edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

CONCOURS D'ADMISSION 1994

MATHEMATIQUES
OPTION GENERALE

MERCREDI 11 MAI 1994, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :

- Règles graduées
- Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifferemment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbf{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} / \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}$$

1) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)

2) Montrer que si l'on pose : $\forall n \in \mathbf{N} \qquad a_n = \dfrac{1}{2^n}, \quad b_n = \dfrac{n}{2^n}, \quad c_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.

3) Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

4) Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.

5) Montrer que $s : u \longmapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{R}$; quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} s$?

6) Déterminer $\operatorname{Ker} s$.

EXERCICE 2

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^n \, dt$$

1) Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

2)a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

3)a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

b) En déduire que : $\left|I - \left(I_0 - \dfrac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$

K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

4) On pose, pour tout réel x : $\operatorname{Arctan}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [0,1] \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \operatorname{Arctan}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction Arctan.

EXERCICE 3

La notation $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux nombres réels a et b.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions φ_n et F_n de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ en posant :

$$\varphi_n(x) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n \quad \text{et} \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \min(\varphi_n(x), 1) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1) On suppose la constante n déja déclarée. Recopier, en la complétant, la déclaration de la fonction PASCAL F pour qu'elle renvoie la valeur $F_n(x)$. On calculera $y = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$ par l'algorithme de Hörner.

```
function F(x :real) :real ;
var y :real ; k :integer ;
begin
  if x<0 then ......else begin
    y :=0 ; for ......do ...... ;
    if y<=1 then ...else ...
  end ;
end ;
```

2)a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer l'existence un nombre réel positif x_n unique tel que $\varphi_n(x_n) = 1$.

b) Exprimer $F_n(x)$ sans utiliser le symbole min selon que $x \in [0, x_n]$ ou $x \in [x_n, +\infty[$.

c) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité, X_n.

d) Que vaut $P(X_n \leqslant 0)$? Que vaut $P(X_n \geqslant 1)$?

3)a) Montrer, pour n dans $\mathbf{N}^*$, l'existence d'un unique réel μ_n tel que $F_n(\mu_n) = \frac{1}{2}$.

b) μ_n est une grandeur caractéristique de la variable aléatoire X_n. Quel est son nom ?

4) Comparer $F_{n+1}(\mu_n)$ à $F_{n+1}(\mu_{n+1})$, et en déduire le sens de variation, puis la convergence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

5)a) Calculer $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$ pour $x \in [0, 1[$, et calculer le nombre $L \in [0, 1[$ tel que $\varphi(L) = 1$.

b) En déduire, selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant L$, ou $x > L$ la valeur de $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$, et déterminer le seul nombre réel ℓ tel que $F(\ell) = \frac{1}{2}$.

c) Montrer sans calcul que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad F_n(\ell) < \frac{1}{2}$

d) Montrer aussi que , si $\varepsilon > 0$, on a pour n suffisamment grand : $F_n(\ell + \varepsilon) > \frac{1}{2}$.

e) Déduire de ce qui précède la limite de la suite (μ_n).

PROBLÈME

Données et objectifs du problème.

p désigne un nombre réel fixé tel que $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

On étudie le mouvement dans le plan d'un mobile M partant de l'origine et se déplaçant indéfiniment d'un point à l'autre de l'ensemble des points du plan à coordonnées (x, y) entières telles que $y \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 2$. On appellera "chemin" l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) sont des entiers et vérifient : $x \in \{0, 1\}$ et $y \geqslant 0$

Le mouvement est une succession de "pas". Si le mobile se trouve à un instant donné au point de coordonnées (x, y), le pas suivant le mènera au point (x', y') selon par la règle suivante :

- Si $x = 0$, alors
  - Avec la probabilité p : $x' = 0$ et $y' = y + 1$
  - Avec la probabilité q : $x' = 1$ et $y' = y$
- Si $x = 1$, alors
  - Avec la probabilité p : $x' = 1$ et $y' = y + 1$
  - Avec la probabilité $\frac{q}{2}$: $x' = 0$ et $y' = y$
  - Avec la probabilité $\frac{q}{2}$: $x' = 2$ et $y' = y$
- Si $x = 2$ (c'est-à-dire si le mobile est hors du chemin), alors $x' = 2$ et $y' = y + 1$

On note respectivement X_n et Y_n l'abscisse et l'ordonnée du mobile à l'issue du n-ième pas. A titre d'exemple, les événements $(X_0 = 0)$ et $(Y_0 = 0)$ sont certains.

