{2}}-1+\frac{q}{\sqrt{2}}}{1-\frac{q^2}{2}} = \frac{q}{2\sqrt{2}}\,\frac{2\times\frac{2q}{\sqrt{2}}}{2-q^2}$

$$P(D=0) = \frac{q^2}{2-q^2}.$$

$$P(D=1) = \frac{qp}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(1-\frac{q^2}{2}\right)^2}\right] = \frac{qp}{2\sqrt{2}}\,\frac{4\left(1+\frac{q^2}{2}+\frac{2q}{\sqrt{2}}-1-\frac{q^2}{2}+\frac{2q}{\sqrt{2}}\right)}{(2-q^2)^2}$$

$\displaystyle P(D=1) = \frac{qp}{2\sqrt{2}}\times\frac{4q}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{(2-q^2)^2} = \frac{4q^2p}{(2-q^2)^2}.$ $\quad \displaystyle P(D=1) = \frac{4q^2p}{(2-q^2)^2}.$

$$P(D=2) = \frac{qp^2}{2\sqrt{2}}\,\frac{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(1-\frac{q^2}{2}\right)^3} = \frac{qp^2}{2\sqrt{2}}\,\frac{8}{(2-q^2)^3}\left[1+3\frac{q}{\sqrt{2}}+3\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2\sqrt{2}}-1+3\frac{q}{\sqrt{2}}-3\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2\sqrt{2}}\right]$$

$\displaystyle P(D=2) = \frac{4qp^2}{\sqrt{2}(2-q^2)^3}\left[6\frac{q}{\sqrt{2}}+\frac{q^3}{\sqrt{2}}\right] = \frac{4qp^2}{2(2-q^2)^3}(6q+q^3).$ $\quad \displaystyle P(D=2) = 2\,\frac{q^2p^2(6+q^2)}{(2-q^2)^3}.$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\,P(D=n) = \frac{qp}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\,n\left(\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1} - \frac{qp}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\,n\left(\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$$

$0<1-q<1-\frac{q}{\sqrt{2}}$ donc $0<\frac{1-q}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}<1$. Ainsi $\left|\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right|<1$.

$0<1-q<1-\frac{q}{\sqrt{2}}<1+\frac{q}{\sqrt{2}}$ donc $0<\frac{1-q}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}<1$. Ainsi $\left|\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right|<1$.

Alors les séries de termes généraux $n\left(\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$ et $n\left(\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$ convergent

La série de terme général $nP(D=n)$ est alors convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes. Elle est même absolument convergente car à termes positifs. Ainsi $E(D)$ existe. De plus

$$E(D)=\sum_{n=0}^{+\infty} nP(D=n)=\frac{qp}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}-\frac{qp}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$$

$$E(D)=\frac{qp}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^2}-\frac{qp}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^2}$$

$$E(D)=\frac{qp}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}-p\right)^2}-\frac{qp}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}-p\right)^2}=\frac{qp}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\left(q-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{1}{\left(q+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]$$

$$E(D)=\frac{qp}{2\sqrt{2}q^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]=\frac{p}{2\sqrt{2}q}\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

$$E(D)=\frac{4p}{2\sqrt{2}q}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right]=\frac{4p}{2\sqrt{2}q}\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4p}{q}.$$

$$\underline{\underline{E(D)=\frac{4p}{q}.}}$$