PARTIE 1 *Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire.*

On admet que l'on dispose d'une fonction hasard, sans paramètre, à valeurs entières, qui retourne aléatoirement les valeurs -1 0 et 1, respectivement avec les probabilités $\frac{q}{2}$, p, et $\frac{q}{2}$.

Rédiger les lignes manquantes du programme PASCAL suivant pour que celui-ci simule le cheminement du mobile M en affichant à l'écran les coordonnées (x, y) des positions successives de M jusqu'à ce que son abscisse prenne pour la première fois la valeur 2 (c'est-à dire jusqu'à la sortie du chemin).

```
program simulation ;
var x,y,h :integer ;
begin
  x :=0 ; y :=0 ;
  while x<2 do begin
    h :=hasard ;
    ......................
  end ;
end.
```

PARTIE 2 *Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n et de la durée du trajet sur le chemin.*

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & \frac{q}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1)a) Montrer que $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

b) Montrer que $p + \frac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre v relatif à cette valeur propre, et dont la première composante est 1.

c) Montrer que $p - \frac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre w relatif à cette valeur propre, et dont la première composante est 1.

d) En déduire une matrice inversible Π telle que la matrice $A' = \Pi^{-1}A\Pi$ soit diagonale. Expliciter A'.

e) Résoudre le système $\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire le produit $\Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Calculer explicitement la première colonne de la matrice A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

2)a) Justifier de façon précise :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(X_{n-1} = 0) \\ P(X_{n-1} = 1) \\ P(X_{n-1} = 2) \end{pmatrix}$$

b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

3)a) Calculer $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2)$. Avez vous une justification intuitive du résultat ?

b) Donner un équivalent de la forme ab^n de $\ell - P(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On note T la durée du trajet sur le chemin, c'est-à-dire la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que tel que $X_n = 2$.

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 2)$.

b) Déterminer la loi de probabilité de T.

c) Calculer l'espérance mathématique de T.

PARTIE 3 *Loi de probabilité du vecteur aléatoire (X_n, Y_n) et de la distance parcourue sur le chemin.*

Dans cette partie, $[a]$ désigne la partie entière d'un réel a.

1)a) On pose $y = n-2k$. Déterminer, en fonction de l'entier k compris entre 0 et $[\frac{n}{2}]$, la probabilité que M parvienne en $(0, n-2k)$ en effectuant n "pas"le long d'un itinéraire donné, itinéraire constitué d'une succession de $n - 2k$ pas vers le haut et d'un nombre égal de pas vers la droite et de pas vers la gauche, dans un ordre déterminé.

b) y désignant maintenant un entier naturel quelconque, déterminer le nombre d'itinéraires possibles menant de O à $(0, y)$ en n pas. On aura soin de distinguer deux cas :

- $n - y$ impair ou strictement négatif.
- $n - y$ pair et positif.

c) En déduire, en distinguant toujours ces deux cas, la valeur de : $P((X_n = 0) \cap (Y_n = y))$.

2) Déterminer de même la valeur de : $P((X_n = 1) \cap (Y_n = y))$.

3) Dans cette question on cherche à retouver la loi de probabilité (marginale) de X_n à partir de la loi conjointe du couple (X_n, Y_n).

a) Justifier très précisement l'égalité : $P(X_n = 0) = \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} P((X_n = 0) \cap (Y_n = n - 2k))$.

b) Retrouver ainsi la valeur de $P(X_n = 0)$.

c) Retrouver de la même façon la valeur de $P(X_n = 1)$.

4) On note D la variable aléatoire égale à la "distance parcourue sur le chemin", c'est-à-dire la valeur prise par la variable aléatoire Y_t où t désigne le plus petit des entiers n tels que $X_n = 2$.

a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire D ?

b) Montrer que : $(D = m) = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{N}} [(X_{k+1} = 2) \cap (X_k = 1) \cap (Y_k = m)]$

c) Montrer que : $\forall m \in \mathbf{N} \qquad P(D = m) = \dfrac{p^m}{m!} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(m+1+2k)!}{(1+2k)!} \left(\dfrac{q^2}{2}\right)^{1+k}$.

d) Calculer cette probabilité pour $m = 0$, $m = 1$, et $m = 2$.